PUBLICATIONS DE L' INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21) 1967, p. 35–46

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS NON ANALYTIQUES DANS LE MOUVEMENT PLAN D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE.

Konstantin Voronjec et Mane Šašić

(Communiqué le 3 novembre 1965.)

1. Les problèmes de mouvement plan d'un fluide incompressible se réduisent à l'étude de trois équations. La première c'est l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

qui ne dépend pas de la viscosité et où v_x et v_y sont les projections de la vitesse $\vec{v}$ sur les axes de coordonnées x et y. Les deux autres équations sont celles de Navier — Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) &= 2\,\omega\, v_y - \nu \frac{\partial\, 2\,\omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) &= -2\,\omega\, v_x + \nu \frac{\partial\, 2\,\omega}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2}$$

qui correspodent à un mouvement permanent et à des forces conservatives ($\vec{F} = \operatorname{grad} U$). Par ν, p, ρ et $2\,\omega$ sont désignés le coefficient cinématique de la viscosité, la pression, et le tourbillon

$$2\,\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Dans le cas d'un fluide parfait le coefficient ν est égal à 0 et les équations (2) se transforment en celles d'Euler.

Le plus grand nombre de solutions est obtenu dans le cas de mouvement irrotationnel car dans ce cas les équations (2) sont automatiquement satisfaites par la valeur de pression convenablement choisie. En désignant par φ le potentiel de vitesses et par ψ la fonction de courant, on obtient les relations

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

qui montrent que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. Il s'ensuit, donc, que l'on peut introduire le potentiel complexe

$$w=\varphi(x, y)+i\,\psi(x, y)$$

qui présente une fonction analytique de variable complexe $z=x+iy$.

2. Dans le cas général le tourbillon 2ω n'est plus égal à 0 et les équations (2) ne sont pas satisfaites automatiquement. Ces équations devant être compatibles, on obtient la condition de compatibilité sous la forme

$$v_x \frac{\partial 2\omega}{\partial x}+v_y \frac{\partial 2\omega}{\partial y}=\nu \Delta 2\omega. \tag{3}$$

Si le fluide est parfait cette équation devient

$$(\vec{v} \text{ grad } 2\omega)=0$$

et montre que le gradient de tourbillon est orthogonal à la vitesse. Il s'ensuit, donc, que 2ω est une fonction de ψ, c'est-à-dire que l'intensité de tourbillon reste constante sur les lignes de courant.

Tenant compte de relation $2\omega=-\Delta\psi$ l'équation (3) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}+\nu \Delta \Delta \psi=0 \tag{4}$$

ou, dans le cas d'un fluide parfait, sous la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}=0. \tag{4'}$$

Il faut, donc, déterminer une fonction ψ solution de l'équation (4) ou (4′). Puisque le problème est très difficile il n'est pas sans intérêt de trouver quelques solutions particulières correspondantes à des propriétés de fonction ψ supposées d'avance. Ceci se rapporte surtout à l'équation (4) car on sait que dans le cas d'un fluide visqueux le mouvement ne peut se produire avec un potentiel de vitesses. Quelques formes spéciales de fonction ψ, satisfaisant à l'équation (4) sont bien connues. Nous rappelons ici quelques classes de ces solutions.

Laissant à part les mouvements classique, où les lignes de courant sont des droites parallèles ou des cercles concentriques, on obtient un groupe des solutions des équations de Navier-Stokes par la méthode de Hamel(1). Hamel introduit les coordonnées curvilignes ξ et η à la place de x et de y en supposant qu'elles forment un réseau isométrique. La fonction $\zeta=\xi(x, y)+i\,\eta(x, y)$ est alors une fonction analytique de variable complexe $z=x+iy$. Si l'on fait le changement de variables dans l'équation (4) on peut obtenir des solutions particulières en supposant, par exemple, que la fonction ψ ne dépend que de ξ ou de η. Il est évident que les lignes de courant d'un tel mouvement coincident avec celles d'un mouvement irrotationnel, mais le tourbillon n'est plus égal à 0 dans le cas général. Dans le problème de Hamel les lignes de courant sont des spirales logarithmiques qui peuvent dégénerer en lignes droites et en cercles.

