PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21), 1967, p. 69—79

SUR L'APPLICATION DE QUATERNIONS MONOGÈNES DANS L'ÉCOULEMENT A POTENTIELS DE TOURBILLONS

K. Voronjec

(Communiqué le 18 mai 1966)

1. Quaternions monogènes

Les fonctions analytiques d'une variable complexe jouent un rôle très important dans l'étude des mouvements plans d'un fluide parfait. On connait beaucoup de travaux où les auteurs ont essayé d'appliquer les fonctions complexes de l'ordre plus élevé, par exemple les quaternions, pour l'analyse des mouvements tridimensionnels. D'autre part on sait bien qu'il n'existent pas des fonctions hypercomplexes qui sont analytiques dans le sens classique. Le problème de l'analyticité des quaternions a été l'objet de beaucoup de travaux et l'on peut trouver la bibliographie correspondante, par exemple, dans l'article de A. Bilimovitch [1]. Mais il est parfois utile de choisir quelques classes de quaternions dont des certaines propriétés sont analogues à celles de fonctions analytiques d'une variable complexe. Dans ce travail sont appliqués les quaternions dits monogènes qui peuvent être utiles dans l'étude d'un mouvement à trois dimensions. La définition de la monogénéité d'un quaternion sera donnée plus loin car cette définition, ainsi que la définition d'analyticité d'un quaternion, n'est pas la même dans les travaux consacrés à ce problème.

On va appliquer ici seulements les quaternions réels, fonctions de coordonnées x, y, z, ce qui correspond à un mouvement fluide permanent et tridimensionnel. Soit q_o, q_x, q_y, q_z quatre fonctions réelles de variables indépendentes x, y, z. En désignant par 1, c_x, c_y, c_z les unités quaternionnelles on écrit le quaternion Q sous la forme

$$Q = q_o + q_x c_x + q_y c_y + q_z c_z = q_o + \vec{q}$$

avec

$$\vec{q} = q_x c_x + q_y c_y + q_z c_z;$$

q_o est la partie scalaire de quaternion Q et $\vec{q}$ est sa partie vectorielles. Les unités quaternionnelles c_x, c_y, c_z remplacent dans ce cas les unités vectorielles $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

L'algèbre des quaternions est associative par rapport à l'addition et à la multiplication, mais non commutative par rapport à la multiplication. La règle de la multiplication des unités quaternionnelles est la suivante:

$$c_x \wedge c_x = c_y \wedge c_y = c_z \wedge c_z = -1,$$

$$c_x \wedge c_y = -c_y \wedge c_x = c_z,$$

$$c_y \wedge c_z = -c_z \wedge c_y = c_x,$$

$$c_z \wedge c_x = -c_x \wedge c_z = c_y.$$

Le signe $\wedge$ est adopté pour la multiplication quaternionnelle.

Au quaternion Q correspond le quaternion conjugué $\bar{Q} = q_o - \vec{q}$ et l'on constate facilement que

$$Q \wedge \bar{Q} = \bar{Q} \wedge Q = q_o^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = N^2.$$

La valeur réciproque de quaternion est donnée par

$$\frac{1}{Q} = \frac{\bar{Q}}{Q \wedge \bar{Q}} = \frac{\bar{Q}}{N^2}.$$

Le calcul directe montre que le produit de deux quaternions $Q_1 = q_{o1} + \vec{q}_1$ et $Q_2 = q_{o2} + \vec{q}_2$ est un quaternion donné par la formule

$$Q_1 \wedge Q_2 = q_{o1} q_{o2} + q_{o1} \vec{q}_2 + q_{o2} \vec{q}_1 - (\vec{q}_1 \vec{q}_2) + [\vec{q}_1 \vec{q}_2].$$

Par $(\vec{q}_1 \vec{q}_2)$ et $[\vec{q}_1 \vec{q}_2]$ sont désignés les produits scalaire et vectoriel de vecteurs $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2$. Les parties vectorielles des produits $Q_1 \wedge Q_2$ et $Q_2 \wedge Q_1$ se diffèrent. On divise le quaternion Q_1 par le quaternion Q_2 en multipliant Q_1 par la valeur réciproque de Q_2. Puisque la multiplication peut être effectuée de deux côtés, on voit que la division donne deux valeurs différentes.

