PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21) 1967, p. 65–68

L'ÉLÉMENT MAXIMAL D'UNE MATRICE SPÉCIALE

B. Stanković — R. Tošić

(Communiqué le 16 mai 1966)

Le premier coauteur a posé comme problème l'élément maximal des matrices carrées dans un ensemble spécial [2]. Dans le même article il a donné aussi quelques résultats.

L'origine de ce problème est dans la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires [3] dans le corps des opérateurs de J. Mikusiński [1].

Dans cet article on a résolu complètement le problème posé mais pour une classe des matrices dont le rôle est important pour la théorie des équations différentielles opératoires.

On note par $\hat{R}$ l'ensemble des nombres réels positifs auxquels on ajoute zéro et un élément qu'on note par $-\infty$. L'opération d'addition est définie pour tous les éléments de $\hat{R}$ de manière que pour tout $r \in \hat{R}$ on a: $r+(-\infty)=(-\infty)+r=-\infty$. Avec la relation d'ordre $\leqslant$ l'ensemble $\hat{R}$ est totalement ordonné; $-\infty$ est par définition le plus petit élément.

Soit $\hat{R}$ muni encore d'une autre opération interne notée par $*$: $r_1 * r_2 = \operatorname{Max}(r_1, r_2)$.

Tous les deux opérations sont commutatives et associatives. En outre, la première opération est distributive par rapport à la deuxième:

$$r_3+(r_2 * r_1)=r_3+\operatorname{Max}(r_2,\ r_1)=\operatorname{Max}(r_3+r_2,\ r_3+r_1)=(r_3+r_2)*(r_3+r_1).$$

On peut aussi définir une opération avec les matrices carrées sur $\hat{R}$. Soient $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ deux matrices sur $\hat{R}$ du type (n,n), alors $(a_{i,j}) \oplus (b_{i,j}) = (c_{i,j})$, où $c_{i,j}=(a_{i,1}+b_{1,j})*(a_{i,2}+b_{2,j})*\cdots*(a_{in}+b_{n,j})$. Cette opération est associative. Dans la suite on note par $k(a_{i,j}) \equiv (a^k_{i,j}) \equiv (a_{i,j}) \oplus (a_{i,j}) \oplus \cdots \oplus (a_{i,j})$, la matrice $(a_{i,j})$ composée k fois.

Un élément $a_{p,q}$ est dit l'élément maximal de la matrice $(a_{i,j})$ si l'on a $a_{i,j} \leqslant a_{p,q}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$; on le note par max $e(a_{i,j})$.

Le problème qui se pose ici est de trouver une relation entre l'élément maximal de la matrice $k(a_{i,j})=(a^k_{i,j})$ et le facteur k. Nous avons donné la solution de ce problème pour les matrices de la forme:

$$(a_{i,j})=\begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \cdots -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \quad \cdots -\infty \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \quad \cdots \quad a_n \end{pmatrix}.$$

Dans cet article tous les matrices $(a_{i,j})$ sont seulement de cette forme.

Proposition 1. *Pour* $p=2, 3, \cdots, n$ *et* $r=1, 2, \cdots, n$, *on a* $a^{k+1}_{p-1,r}=a^k_{p,r}$, $k \in N$.

Ici on affirme que les lignes, après chaque composition, se déplacent pour une place en haut.

Démonstration. —

$$a^{k+1}_{p-1,r}=\operatorname*{Max}_{i\leqslant j\leqslant n}(a_{p-1,j}+a^k_{j,r})=a_{p-1,p}+a^k_{p,r}=a^k_{p,r},$$

car dans la ligne d'indice $p-1$ de la matrice $(a_{i,j})$ l'élément différent de $-\infty$ est dans la colonne d'indice p et il est égal à zéro.

Proposition 2. *Pour les éléments de la ligne dernière de la matrice* $(k+1)(a_{i,j})$ *on a*:

$$a^{k+1}_{n,p}=\operatorname{Max}(a^k_{n,p-1},\ a_p+a^k_{n,n}),\ \ 1\leqslant p\leqslant n,\ \ a^k_{n,0}=-\infty\ \forall\ k\in N.$$

Démonstration. —

$$a^{k+1}_{n,p}=\operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant n}(a^k_{n,j}+a_{j,p})=\operatorname{Max}(a^k_{n,p-1}+a_{p-1,p},\quad a^k_{n,n}+a_{n,p})=$$

$$=\operatorname{Max}(a^k_{n,p-1},\quad a_p+a^k_{n,n})$$

car $a_{i,p}=-\infty$, $i\neq p-1$ et $i\neq n$.