Oseen(2) a généralisé les résultats de Hamel en supposant que

$$\psi=f(\xi)+C\,\eta$$

où C est une constante. La fonction $\eta(x, y)$ étant harmonique il suffit d'associer au mouvement de Hamel un mouvement irrotationel correspondant à des spirales logarithmiques orthogonales aux premières.

Rosenblatt[3] a considéré un mouvement encore plus général où

$$\psi = f(\xi) + \eta^m f_1(\xi)$$

avec m positif et Berker[4] a obtenu la solution dans le cas où

$$\psi = f(\xi) + f_2(\eta).$$

Il existe des solutions qui ne sont pas liées à la méthode de Hamel. Par exemple, on constate facilement que la condition de compatibilité est satisfaite par la valeur constante de tourbillon;

$$2\omega = -\Delta\psi = C^{te}.$$

Jeffery[5] a généralisé cette classe de mouvements en supposant que le tourbillon reste constant sur une courbe isométrique:

$$\Delta\psi = f(\xi).$$

Il a résolu le problème et a montré que les courbes isométriques ne peuvent être autres que les lignes droites et les cercles.

On peut chercher la solution de l'équation (4) sous la forme

$$\psi = f_1(x)\, y + f_2(x).$$

Une de telles solutions appartient à Riabouchinsky[6]. On trouve dans le mémoire de Berker[7] plusieurs solutions exactes des équations de Navier--Stokes ainsi que les méthodes employées pour les obtenir.

Dans ce qui suit est développée aussi une méthode permettant d'obtenir des solutions de l'équation de compatibilité. Cette méthode est basée sur l'application des fonctions non analytiques des variables complexes.

3. La fonction de courant ψ peut être considérée comme une fonction des variables complexes $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. Il va sans dire que cette fonction doit satisfaire à toutes les conditions bien connues permettant les opérations de différentiation et d'intégration. On constate facilement que

$$2i\,\frac{\partial\psi}{\partial z} = v_x - iv_y = \bar{v}$$

et que la vitesse complexe $\bar{v}$ est aussi, dans le cas de mouvemente rotationnel, une fonction de z et de $\bar{z}$. Une transformation élémentaire transforme l'équation de compatibilité (4) à des variables indépendantes nouvelles z et $\bar{z}$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial z\,\partial\bar{z}^2} - \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\,\partial\bar{z}} + 2i\nu\,\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\,\partial\bar{z}^2} = 0. \tag{5}$$

Le dernier terme disparait dans le cas d'un fluide parfait.

On cherche, dans ce qui suit, les solutions particulières de l'équation (5) en utilisant la théorie de A. Bilimovitch[8] sur la déflexion d'analyticité d'une fonction non analytique. Dans les travaux de Fempl[9] on trouvera l'étude des déflexions de l'ordre supérieur à un.

La fonction

$$w=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$$

est une fonction analytique de variable complexe $z=x+iy$ si les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

sont accomplies. Si ces conditions ne sont pas satisfaites la fonction w n'est plus analytique et, d'après A. Bilimovitch, le vecteur

$$\vec{B}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\vec{j}$$

peut être considéré comme mesure de déflexion d'analyticité de cette fonction. Le vecteur $\vec{B}$ peut être remplacé par la fonction complexe

$$B=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

L'analyse, très intéressante, effectuée par A. Bilimovitch, de propriétés de vecteur $\vec{B}$ et de ses diverses applications n'est pas l'objet de ce travail. Notons seulement que dans le cas général la fonction B n'est pas non plus analytique. On peut, donc, analyser la déflexion de cette fonction de l'analyticité et former une nouvelle fonction B_1 par le même procédé. Ce procédé peut être renouvelé et amène alors à la fonction B_2 ect. On arrive ainsi à des déflexion d'un ordre supérieur à un ou deux. Il peut arriver que la déflexion d'un ordre quelconque $N(B_N)$ présente une fonction analytique. Alors, la déflexion de l'ordre $N+1$ est égale à 0.

