PUBLICATIONS DE L' INSTITUT MATHEMATIQUE
Nauvelle série, tome 7 (21) 1967, p. 51–54

SUR LE MOUVEMENT IRROTATIONNEL DES FLUIDES PARFAITS CHARGES EN RELATIVITE GENERALE

Ilija Lukačević

(Communiqué le 16 février 1966)

Le but de ce travail est d'abord de donner pour un fluide parfait chargé conducteur d'électricité dans le cas de l'écoulement isentropique et de $\varepsilon\mu = 1$ (ε coefficient diélectrique, μ perméabilité magnétique) une définition du vecteur-tourbillon analogue à celle qui existe déjà pour un fluide de conductivité nulle. On montrera, à partir de cette définition, pour le mouvement irrotationnel du fluide considéré que le rapport $k = \gamma/\rho^*$ (γ densité de charge, ρ^* scalaire différant peu de la densité, voir [1]) reste constant le long des lignes de force champ magnétique.

On montrera enfin pour le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait chargé de conductivité nulle que k, toujours constant le long des lignes de courant [1], est constant dans toutes les directions d'espace au cas où la deuxième forme champ électromagnétique $F_{(2)}$ est différente de zéro. Il en résulte que cette condition est suffisante pour que le fluide considéré admette un vecteur-impulsion, tel qu'il a été défini par Lichnerowicz, et qui est le gradient d'une fonction scalaire.

* * *

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ d'un fluide parfait chargé relativiste est donné par l'expression:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, 4) \tag{1.1}$$

où ρ, p sont la densité et la pression du fluide, u_α le vecteur quadrivitesse ($u^\alpha u_\alpha = 1$, la vitesse de la lumière étant prise pour unité), $g_{\alpha\beta}$ le tenseur potentiel de gravitation, $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique. Pour $\varepsilon\mu = 1$ ce tenseur est symétrique et de la forme:

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} - F_{\alpha\gamma} F_{\beta\cdot}^{\ \gamma},$$

où $F_{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique champ électromagnétique.

Les équations de Maxwell pour un milieu chargé de conductivité non nulle (le ∇ désigne la dérivation covariante) sont:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \gamma u^\beta + \sigma e^\beta, \qquad \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.2}$$

où γ est la densité de charge électrique et σ la conductivité du fluide, e^β le vecteur champ électrique. Les vecteurs champ électrique e^β et champ magnétique h^β sont définis par:

$$e^\beta = F^{\gamma\beta} u_\gamma, \quad h^\beta = {}_*F^{\gamma\beta} u_\gamma, \tag{1.3}$$

où $*F^{\gamma\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\delta\gamma\beta}F_{\alpha\delta}$ est le tenseur associé de $F_{\gamma\beta}$, et $\varepsilon^{\alpha\delta\gamma\beta}$ le tenseur antisymétrique de Ricci.

Des conditions de conservation:

$$(1.4)\qquad \nabla_\alpha T^\alpha_\beta=0$$

on obtient, à l'aide des équations de Maxwell, les équations différentielles du mouvement du fluide:

$$(1.4')\qquad (\rho+p)\,u^\alpha\nabla_\alpha u_\beta+u_\beta\nabla_\alpha[(\rho+p)\,u^\alpha]-\partial_\beta p+F_{\alpha\beta}(\gamma\,u^\alpha+\sigma\,e^\alpha)=0.$$

La multiplication contractée de ces équations par u^β nous donne:

$$(1.5)\qquad \nabla_\alpha[(\rho+p)\,u^\alpha]-u^\alpha\,\partial_\alpha p-\sigma\,e_\beta\,e^\beta=0.$$

* * *

La pseudo-vitesse: $C_\alpha=fu_\alpha$, définie au moyen de la fonction-indice (voir [1]):

$$f=\exp\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho+p},$$

et son rotationnel: $\Omega_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha C_\beta-\nabla_\beta C_\alpha$, permettent de mettre les équations (1.4'), en usant de (1.5), sous la forme:

$$(2.1)\qquad u^\alpha(\Omega_{\alpha\beta}+kF_{\alpha\beta})-\frac{\sigma f}{\rho+p}(F_{\beta\alpha}\,e^\alpha-e_\alpha\,e^\alpha\,u_\beta)=0,$$

où on a posé: $k=\frac{\gamma}{\rho^*}=\frac{\gamma f}{\rho+p}$.