Soit $w(x+iy)$ une fonction de variable complexe $x+iy$. Les conditions de la monogénéité d'une telle fonction peuvent être écrites, à l'aide de la dérivée aréolaire [2], sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) w(x+iy) = 0,$$

d'où l'on tire facilement les équations de Cauchy-Riemann. Par analogie, on appelera avec Moisil [3] quaternion monogène le quaternion Q qui satisfait à la condition

$$\nabla Q = 0$$

où

$$\nabla = c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z}$$

est un opérateur de la nature quaternionnelle, analogue à celui de Hamilton. L'application de cet opérateur se réduit à une multiplication quaternionnelle symbolique.

Supposons que q_o, q_x, q_y, q_z sont des fonctions continues de x, y, z et ont des dérivées premières continues. On dit qu'un quaternion Q est holomorphe dans un domaine E simplement connexe si Q est uniforme dans E et si il est monogène en tous les points de E.

On calcule facilement que

$$\nabla \wedge Q = \text{grad } q_o - \text{div } \vec{q} + \text{rot } \vec{q}$$

et l'on voit que la condition de monogénéité amène à deux équations

$$\operatorname{div} \vec{q}=0, \qquad \operatorname{grad} q_o+\operatorname{rot} \vec{q}=0,$$

c'est-à-dire à quatre équations scalaires. Puisque

$$\nabla \wedge \bar{\nabla}=\bar{\nabla} \wedge \nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta,$$

on voit que les composantes d'un quaternion monogène sont des fonctions harmoniques de trois variables x, y, z.

On peut trouver dans beaucoup de travaux, dont nous citons seulement quelques uns [4], [5], [6], [7], l'application des quaternions monogènes dans l'analyse des mouvements fluides dans l'espace. Nous mentionnons seulement que l'on peut former un potentiel quaternionnel analogue au potentiel complexe dans le mouvement plan. Il est possible d'étudier la déflexion d'un champ tridimensionnel des vitesses de celui de Laplace [8], [9], [10] par des méthodes analogues à celles appliquées dans le mouvement plan. Il est parfois avantageux d'introduire des variables quaternionnelles indépendantes, correspondantes à des variables complexes, et d'étudier, par exemple, les mouvement réalisés par deux mouvements plans dans deux plans ortogonaux.

Dans ce qui suit sera analysé un mouvement fluide où les tourbillons dérivent d'un potentiel.

2. Potentiel de tourbillons

Soit $2\vec{\omega}$ le tourbillon dans le mouvement d'un fluide incompressible et Φ son potentiel. Le champ de tourbillons est alors un champ de Laplace car

$$2\vec{\omega}=\operatorname{rot} \vec{v}=\operatorname{grad} \Phi, \qquad \operatorname{div} 2\vec{\omega}=0$$

($\vec{v}$ est la vitesse). On voit que l'on peut former un quaternion $Q=\Phi-\vec{v}$ et que ce quaternion est monogène car les conditions

$$\operatorname{grad} \Phi+\operatorname{rot}(-\vec{v})=0, \qquad \operatorname{div} \vec{v}=0 \tag{1}$$

sont accomplies. Donc, la partie scalaire de chaque quaternion monogène peut être traitée comme un potentiel de tourbillons et sa partie vectorielle présente la vitesse avec le signe contraire.

L'écoulement considéré possède quelques propriétés intéressantes. On sait que les équations de Navier-Stokes relatives à des fluides visqueux portent un terme complémentaire $\nu\Delta\vec{v}$ par rapport à des équations d'Euler pour le fluide parfait, ν étant le coefficient cinématique de la viscosité. La formule vectorielle

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}=\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}-\Delta \vec{v}$$

montre que dans le cas considéré ce terme est nul. Il s'ensuit que si le tourbillon dérive d'un potentiel, le mouvement d'un fluide visqueux est déterminé par les mêmes équations que dans le cas où le fluide est parfait.

Il va de soi que les conditions aux limites diffèrent dans ces deux cas et la satisfaction de ces conditions reste le plus difficile problème d'Hydrodynamique. On sait que le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait est aussi déterminé par des équations qui ne changent pas quand on passe à un fluide visqueux, mais qu'il est impossible de satisfaire à une condition complémentaire relative à la vitesse car le potentiel de vitesses est une fonction harmonique. Le cas étudié ici est tout de même plus favorable car la fonction harmonique se rapporte au tourbillon et les conditions aux limites contiennent ordinairement des restrictions relatives à des valeurs de vitesse.