Désignons par B_0 la fonction

$$B_0=2\frac{\partial\psi}{\partial z}=-i(v_x-iv_y)$$

et considérons la déflexion de cette fonction non analytique de l'analyticité. Il est évident que B_0 ne peut pas être égal à 0 car autrement la fluide serait en repos. La déflexion B_1 de l'analyticité de fonction B_0 est égale à

$$B_1=2\frac{\partial B_0}{\partial \bar{z}}=-2\omega-i\operatorname{div}\vec{v}$$

et l'on voit que B_1 n'est pas égal à 0 que dans le cas de mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible. La vitesse complexe est alors une fonction analytique et la condition de compatibilité est automatiquement satisfaite.

La déflexion de second ordre B_2 est déterminée, pour le fluide incompressible, par la formule

$$B_2=2\frac{\partial B_1}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial 2\omega}{\partial x}+i\frac{\partial 2\omega}{\partial y}.$$

La condition $B_2=0$ nous amène à l'équation

$$2\omega=-\Delta\psi=k=\text{const.}$$

La compatiblité des équations de mouvement est assurée dans ce cas et la solution du problème peut être mise à la forme

$$\psi = \psi_1(x,\ y) + \frac{1}{2}\, k_1 x^2$$

ou

$$\psi = \psi_2(x,\ y) + \frac{1}{4}\, k_2 (x^2 + y^2)$$

où $\psi_1(x,\ y)$ et $\psi_2(x,\ y)$ sont des fonctions harmoniques et k_1 et k_2 des constantes arbitraires. Le mouvement fluide correspond à deux mouvement dont le premier est irrotationnel arbitraire et l'autre se rapporte au cas où les lignes de courant sont des droites parallèles ou des cercles concentriques. Les projections v_x et v_y de la vitesse sont aussi des fonctions harmoniques, mais telles que v_x et $v_y + k_1 x$ sont conjugués.

La condition que la déflexion de troisième ordre soit égale à 0 conduit à l'équation

$$B_3 = 2\,\frac{\partial B_2}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial y^2}\right) - 2\,i\,\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x \partial y} = 0$$

qui donne

$$\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Il s'ensuit de la première équation que $\Delta\psi$ présente la somme de deux fonctions: une qui ne dépend que de x et l'autre de y seulement. La seconde équation détermine ensuite ces deux fonctions comme des polynomes de deuxième degré. On obtient ainsi

$$\Delta\psi = a_1 (x^2 + y^2 + a_2 x + a_3 y + a_4) \tag{6}$$

où par $a_i (i = 1, \ldots, 4)$ sont désignées les constantes arbitraires. Après avoir introduit les coordonnées polaires r et θ et choisi convenablement l'origine de ces coordonnées on amène la formule (6) à l'équation

$$\Delta\psi = a_1 r^2 + a_5.$$

Donc, le tourbillon ne dépend que de r.

On pourrait trouver la fonction ψ par l'intégration ce qui nécessite l'introduction des fonctions et des constantes arbitraires, qui peuvent être déterminées de telle façon que l'équation de compatibilité soit satisfaite. Ce calcul est effectué plus tard dans le problème général où l'ordre de la déflexion est arbitraire.

4. Posons le problème général suivant. Trouver une fonction $\psi(z,\ \bar{z})$ qui satisfait à ces trois conditions:

a) la déflexion de l'analyticité de l'ordre N de $\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$ doit être égale à 0,

b) l'équation de compatibilité doit être satisfaite,

c) la fonction ψ doit être réelle.