Proposition 3. *Supposons* $a_n\neq-\infty$, *alors* $a^k_{n,m}\leqslant a^{k+1}_{n,m}$ $k\in N$ *et* $m=1, 2, \cdots, n$.

Ici on affirme que les éléments ne décroissent pas avec la composition.

Démonstration. — D'après la proposition 2: $a^2_{n,m}=\operatorname{Max}(a_{m-1},\ \ a_m+a_n)$. On a aussi $a_m+a_n\geqslant a_m$ et par suite $a^2_{n,m}\geqslant a_m$. C'est notre inégalité pour $k=1$.

Supposons que $a^{k-1}_{n,m}\leqslant a^k_{n,m}$, $m=1, 2\cdots, n$. On sait que $a^k_{n,m}=\operatorname{Max}(a^{k-1}_{n,m-1},\ a_m+a^{k-1}_{n,n})$ et $a^{k+1}_{n,m}=\operatorname{Max}(a^k_{n,m-1},\ a_m+a^k_{n,n})$ D'après la supposition faite: $a^{k-1}_{n,m-1}\leqslant a^k_{n,m-1}$ et $a^{k-1}_{n,n}\leqslant a^k_{n,n}$. C'est pourquoi on a: $a^k_{n,m}\leqslant\operatorname{Max}(a^k_{n,m-1},\ a_m+a^k_{n,n})=a^{k-1}_{n,m}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1. *Si* $a_n\neq-\infty$, $a^k_{n,n}\neq-\infty\ \forall k\in N$.

Corollaire 2. *Si* $a_n\neq-\infty$, $a^i_{n,m}\leqslant a^k_{n,m}$, $i\leqslant k$ *et* $m=1, 2, \cdots, n$.

Proposition 4. *Soit* $a_m\geqslant a_r$, $r=1, 2, \cdots, n$ *et* $a_n\neq-\infty$, *alors* $a^k_{n,m}\geqslant a^k_{n,r}\ \forall k\in N$.

Démonstration. — Pour $k=1$ notre inégalité est vraie d'après la supposition. Supposons qu'elle est vraie aussi pour k fixe: $a^k_{n,m}\geqslant a^k_{n,r}$. D'après la proposition 2: $a^{k+1}_{n,r}=\operatorname{Max}(a^k_{n,r-1},\ a_r+a^k_{n,n})$. Nous allons montrer que $a^{k+1}_{n,m}$ n'est pas inférieur de tous les deux éléments qui définissent $a^{k+1}_{n,r}$.

D'après la proposition 2: $a^{k+1}_{n,m}=\operatorname{Max}(a^k_{n,m-1},\ \ a_m+a^k_{n,n})$. On a aussi $a_m+a^k_{n,n}\geqslant a_r+a^k_{n,n}$, $r=1, 2,\cdots, n$, et par suite $a^{k+1}_{n,m}\geqslant a_r+a^k_{n,n}$.

Nous allons maintenant utiliser la proposition 3: $a^{k+1}_{n,m}\geqslant a^k_{n,m}$ et par hypothèse on a $a^k_{n,r-1}\leqslant a^k_{n,m}$. Ces deux relations nous donnent $a^k_{n,r-1}\leqslant a^{k+1}_{n,m}$.

Proposition 5. *Supposons que* $a_n\neq-\infty$ *et que max e* $(a_{i,j})=a_m$, *alors max e* $k(a_{i,j})=a^k_{n,m}$, $\forall k\in N$.

Ici on affirme que l'élément maximal garde sa place.