Pour $\sigma=0$ ces équations se réduisent à celles des fluides parfaits chargés de conductivité nulle.

Avant de définir le vecteur-tourbillon nous introduirons le vecteur:

$$V_\beta=\frac{\sigma}{\rho+p}F_{\alpha\beta}e^\alpha.$$

Le système (2.1) aura alors la forme:

$$(2.1')\qquad u^\alpha(\Omega_{\alpha\beta}+kF_{\alpha\beta}+C_\alpha V_\beta-C_\beta V_\alpha)=0$$

c'est-à-dire:

$$(2.1'')\qquad u_\alpha\,\Phi_{\alpha\beta}=0.$$

Le $\Phi_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur antisymétrique entre les parenthèses.

Etant antisymétrique d'ordre 4, la matrice $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ du système d'équations linéaires homogènes par rapport à u^α ne peut avoir pour rang que 0 ou 2. Au cas où le rang est 2 le système (2.1'') admet comme solution un espace vectoriel tangent de dimension 2 en chaque point de l'espace-temps.

Nous définirons le vecteur-tourbillon du fluide considéré par:

$$(2.2)\qquad \psi_\alpha=*\Phi^{\alpha\beta}\,u_\beta.$$

Ce vecteur, évidemment orthogonal à la vitesse u_α, donc vecteur d'espace, satisfait au système (2.1″). La substitution nous donne:

$$\psi^\alpha \Phi_{\alpha\beta} = u_\gamma {}^*\Phi^{\alpha\gamma} \Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\Phi_{01} \Phi_{23} + \Phi_{02} \Phi_{31} + \Phi_{03} \Phi_{12}) \delta^\gamma_\beta u_\gamma =$$

$$= \frac{1}{4} \Phi_{\alpha\gamma} {}^*\Phi^{\alpha\gamma} u_\beta = \frac{1}{2} \Phi_{(2)} u_\beta .$$

D'autre part le déterminant de la matrice $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ étant par définition:

$$\sqrt{|\Phi_{\alpha\beta}|} = -\sqrt{|g|}\, \Phi_{(2)}$$

il résulte de l'homogénéité de (2.1″) que la forme $\Phi_{(2)}$ doit être nulle. Le vecteur-tourbillon, s'il est différent de zéro, peut donc toujours être considéré comme une des solutions indépendantes du système (2.1″). Sa définition est analogue à celle que donne Lichnerowicz [1] pour un fluide chargé de conductivité nulle ou à celle que donne Taub pour un fluide non chargé dont l'écoulement n'est pas isentropique [3]. Quand on exprime ce vecteur au moyen des composantes de ${}^*\Phi^{\alpha\beta}$ on obtient:

$$(2.2') \quad {}^*\Phi^{\alpha\beta} u_\beta = {}^*\Omega^{\alpha\beta} u_\beta + k {}^*F^{\alpha\beta} u_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (C_\gamma V_\delta - C_\delta V_\gamma) u_\beta = {}^*(\Omega^{\alpha\beta} + kF^{\alpha\beta}) u_\beta .$$

Le cas où ce vecteur est nul sera considéré comme celui où le mouvement du fluide est irrotationnel. On aura alors:

$$\psi^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \Phi_{\gamma\delta} = 0,$$

c'est-à-dire:

$$u_\beta \Phi_{\gamma\delta} + u_\gamma \Phi_{\delta\beta} + u_\delta \Phi_{\beta\gamma} = 0 .$$

Si nous multiplions ces quatre relations par u^δ les deux premiers termes des relations obtenues seront égaux à zéro par suite des équations du mouvement. De $u^\delta u_\delta = 1$ il résultera que pour le cas irrotationnel:

$$(2.3) \quad \Phi_{\beta\gamma} = 0 .$$

* * *

Considérons le mouvement irrotationnel du fluide. Par suite de la nullité du tenseur $\Phi_{\alpha\beta}$ nous pouvons poser:

$$(3.1) \quad \nabla_\alpha \Phi_{\beta\gamma} + \nabla_\beta \Phi_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma \Phi_{\alpha\beta} = 0,$$

ce qui est équivalent à:

$$(3.1') \quad \nabla_\beta {}^*\Phi^{\beta\gamma} = 0 .$$

Si nous désignons par: $V_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha V_\beta - \nabla_\beta V_\alpha$, en tenant compte des équations de Maxwell (1.2) et de la définition de $\Omega_{\alpha\beta}$ les équations (3.1′) se réduiront à:

$$(3.1'') \quad \partial_\beta k {}^*F^{\beta\alpha} + {}^*\Omega^{\beta\alpha} V_\beta - {}^*V^{\beta\alpha} C_\beta = 0 .$$