La première condition se traduit par l'équation

$$\frac{\partial^{N+1}\psi}{\partial z\, \partial \bar{z}^N} = 0,$$

qui montre que les dérivées de la fonction ψ peuvent être exprimées par les formules

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial z} &= \sum_{n=1}^{N} \bar{z}^{n-1} a'_{n-1}(z), \\
\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\, \bar{z}^{n-2} a_{n-1}(z) + b'_0(\bar{z}), \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial \bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\, \bar{z}^{n-1} a'_{n-1}(z), \\
\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2\, \partial \bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\, \bar{z}^{n-2} a''_{n-1}(z), \\
\frac{\partial^3 \psi}{\partial z\, \partial \bar{z}^2} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\, \bar{z}^{n-3} a'_{n-1}(z), \\
\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\, \bar{z}^{n-3} a''_{n-1}(z),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

valables pour $N > 2$. Par $a_{n-1}(n = 1, 2, \ldots, N)$ sont désignées les fonctions quelconques de z et par a'_{n-1} et a''_{n-1} les dérivées de ces fonctions; $b'_0(\bar{z})$ est la dérivée de $b_0(\bar{z})$ par rapport à $\bar{z}$. Le problème consiste justement en détermination de ces fonctions.

La seconde condition demande que l'équation (5) soit satisfaite par les expressions (7), ce qui amène à l'équation

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \bar{z}^{n-1} a'_{n-1} \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\, \bar{z}^{n-3} a'_{n-1}(z) - \\
&-\left[\sum_{n=1}^{N} (n-1)\, \bar{z}^{n-2} a_{n-1} + b'_0\right] \sum_{n=1}^{N} (n-1)\, \bar{z}^{n-2} a''_{n-1} + \\
&+ 2 i \nu \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\, \bar{z}^{n-3} a''_{n-1} = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Enfin, la troisième condition dit que la fonction $\psi(z, \bar{z})$ doit être égale à sa valeur conjuguée, désignée par $\bar{\psi}(\bar{z}, z)$.

Les mêmes propriétés doivent avoir les fonctions $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ et $\dfrac{\partial^4 \psi}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2}$. La valeur conjuguée de $\dfrac{\partial \psi}{\partial z}$ doit être égale à $\dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$ ce qui se rapporte aussi aux fonctions $\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial z\, \partial \bar{z}^2}$ et $\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial z^2\, \partial \bar{z}}$. Il s'ensuit automatiquement que toutes les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ sons des polynomes de l'ordre $N-1$, mais que les fonctions $a_0(z)$ et $b_0(\bar{z})$ restent encore tout-à-fait arbitraires.

L'équation (8) résolue par rapport à $b'_0(\bar{z})$ montre que cette fonction s'exprime par un polynome de degré $2N-4$ divisé par un autre polynome de degré $N-2$. Les coefficients de ces polynomes sont fonctions de z. Tenant compte du fait que le résultat doit être indépendant de z on peut effectuer partiellement la division et obtenir

$$(9) \qquad b_0'(\bar{z}) = \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} A_{n-1} + \frac{\sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} D_{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a_{n-1}''}.$$

Le polynome obtenu et de degré $N-2$ et les coefficients A_{n-1} $(n=2, 3, \ldots, N)$ doivent être constants. La fonction $a_0(z)$ n'intervient pas dans ce polynome ainsi que les termes dépendant de la viscosité. Les coefficients D_{n-1} sont des fonctions de z, mais telles que z disparait après la division de numérateur et de dénominateur par un même facteur.