Si l'on tient compte des conditions cinématiques seulement on constate sans peine qu'un nombre infini de mouvements fluides correspond à un champ de Laplace de tourbillons. Ces mouvements diffèrent par un mouvement irrotationnel arbitraire complémentaire. En effet, si $\vec{v}_1$ est la vitesse d'un mouvement irrotationnel, on voit que la vitesse $\vec{v}+\vec{v}_1$ satisfait à des conditions (1). On verra plus loin que les conditions dynamiques du problème ne peuvent pas être satisfaites que par un procédé beaucoup plus compliqué.

Cette propriété des conditions cinématiques (1) peut être utilisée pour obtenir quelques solutions du problème posé par un calcul essentiellement simplifié [7]. Par une vitesse $\vec{v}_1$ convenablement choisie on peut arriver à l'expression de la vitesse résultante ne contenant plus une de trois projections sur des axes de coordonnées. Il suffit, par exemple, de choisir le potentiel φ de mouvement irrotationnel complémentaire de telle sorte que la condition

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

soit satisfaite. Il est évident que c'est toujours possible et que la fonction φ sera déterminée à une fonction additive de x et de y près:

$$\varphi = \int_0^z v_z \, dz + \varphi_1(x, y).$$

La condition $\Delta\varphi = 0$ peut être accomplie par un choix convenable de la fonction φ_1. On arrive à la formule

$$\Delta\varphi_1 = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_{z=0.}$$

Il est évident que l'on peut ajouter à la fonction φ, ainsi trouvée une fonction harmonique arbitraire de variables x et y.

On supposera, donc, dans ce qui suit, que $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ et que $v_z = 0$. Les projections v_x et v_y de la vitesse sont des fonctions de trois coordonnées x, y, z. Un tel mouvement peut être complété par un mouvement irrotationnel arbitraire sans que les conditions (1) cessent d'être satisfaites.

3. Mouvement pseudo-plan de première espèce

Un mouvement fluide est plan dans le sens habituel si les lignes de courant sont des courbes planes, parallèles par exemple au plan Oxy, et si elles restent les mêmes dans tous les plans $z = C^{te}$. Si une de ces deux conditions n'est pas accomplie, le mouvement est pseudo-plan. Il est, d'après Berker

[11], de première espèce si

$$v_x = v_x(x, y, z), \qquad v_y = v_y(x, y, z), \qquad v_z = 0$$

et de la deuxième espèce dans le cas où

$$v_x = v_x(x, y), \qquad v_y = v_y(x, y), \qquad v_z = v_z(x, y).$$

Le problème que nous traitons ici est le problème pseudo-plan de première espèce.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

détermine la fonction de courant $\psi(x, y, z)$, à une fonction additive de z près, par des formules

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Tenant compte des équations (1) on peut écrire les trois projections du tourbillon sous la forme

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= -\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ 2\omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Les deux premières équations du système (3) permettent de poser

$$\Phi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{4}$$

car la fonction arbitraire de z qui apparaisse après l'intégration peut être introduite dans l'expression de ψ. A cause de div $2\omega = 0$ on a $\Delta \Phi = 0$ et la troisième équation (3) donne

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \Delta \psi = 0, \tag{5}$$

Ce résultat permet de construire très facilement les quaternions monogènes correspondant au mouvement où les tourbillons dérivent d'un potentiel. Il suffit de choisir arbitrairement une fonction harmonique ψ de variables x, y, z. D'après (2) les dérivées de ψ par rapport à x et à y présentent les projection $-v_y$ et v_x de la vitesse $\vec{v}$ d'un mouvement pseudo-plan de première espèce qui satisfait aux conditions posées. La dérivée de ψ par rapport à z donne le potentiel Φ de tourbillons. En ajoutant à la vitesse $\vec{v}$ la vitesse $\vec{v}_1$ d'un mouvement irrotationnel arbitraire on obtient des mouvements tridimensionnels différents qui tous satisfont à des conditions (1).

Si l'on désigne par p la pression, par ς la densité du fluide et par U la fonction des forces, les équations de Navier-Stokes, qui sont dans ce cas identiques à celles d'Euler, peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varsigma}-U\right)=-\frac{D\left(\psi,\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right)}{D(x,y)},$$

(6)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\varsigma}-U\right)=-\frac{D\left(\psi,\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{D(x,y)}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\varsigma}-U\right)=0.$$

Il s'ensuit de la dernière équation que $p/\varsigma\ -U$ ne dépend pas de z et les conditions de compatibilité des équations (6) deviennent

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{D\left(\psi,\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{D(x,y)}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{D\left(\psi,\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right)}{D(x,y)}=0,$$

(7)

$$\frac{D(\psi_1\,\Delta_1\,\psi)}{D(x,y)}=-\frac{D\left(\psi,\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)}{D(x,y)}=0.$$

Par Δ_1 est désigné l'opérateur

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Le problème consiste, donc, à la détermination d'une fonction ψ qui satisfait à des conditions (7) et qui est harmonique.