Démonstration. — Soit $a^k_{m,p}$ un élément de la matrice $k(a_{i,j})$. Il se peut deux cas: $k-1+m<n$ et $k-1+m\geqslant n$. Dans le premier cas, d'après la proposition 1,

$$a^k_{m,p}=a_{m+k-1,p}=\left\{\begin{smallmatrix}0\\-\infty\end{smallmatrix}\right. \leqslant a^k_{n,m},\quad p=1,2,\cdots,n.$$

Dans le deuxième cas, d'après la même proposition, le corollaire 2 et la proposition 4, on a: $a^k_{m,p}=a^{k-(n-m)}_{n,p}\leqslant a^k_{n,p}\leqslant a^k_{n,m},\ p=1,\ 2,\cdots,\ n.$

Proposition 6. *Si* $a_n\neq-\infty$, *alors* $\max\ e\ k(a_{i,j})=\max\ e\ (a_{i,j})+$ $+a^{k-1}_{n,n},\ \forall k\in N.$

Démonstration. — Soit $\max\ e\ (a_{i,j})=a_m$. D'après la proposition 5 $\max$ $e\ k(a_{i,j})=a^k_{n,m}$ et la relation qui doit être démontrée devient: $a^k_{n,m}=a_m+a^{k-1}_{n,n}$.

Pour $k=2$. d'après la proposition 2 on a: $a^2_{n,m}=\mathrm{Max}\,(a_{m-1},\ a_m+a_n)=$ $=a_m+a_n$.

Supposons que notre relation est vraie pour $k=p-1$: $a^{p-1}_{n,m}=a_m+a^{p-2}_{n,n}$. Nous allons démontrer qu'elle est vraie aussi pour $k=p$. D'après la proposition 2: $a^p_{n,m}=\mathrm{Max}\,(a^{p-1}_{n,m-1},\ a_m+a^{p-1}_{n,n})$ et il nous ne reste que la démonstration de la relation $a_m+a^{p-1}_{n,n}\geqslant a^{p-1}_{n,m-1}$.

La proposition 3 nous donne: $a^{p-1}_{n,m-1}\leqslant a^p_{n,m-1}$ et il suffit de montrer que $a_m+a^{p-1}_{n,n}\geqslant a^p_{n,m-1}$.

On sait que: $a^p_{n,m-1}=\mathrm{Max}\,(a^{p-1}_{n,m-2},\ a_{m-1}+a^{p-1}_{n,n})$. D'après notre hypothèse que $a_m=\max\ e\ (a_{i,j})$, on a $a_{m-1}+a^{p-1}_{n,n}\leqslant a_m+a^{p-1}_{n,n}$. De même a_m+ $+a^{p-1}_{n,n}\geqslant a_m+a^{p-2}_{n,n}=a^{p-1}_{n,m}\geqslant a^{p-1}_{n,m-2}$. C'est pourquoi $a_m+a^{p-1}_{n,n}\geqslant a^p_{n,m-1}$.

Théorème. *Soit* $a_n\neq-\infty$ *et pour un* k *fixe* $\dfrac{a_{n-k}}{k+1}\geqslant\dfrac{a_{n-i}}{i+1},\ i=0,\ 1,\cdots,$ $n-1$, *alors*

$$\max\ e\ [m(k+1)+1](a_{i,j})=\max\ e\ (a_{i,j})+ma_{n-k},\quad m\in N.$$

Démonstration. — D'après la proposition 6:

$$\max\ e\ [m(k+1)+1](a_{i,j})=\max\ e\ (a_{i,j})+a^{m(k+1)}_{n,n}$$

et il suffit de montrer que:

$$a^{m(k+1)}_{n,n}=ma_{n-k} \tag{1}$$

Premièrement nous montrons la relation:

$$a^p_{n,n-i}\leqslant\frac{p+i}{k+1}a_{n-k},\qquad i=0,\ 1,\cdots,\ n-1. \tag{2}$$

Pour $p=1$ on a la supposition du théorème. Supposons que la relation (2) est vraie pour $p=m$: $a^m_{n,n-i}\leqslant\dfrac{m+i}{k+1}a_{n-k}$. On sait que $a^{m+1}_{n,n-i}=\mathrm{Max}\,(a^m_{n,n-i-1},$ $a_{n-i}+a^m_{n,n})\leqslant\mathrm{Max}\left(\dfrac{m+i+1}{k+1}a_{n-k},\ \dfrac{i+1}{k+1}a_{n-k}+\dfrac{m}{k+1}a_{n-k}\right)\leqslant\dfrac{m+i+1}{k+1}a_{n-k}.$