La multiplication par u_α des relations (3.1″) nous donnera:

$$h^\beta \partial_\beta k + {}^*\Omega^{\beta\alpha} V_\beta u_\alpha = 0,$$

où h^β désigne, d'après (1.3), le vecteur champ magnétique. Si on tient compte du fait que:

$$*F^{\beta\alpha} V_\beta u_\alpha = \frac{\sigma}{\rho+p} e^\gamma F_{\gamma\beta} *F^{\beta\alpha} u_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\rho+p} F_{(2)} \delta^\alpha_\gamma e^\gamma u_\alpha = 0,$$

on pourra écrire:

$$h^\beta \partial_\beta k + (*\Omega^{\beta\alpha} u_\alpha + k*F^{\beta\alpha} u_\alpha) V_\beta = 0.$$

L'expression entre les parenthèses est précisement le vecteur-tourbillon (2.2'), et par conséquence égale à zéro. Nous aurons donc:

$$h^\beta \partial_\beta k = 0.$$

D'où:

Dans le cas du mouvement irrotationnel d'un fluide parfait chargé de conductivité non nulle le rapport γ/ρ^* reste constant le long des lignes de force champ magnétique.

Pour un fluide parfait chargé de conductivité nulle, les équations (3.1″) se réduisent à:

$$*F^{\alpha\beta} \partial_\beta k = 0. \tag{3.2}$$

Il a été démontré que la fonction k est constante le long des lignes de courant pour tout mouvement du fluide [1]. La multiplication de (3.2) par u_α nous montre que k est constante aussi le long des lignes de force champ magnétique dans le cas irrotationnel. D'autre part (3.2) est un système homogène d'équations linéaires en $\partial_\beta k$ et il en résulte que k est une constante absolue dans l'espace-temps, sauf si le déterminant $|*F^{\beta\alpha}|$ est nul, c'est-à-dire si son rang est 2 (nous écarterons le cas trivial $*F^{\alpha\beta}=0$). Dans ce dernier cas le gradient de k peut être différent de zéro, mais il est nécessairement localement orthogonal aux vecteurs u^α et h^α. La nullité du déterminant $|*F_{\alpha\beta}|$ étant équivalente à celle de $F_{(2)}$ il résulte que c'est le cas où les vecteurs champ magnétique et champ électrique sont localement orthogonaux.

$F_{\alpha\beta}$ étant le rotationnel d'un potentiel-vecteur φ_α, l'expression $\Omega_{\alpha\beta}+kF_{\alpha\beta}$ est au cas où k est constant le rotationnel d'un vecteur-impulsion $I_\beta = C_\beta + k\varphi_\beta$ (voir [1]) qui est le gradient d'une fonction pour un mouvement irrotationnel. D'où:

Dans le cas du mouvement irrotationnel d'un fluide parfait chargé de conductivité nulle la non-orthogonalité locale des vecteurs champ électrique e^α et champ magnétique h^α est la condition suffisante pour que γ/ρ^* soit une constante dans l'espace-temps, et, en conséquence, pour qu'il existe un vecteur-impulsion, gradient d'une fonction scalaire. Au cas où cette condition n'est pas satisfaite, γ/ρ^* peut n'être pas constant, mais son gradient est nécessairement orthogonal aux lignes de courant ainsi qu'aux lignes de force champ magnétique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Lichnerowicz: *Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson 1955.

[2] Y. Fourès-Bruhat: *Les théories relativistes de la gravitation* (colloque), p. 157-163, C.N.R.S. 1962. et Bull. Soc. Math., p. 155-175, t. 86 (1958).

[3] A. H. Taub: *Relativistic Fluid Mechanics and Magnetohydrodynamics* (symposium), p. 21-28, Academic Press, 1963. and Arch. Rat. Mech. Anal. 3 (1959).