4. Exemples

I. La troisième équation du système (7) montre que la seconde dérivée de ψ par rapport à z est une fonction de ψ et de z. Soit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=k^2\,\psi+f(z)$$

où, pour fixer les idées, est supposé que k est une constante réelle; $f(z)$ est une fonction quelconque de z. En considérant la partie homogène d'équation

$$\frac{d^2 \psi}{d z^2}=k^2\,\psi+f(z)$$

on obtient la solution

$$\psi=C_1\,e^{kz}+C_2\,e^{-kz}$$

et en appliquant la méthode de Lagrange on arrive à deux équations

$$e^{kz}\frac{dC_1}{dz}+e^{-kz}\frac{dC_2}{dz}=0, \quad ke^{kz}\frac{dC_1}{dz}-ke^{-kz}\frac{dC_2}{dz}=f(z)$$

déterminant les fonctions C_1 et C_2.

Il s'ensuit que

$$C_1=\frac{1}{2k}\int e^{-kz}f(z)\,dz+C_3,$$

$$C_2=-\frac{1}{2k}\int e^{kz}f(z)\,dz+C_4.$$

Il est évident qu'il faut considérer C_3 et C_4 comme deux fonctions de x et de y:

$$C_3=f_1(x,y), \qquad C_4=f_2(x,y).$$

La fonction ψ prend, donc, la forme

$$\psi=f_1(x,y)e^{kz}+f_2(x,y)e^{-kz}+\frac{1}{2k}e^{kz}\int e^{-kz}f(z)\,dz-\frac{1}{2k}e^{-kz}\int e^{kz}f(z)\,dz.$$

Il résulte de deux premières équations (7) que les fonctions f_1 et f_2 satisfont à des équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=k_1\frac{\partial f_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=k_2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \tag{8}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes arbitraires. La condition $\Delta\psi=0$ est équivalente à trois équations

$$\begin{gathered}\Delta_1 f_1+k^2 f_1=A=C^{te}, \qquad \Delta_1 f_2+k^2 f_2=B=C^{te},\\ Ae^{kz}+Be^{-kz}+\frac{k}{2}e^{kz}\int e^{-kz}f(z)\,dz-\frac{k}{2}e^{-kz}\int e^{kz}f(z)\,dz+f(z)=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Les deux premières équations (9) s'intègrent facilement à l'aide des équations (8) et donnent f_1 et f_2 comme des fonctions trigonométriques d'une combinaison linéaire des variables x et y. La troisième équation (9) montre que la fonction $f(z)$ doit être linéaire en z.

II. Soit

$$\psi(x,y,z)=\psi_1(x,y)\,\psi_2(z).$$

La troisième équation (7) est automatiquement satisfaite et les deux premières deviennent

$$\frac{D\left(\psi_1,\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)}{D(x,y)}=0, \qquad \frac{D\left(\psi_1,\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)}{D(x,y)}=0.$$

On y déduit sans peine que les dérivées de la fonction ψ_1 sont proportionnelles:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = C \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

avec C une constante, après quoi on constate par un simple calcul que ψ_1 est une fonction arbitraire de $x+Cy$

$$\psi_1 = f(x+Cy).$$

Donc, dans chaque plan $z = C^{te}$ les lignes de courant sont des droites $x + Cy = C^{te}$. Par une rotation de système de coordonnées on arrive à un mouvement parallèle à l'axe des x. On aura alors $\psi_1 = f(y)$ et la condition $\Delta\psi = 0$ amène à deux équations.

Pour k positif $(k = k_1^2)$ la solution est donnée par

$$\psi = (C_1 \sin k_1 y + C_2 \cos k_1 y)\,(C_3 \operatorname{sh} k_1 z + C_4 \operatorname{ch} k_1 z)$$

avec des constantes $C_i\,(i = 1 \cdots 4)$. Pour k négatif le rôle de coordonnées y et z est inverse.

Par un choix convenable des constantes on peut obtenir un écoulement rectiligne dans un canal de section rectangulaire. Les conditions aux limites sont satisfaites sur les parois et sur la base.