Maintenant nous montrons que

$$a^j_{n,n-k+j-1}=a_{n-k},\qquad j=1,\ 2,\cdots,\ k+1 \tag{3}$$

Pour $j=1$ c'est trivial. Supposons qu'elle est vraie aussi pour $j=p<k$: $a^p_{n,\,n-k+p-1}=a_{n-k}$, alors:

$$a^{p+1}_{n,\,n-k+p}=\mathrm{Max}\,(a^p_{n,\,n-k+p-1},\ a_{n-k+p}+a^p_{n,\,n})=\mathrm{Max}\,(a_{n-k},\ a_{n-k+p}+a^p_{n,\,n})=a_{n-k}$$

car d'après la relation (2): $a_{n-k+p}+a^p_{n,\,n}\leqslant\dfrac{k-p+1}{k+1}a_{n-k}+\dfrac{p}{k+1}a_{n-k}=a_{n-k}$.

Enfin, démontrons la relation (1). Pour $m=1$ la relation (1) est une conséquence de la relation (3) pour $j=k+1$.

Supposons que la relation (1) est vraie pour $m-1$: $a^{(m-1)(k+1)}_{n,\,n}=(m-1)\,a_{n-k}$. Montrons premièrement, qu'on a alors

$$a^{(m-1)(k+1)+j}_{n,\,n-k+j-1}=ma_{n-k},\quad j=1,\ 2,\cdots,\ k+1. \tag{4}$$

Pour $j=1$:

$$a^{(m-1)(k+1)+1}_{n,\,n-k}=\mathrm{Max}\,(a^{(m-1)(k+1)}_{n,\,n-k-1},\quad a_{n-k}+a^{(m-1)(k+1)}_{n,\,n})$$
$$=\mathrm{Max}\,(a^{(m-1)(k+1)}_{n,\,n-k-1},\quad ma_{n-k})=ma_{n-k}$$

car d'après (2)

$$a^{(m-1)(k+1)}_{n,\,n-k-1}\leqslant\frac{m\,(k+1)}{k+1}a_{n-k}=ma_{n-k}.$$

Supposons que la relation (4) est vraie pour $j=p\leqslant k$, alors

$$a^{(m-1)(k+1)+p+1}_{n,\,n-k+p}=\mathrm{Max}\,(a^{(m-1)(k+1)+p}_{n,\,n-k+p-1},\quad a_{n-k+p}+a^{(m-1)(k+1)+p}_{n,\,n})$$
$$=\mathrm{Max}\,(ma_{n-k},\quad a_{n-k+p}+a^{(m-1)(k+1)+p}_{n,\,n})=ma_{n-k}$$

parce que de la relation (2) on a:

$$a_{n-k+p}+a^{(m-1)(k+1)+p}_{n,\,n}\leqslant\frac{k-p+1}{k+1}a_{n-k}+\frac{(m-1)(k+1)+p}{k+1}a_{n-k}=ma_{n-k}.$$

Ainsi nous avons montré la relation (4). Pour $j=k+1$ elle nous donne $a^{m\,(k+1)}_{n,\,n}=ma_{n-k}$ et c'est la relation (1).

De la proposition 3 nous avons toujours supposé que $a_n\neq-\infty$. La proposition suivante diminue, dans un sens cette supposition.

PROPOSITION 7. *Soit* $a_k=-\infty$ *pour* $k>p$ *et* $a_k\neq-\infty$ *pour* $k=p$, *alors* $a^{n-p+1}_{n,\,n}=a_p\neq-\infty$.

Démonstration. — $a^{n-p+1}_{n,\,n}=\mathrm{Max}\,(a^{n-p}_{n,\,n-1},\ a_n+a^{n-p}_{n,\,n})=$

$$=a^{n-p}_{n,\,n-1}=\mathrm{Max}\,(a^{n-p-1}_{n,\,n-2},\ a_{n-1}=a^{n-p-1}_{n,\,n})=a^{n-p-1}_{n,\,n-2}=\cdots=a_{n,\,p}=a_p.$$

BIBLIOGRAPHE

[1] J. Mikusiński: *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. T. XI (1950), 41—70.

[2] B. Stanković: *L'élément maximal d'une matrice*, Publ. Inst. Math. Beograd, 6 (20) (1966), 23—24.

[3] B. Stanković: *L'équation différentielle vectorielle* Publ. Inst. Math. Beograd, 6 (20) (1966), 77—82.