Pour vérifier les résultats comparons, par exemple, les coefficients de z puissance $2N-4$ dans (8) et (9). On obtient l'équation

$$(N-1)(N-2)\, a_{N-1}'^{2} - (N-1)^2 a_{N-1} a_{N-1}'' = (N-1)^2 A_{N-1} a_{N-1}'',$$

qui, après l'intégration, donne

$$(N-1)(N-2)(A_{N-1} + a_{N-1}) = C_1 (z-z_0)^{N-1},$$

avec C_1 et z_0 deux constantes arbitraires d'intégration. La comparaison des coefficients de $\bar{z}$ puissance $2N-5$ donne l'équation

$$2(N-2)\, a_{N-1}' a_{N-2}' = (N-1)[(a_{N-2} + A_{N-2}) a_{N-1}'' + (a_{N-1} + (a_{N-1} + A_{N-1}) a_{N-1}''] \; .$$

d'où l'on tire

$$(N-1)(N-2)(A_{N-2} + a_{N-2}) = C_2 (z-z_0)^{N-1} + C (z-z_0)^{N-2}.$$

La constante d'intégration C_2 est arbitraire, mais la constante C doit être égale à 0, car a_{N-2}'' est proportionnel à a_{N-1}''. C'est pour $N=3$ seulement que C ne doit pas être égal à 0.

Il s'ensuit, donc, que tous les polynomes a_{n-1}'' $(n=2, \ldots, N)$ sont proportionnels à $z-\bar{z}_0$ puissance $N-3$ et l'on peut poser

$$(10) \qquad a_{n-1}'' = k_{n-1}(z-z_0)^{N-3} \quad (n=2, 3, \ldots, N)$$

où k_{n-1} sont des constantes.

5. Avec les valeurs (10) la dernière équation de système (7) devient

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = (z-z_0)^{N-3} \sum_{n=3}^{N} (n-1)(n-2) k_{n-1} \bar{z}^{n-3}.$$

Supposons que la somme dans cette expression est développée en série suivant les puissances de $(\bar{z}-\bar{z}_0)$. Le résultat, multiplié par $z-z_0$ puissance $N-3$, doit rester le même quand on remplace i par $-i$. Il s'ensuit que

$$(11) \qquad \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = C' (z-z_0)^{N-3} (\bar{z}-\bar{z}_0)^{N-3}$$

avec C' constante réelle. Tous les coefficients k_{n-1} sont ainsi déterminés pour $n=3, 4, \ldots, N$, mais le coefficient k_1 (pour $n=2$) reste indéterminé.

Puisqu'on a

$$k_{n-1}=C'\,\frac{(N-3)!\,(-z_0)^{N-n}}{(n-1)!\,(N-n)!} \qquad (n=3, 4, \ldots, N)$$

on peut toujours poser

$$k_1=\frac{C'}{N-2}\,(-z_0)^{N-2}+k_0$$

et obtenir, par une substitution directe, les expressions suivantes pour les dérivées de troisième ordre de ψ:

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\,\partial \bar z}&=\frac{C'}{N-2}\,(z-z_0)^{N-3}\,(\bar z-\bar z_0)^{N-2}+k_0\,(z-z_0)^{N-3}, \\ \frac{\partial^3\psi}{\partial z\,\partial \bar z^2}&=\frac{C'}{N-2}\,(z-z_0)^{N-2}\,(\bar z-\bar z_0)^{N-3}+\bar k_0\,(\bar z-\bar z_0)^{N-3}. \end{aligned}$$

On arrive ensuite par l'intégration à l'expression pour le tourbillon. Puisque le résultat ne peut pas se changer quand on remplace i par $-i$, on est amené à la formule suivante

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial \bar z}=\frac{C'}{(N-2)^2}\,(z-z_0)^{N-2}\,(\bar z-\bar z_0)^{N-2}+\frac{1}{N-2}\,[k_0\,(z-z_0)^{N-2}+ \\ +\bar k_0\,(\bar z-\bar z_0)^{N-2}]+C_1'$$

où C_1' est une nouvelle constante réelle. Enfin, on obtient les dérivées premières de fonction ψ par une nouvelle intégration:

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial z}&=\frac{C'}{(N-1)(N-2)^2}\,(z-z_0)^{N-2}\,(\bar z-\bar z_0)^{N-1}+\frac{k_0}{N-2}\,(z-z_0)^{N-2}\,(\bar z-\bar z_0)+ \\ &\quad+\frac{\bar k_0}{(N-1)\,(N-2)}\,(\bar z-\bar z_0)^{N-1}+C_1'\,(\bar z-\bar z_0)+a_0'\,(z) \\ \frac{\partial\psi}{\partial \bar z}&=\frac{C'}{(N-1)\,(N-2)^2}\,(z-z_0)^{N-1}\,(\bar z-\bar z_0)^{N-2}+\frac{\bar k_0}{N-2}\,(z-z_0)\,(\bar z-\bar z_0)^{N-2}+ \\ &\quad+\frac{k_0}{(N-1)\,(N-2)}\,(z-z_0)^{N-1}+C_1'\,(z-z_0)+b_0'\,(\bar z). \end{aligned}$$

Il faut porter les valeurs obtenues des dérivées dans l'équation de compatibilité et essayer de satisfaire à cette équation par un choix convenable des fonctions $a_0(z)$ et $b_0(\bar z)$ et des constantes introduites. Il est facile à voir que la constante k_0 est nécessairement égale à 0, après quoi l'équation de compatibilité se réduit à

$$(z-z_0)\,a_0'(z)+i\,(N-2)\,\nu=(\bar z-\bar z_0)\,b_0'\,(\bar z)-i\,(N-2)\,\nu.$$

En désignant par K une constante arbitraire on obtient sans difficulté que

$$a_0'(z) = \frac{K - i(N-2)\nu}{z - z_0}, \quad b_0'(\bar{z}) = \frac{K + i(N-2)\nu}{\bar{z} - \bar{z}_0}$$

et ensuite que

$$a_0(z) = [K - i(N-2)\nu] \ln(z - z_0)$$

$$b_0(\bar{z}) = [K + i(N-2)\nu] \ln(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Les constantes d'intégration ne sont pas introduites.

Après avoir intégré les équations (14) qui, pour $k_0 = 0$, prennent la forme

$$(14') \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{C'}{(N-1)(N-2)^2} (z-z_0)^{N-2} (\bar{z}-\bar{z}_0)^{N-1} + C_1'(\bar{z}-\bar{z}_0) + a_0'(z) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} &= \frac{C'}{(N-1)(N-2)^2} (z-z_0)^{N-1} (\bar{z}-\bar{z}_0)^{N-2} + C_1'(z-z_0) + b_0'(\bar{z}) \end{aligned}$$

on obtient l'expression suivante pour la fonction de courant ψ:

$$(15) \quad \begin{aligned} \psi = {} & \frac{C'}{(N-1)^2(N-2)^2} (z-z_0)^{N-1} (\bar{z}-\bar{z}_0)^{N-1} + C_1'(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) + \\ & + K' \ln(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) - i(N-2)\nu \ln \frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}, \end{aligned}$$

où la constante K est remplacée par sa partie réelle puisque la fonction ψ est réelle. L'expression (15) satisfait à toutes les conditions posées.

6. En posant l'origine de coordonnées dans le point z_0 et en introduisant les coordonnées polaires r et θ, on obtient la fonction ψ et les projections de la vitesse sous la forme

$$(15') \quad \psi = \frac{C'}{(N-1)^2(N-2)^2} r^{2N-2} + C_1' r^2 + 2K' \ln r + 2(N-2)\nu\theta$$

$$(16) \quad \begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2(N-2)\frac{\nu}{r} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{2C'}{(N-1)(N-2)^2} r^{2N-3} - 2C_1' r - \frac{2K'}{r}. \end{aligned}$$

La classe des mouvements définie par (15') a trouvé Jeffery[5] dans son mémoire déjà cité*) en partant de condition que le tourbillon est une fonction de r seulement. Cette condition est, donc, équivalente à celle où est supposé que la déflexion de l'ordre N de la vitesse complexe soit égale à 0. Les deux hypothèses amènent à l'expression de tourbillon où celui est proportionnel à une puissance de rayon r. L'uniformité de la pression demande ordinairement que la constante C_1' sois égale à 0.