III. Berker [11] a analysé les conditions de compatibilité des équations de Navier-Stokes en supposant que dans un mouvement pseudo-plan de première espèce la fonction de courant ψ a la forme

$$\psi = f_1(x,z)\,y + f_2(x,z) \tag{10}$$

sans demander que le tourbillon dérive d'un potentiel. Il a trouvé trois cas particuliers.

a) La fonction f_1 ne dépend pas de z et doit alors satisfaire à l'équation

$$\nu f_1''' - f_1 f_1'' + f_1'^2 = 0.$$

b) La fonction f_1 ne dépend pas de x et est alors de la forme $f_1 = az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des constantes.

c) La fonction f_1 est donnée par l'expression

$$f_1 = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} + C_3 x + C_4$$

avec des constantes arbitraires $C_i\,(i = 1 \ldots 4)$ et k.

Dans tous ces cas la fonction f_2 doit vérifier l'équation

$$\nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right) - f_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\,\frac{\partial f_2}{\partial x} = C,$$

où C est une constante. On cherchera ici la forme des fonctions $f_1(x,z)$ et $f_2(x,z)$ dans l'expression (10) de Berker en demandant que la fonction ψ soit harmonique.

La seconde équation du système (7) donne la fonction f_1 sous la forme

(11) $$f_1^2 = m_1(x) + m_2(z)$$

où m_1 et m_2 sont deux fonctions arbitraires. La troisième des équations (7) amène à deux équations

(12) $$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} - f_1\,\frac{\partial^3 f_1}{\partial x\,\partial z^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\,\frac{\partial f_2}{\partial x} - f_1\,\frac{\partial^3 f_2}{\partial x\,\partial z^2} = 0,$$

dont la première se réduit à

$$(m_1 + m_2)\, m_2'' - m_2'^2 = 0$$

et détermine les fonctions m_1, m_2 et f_1 sous la forme

$$m_1 = k_1, \qquad m_2 = Ce^{nz} - k_1, \qquad f_1^2 = Ce^{nz}$$

avec k_1, C et n constantes. D'autre part, la condition $\Delta\psi = 0$ se traduit par deux équations

(13) $$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0,$$

d'où il s'ensuit que $f_1 = a_2 = C^{te}$.

La fonction f_2 peut être calculée facilement à l'aide des équation (12), (13) et de la première équation (7). On aura ainsi la fonction ψ sous la forme

$$\psi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xz + a_5 (x^2 - z^2),$$

où a_i $(i = 1 \ldots 5)$ sont des constantes.

IV. Soit le champ de tourbillons un champ plan. Laissons de côté le cas où $2\omega_z = 0$ car on constate facilement que dans ce cas les vitesses présentent des fonctions linéaires et que le tourbillon est constant dans tout le domaine. Supposons que $2\omega_x = 0$ (le cas où $2\omega_y = 0$ est équivalent au celui) ce qui donne la fonction de courant sous la forme

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x, y) + \psi_2(y, z).$$

La condition $\Delta\psi = 0$ amène à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2}\right) = f(y),$$

où $f(y)$ est une fonction arbitraire de y. On peut admettre qu'elle est contenue dans les expressions pour les fonctions ψ_1 et ψ_2.

La troisième équation du système (7) donne

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y\,\partial z^2} = 0.$$

Si le second facteur est égal à zéro le problème se réduit à un problème plan avec la valeur constante de tourbillon.

Si la dérivée de ψ_1 par rapport à x est égale à zéro, on obtient que $\psi_1 = \psi_1(y)$, c'est-à-dire que $\psi = \psi(y, z)$. La vitesse v_y est égale à zéro, l'écoulement se produit dans la direction de l'axe des x, mais la fonction de courant, la vitesse et le tourbillon sont fonctions de y et de z. La fonction ψ doit être harmonique. On tombe ainsi dans des mouvements étudiés par Brillouin [12] entre deux cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x. On peut satisfaire à des conditions aux limites sur les cylindres par le procédé classique de l'hydrodynamique plane.

Notons encore que l'on peut satisfaire à toutes les conditions posées en supposant que la fonction ψ est un polynome homogène de deuxième ou de troisième degré et que le mouvement dans ce cas est aussi rectiligne.

5. Retour aux mouvements tridimensionnels

Les conditions (1) restent valables si l'on ajoute à la vitesse d'un mouvement à potentiels de tourbillons trouvé la vitesse d'un mouvement irrotationnel quelconque. Les conditions dynamiques (7) ne sont pas linéaires et un tel procédé ne peut plus être accepté. On va démontrer que l'on peut tout de même obtenir des mouvements tridimensionnels satisfaisant à toutes les conditions posées dès qu'on connait un mouvement pseudo-plan satisfaisant à ces conditions. Le premier mouvement ne doit pas être obligatoirement pseudo-plan.