Dans la méthode appliquée dans ce travail la constante N n'est plus un nombre abstrait, mais obtient un certain sens physique, lié à la déflexion de

*) Voir aussi R. Berker[7] p. 41

l'analyticité de la vitesse complexe. On peut, donc, comparer des divers mouvements plus ou moins éloignés de mouvement irrotationnel correspondant.

Les lignes de courant de mouvement obtenu sont des spirales. La constante K' étant arbitraire, on peut attacher au mouvement rotationnel étudié un tourbillon à une circulation constante quelconque, même égale à 0. Mais l'intensité de la source est proportionnelle à $N-2$ et n'est jamais égale à 0 pour le fluide visqueux ($N>2$). Elle croît avec l'ordre de la déflexion N. Quand r croît et tend vers l'infini la vitesse v_r diminue et tend vers 0, mais la vitesse v_θ tend vers l'infini avec r. Pour les valeurs des constantes convenablement choisies on peut obtenir un cercle sur lequel la vitesse v_θ est égale à 0. Aux points de ce cercle appartient, donc, la vitesse dirigée vers le centre ou inversement.

Les formules obtenues correspondent au cas où l'ordre de la déflexion N est un nombre entier, positif et plus grand que 2, car pour $N=0$ le fluide est en repos, pour $N=1$ le mouvement est irrotationnel et pour $N=2$ le tourbillon est constant dans tous le domaine fluide. D'autre part, la condition que la la déflexion de l'ordre N de l'analyticité de la vitesse complexe soit nulle sert seulement à comparer des divers mouvements et à indiquer le chemin permettant de résoudre l'équation de compatibilité. Si l'on laisse de côté cette condition, cessent d'être nécessaires les restrictions rélatives à N. Il est facile à voir que les formules obtenues restent valables pour toutes les valeurs réelles de N. Les valeurs plus petites que 3/2 sont surtout intéressantes car dans ce cas la vitesse diminue avec r croissant et tend vers 0 à l'infini (C_1' supposé 0). L'intensité de la source devient négative.

7. En partant de l'expression (13) pour le tourbillon on peut obtenir une forme spéciale pour la fonction de courant ψ en supposant que $N=1$ et que la constante de proportionnalité reste finie quand N tend vers 1. On obtient dans ce cas que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{C'}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)} + C_1'$$

d'où l'on tire les formules suivantes pour les dérivées de la fonction:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{C'}{z-z_0} \ln(\bar{z}-\bar{z}_0) + C_1'(\bar{z}-\bar{z}_0) + a_0'(z),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \frac{C'}{\bar{z}-\bar{z}_0} \ln(z-z_0) + C_1'(z-z_0) + b_0'(\bar{z}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2\, \partial \bar{z}} = -\frac{C'}{(z-z_0)^2(\bar{z}-\bar{z}_0)},$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial z\, \partial \bar{z}^2} = -\frac{C'}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)^2},$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2} = \frac{C'}{(z-z_0)^2(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}.$$

La condition de compatibilité prend alors la forme

$$C' \ln(z-z_0) - (z-z_0)\, a_0'(z) + i\nu = C' \ln(\bar{z}-\bar{z}_0) - (\bar{z}-\bar{z}_0)\, b_0'(\bar{z}) - i\nu\cdot$$

et, par conséquence,

$$a_0'(z)=C'\,\frac{\ln(z-z_0)}{z-z_0}-\frac{K'-i\nu}{z-z_0}$$

$$b_0'(\bar z)=C'\,\frac{\ln(\bar z-\bar z_0)}{\bar z-\bar z_0}-\frac{K'+i\nu}{\bar z-\bar z_0}\,.$$

Après l'intégration on arrive à des expressions

$$a_0(z)=\frac{C'}{2}\ln^2(z-z_0)-(K'-i\nu)\ln(z-z_0)$$

$$b_0(\bar z)=\frac{C'}{2}\ln^2(\bar z-\bar z_0)-(K'+i\nu)\ln(\bar z-\bar z_0)$$

et la fonction ψ devient égale à

$$\psi=\frac{C'}{2}\ln^2(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)+C_1'(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)-$$

$$-K'\ln(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)-i\nu\ln\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}\,.$$

Après les transformations évidentes on obtient

$$\psi=2\,C'\ln^2 r+C_1'r^2-2\,K'\ln r-2\,\nu\theta$$

d'où l'on tire

$$v_r=-2\,\frac{\nu}{r}\,,\qquad v_\theta=2\,C_1'\,r+\frac{2}{r}\,(K'-2\,C'\ln r).$$

La condition que la pression soit une fonction uniforme oblige, dans plusieurs cas de poser $C_1'=0$.

8. La méthode exposée peut être utile dans l'analyse des mouvements rotationnels d'un fluide parfait ou visqueux. Par exemple, le carré de la vitesse s'exprime par la formule

$$v^2=4\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}$$

et peut être calculé facilement à l'aide des formules (14'). Pour les tensions on obtient les expressions suivantes:

$$p_x+p=2\,\rho\nu\,\frac{\partial v_x}{\partial x}=2\,\rho\nu\,i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar z^2}\right),$$

$$p_y+p=2\,\rho\nu\,\frac{\partial v_y}{\partial y}=-2\,\rho\nu\,i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar z^2}\right),$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\rho\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)=-2\,\rho\nu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar z^2}\right).$$

Cherchons, par exemple, la dissipation d'énergie E_d qui apparaisse dans le mouvement d'un fluide visqueux. La formule

$$E_d = \rho \nu \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

donne

$$E_d = 16 \rho \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2}$$

et nous amène à l'expression suivante:

$$E_d = \frac{16 \rho \nu}{r^4} \left\{ \left[\frac{C'}{(N-1)(N-2)} r^{2N-1} - K' \right]^2 + (N-2)^2 \nu^2 \right\}.$$

On voit que la dissipation d'énergie est toujours positive et, pour r constant, croît avec le degré de déflexion N. Pour N constant, il existe toujours une valeur extrême de cette énergie qui correspond à une valeur de r dépendant de N.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hamel G. *Spiralförmige Bewegungen zähen Flüssigkeiten.* Jber. dtsch. Math. Ver. 25,34–60 (1916).

[2] Ossen C. W *Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen.* Ark. Mat. Astron. Fys. № 14, № 22, (1927–1928).

[3] Rosenblatt A. *Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux.* Mémorial des Sci. Math. fasc. 72 (1935).

]4] Berker R. *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.* Paris-Lille (1936).

[5] Jeffery G. B. Phil. Mag. (6), 29 (1915).

[6] Riabouchinsky D. C. R. Acad. Sci. Paris, 179 (1924).

[7] Berker R. *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.* Handbuch der Physik, Band VIII_2 (1963).

[8] Bilimovitch A. *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique.* C. R. Acad. des Sci. t. 237, p 694–695 (1953). *O meri odstupanja neanalitične funkcije od analitičnosti.* Glas SAN. CCXXI, Beograd 1956. *Application en Hydromécanique de la mesure de déflexion d'analyticité d'une fonction non analytique.* Bull. Acad. Serbe des Sci. t. X. № 2, Beograd (1956).

[9] Fempl S. *O neanalitičnim funkcijama čije je odstupanje od analitičnosti analitična funkcija.* Glas SAN, CCLIV, 1963, str. 75–80.
O neanalitičnim funkcijama čije je drugo odstupanje od analitičnosti analitična funkcija. Vesnik Društva matemat. i fizič. SR Srbije, XV, 1–4, Beograd, 1963.
Areolarni polinomi kao klasa neanalitičnih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije Matemat. vesnik, 1 (16) 1964, str. 29–38.