En effet, soit $\vec{v}_1$ et p_1 la vitesse et la pression d'un mouvement à potentiels de tourbillons quelconque. L'équation de Navier-Stokes, coïncidente avec celle d'Euler, donne

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\varsigma} - U\right) = [\vec{v}_1 \ \operatorname{rot} \vec{v}_1].$$

Soit $\vec{v}_2$ et p_2 la vitesse et la pression correspondentes à un mouvement irrotationnel ($\vec{v}_2 = \operatorname{grad} \varphi$). On a donc

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\varsigma} - U\right) = 0.$$

Les conditions cinématiques (1) sont satisfaites pour le mouvement où la vitesse $\vec{v}$ est égale à $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. L'équation dynamique qui correspond à un tel mouvement peut être mise à la forme

$$\operatorname{grad}\left(v_1 v_2 + \frac{p - p_1 - p_2}{\varsigma} + U\right) = [\vec{v}_2 \ \operatorname{rot} \vec{v}_1] = [\operatorname{grad} \varphi, \ \operatorname{grad} \Phi].$$

Sans faire l'analyse détaillée de cette équation on va indiquer seulement une solution particulière évidente. Il suffit de poser

$$\vec{v}_2 = n \ \operatorname{rot} \vec{v}_1$$

(n est une constante), ce qui est toujours possible car les deux fonctions φ et Φ sont harmoniques. Le mouvement obtenu se produit en trois dimensions car les projections de rot $\vec{v}_1$ sur les trois axes de coordonnées ne sont pas nulles même s'il s'agit d'un mouvement pseudo-plan.

La solution obtenue possède quelques propriétés qui ne sont pas sans intérêt. Puisque

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi]=0$$

on obtient que la fonction $v_1 v_2+(p-p_1-p_2)/\varsigma+U$ est harmonique. On constate aussi que l'on peut poser

$$[\operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\Phi]=\operatorname{rot}\vec{A}$$

avec

$$2\vec{A}=\Phi \operatorname{grad}\varphi-\varphi \operatorname{grad}\Phi,$$

ce que l'on peut vérifier facilement ainsi que la condition que $\operatorname{div}\vec{A}=0$. On voit, donc, que le quaternion

$$Q=\left(v_1 v_2-\frac{p-p_1-p_2}{\varsigma}+U\right)-\vec{A}$$

est un quaternion monogène et que les propriétés connues d'un tel quaternion peuvent être utilisées dans l'analyse des mouvements trouvés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bilimović A. *Odstupanje neanalitičke kvaternion-funkcije od analitičnosti*, Gl. SAN, CCXXVIII, knj. 13, Beograd (1957)

[2] Pompeiu M. D. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. 33, (1912)

[3] Moisil Gr. C *Sur les quaternions monogènes*, Bul. Sc. Math. T. LV, Paris (1931)

[4] Misicu M. *Sur la détermination des vitesses dans le cas du mouvement dans l'espace d'un fluide incompressible*, IX Cong. Intern. de Méc. Ap. T. I, Bruxelles (1957)

[5]. Misicu M. *Über die Anwendung analytischen Funktionen auf dredimensionale Probleme der Mechanik verformbarer Körper*, Rev. Mec. Ap. T. I, N 2, Bukarest (1956)

[6] Voronjec K. *O kvaternionskom potencijalu prostornog strujanja*, Zb. Maš. fak. Beograd (1958)

[7] Voronjec K. *Primena monogenih kvaterniona u Mehanici fluida*, Gl. CCXLVII, Vol. 5, Sr. Ak. N. i Um. Beograd (1961)

[8] Bilimović A. *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analitique*, C. R. Ac. Sc. T. 237, Paris (1953)

[9] Bilimović A. *Applications en Hudrodynamique de la mesure de déflexion d'analiticité d'une fonction non analytique*, Bul. Ac. S. des S., T. X, N 2, Beograd (1956)

[10] Voronjec K. *Odstupanje brzinskog polja nekog strujanja od Laplace-ovog polja*, Zb. Maš. Inst. SAN, t. LX, knj. 8, Beograd (1959)

[11] Berker R. *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, B. $VIII_2$ (163)

[12] Brillouin M. *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, Pr. partie, Paris (1907)