PUBLICATIONS DE L' INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21), 1967 p. 197–203

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION OPÉRATOIRE

D. Despotović et B. Stanković

(Communiqué le 16 décembre 1966)

Soit K le corps des opérateurs de J. Mikusiński [1], s l'opérateur différentiel, $a_i(\lambda)$ et $b_j(\lambda)$, $i=0, 1, \ldots, n$ et $j=0, 1, \ldots, m$, des fonctions numériques, réelles et continues sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$.

T. Fényes [2] a démontré:

THÉORÈME A. *Si* $b_m(\lambda)\neq 0$ *dans l'intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$,

$$R(\lambda)=\frac{a_n(\lambda)\, s^n+a_{n-1}(\lambda)\, s^{n-1}+\cdots+a_0(\lambda)}{b_m(\lambda)\, s^m+b_{m-1}(\lambda)\, s^{m-1}+\cdots+b_0(\lambda)},\quad m,\ n,\ \in N \tag{1}$$

est continue au sens des opérateurs dans le même intervalle.

Il se pose une question naturelle: Si $b_m(\lambda_0)=0$, $\lambda_0\in[\lambda_1, \lambda_2]$, la fonction $R(\lambda)$ est-elle continue ou non pour $\lambda=\lambda_0$?

Dans cet article nous allons considérer la fonction opératoire

$$\frac{I}{\beta(\lambda)\, s+\alpha(\lambda)} \tag{2}$$

et

$$\frac{I}{\beta(\lambda)\, s^\nu+\alpha(\lambda)},\quad 0<\nu<1. \tag{2'}$$

I est l'unité pour la deuxième opération dans K.

Pour montrer que la question posée a un sens, nous donnons les deux exemples suivants:

1. Pour $\beta(\lambda)=\lambda$, $\alpha(\lambda)=-I$ la fonction opératoire (2) est:

$$\frac{I}{\lambda s-I}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{\frac{1}{\lambda}t}, & \lambda\neq 0\\ -I, & \lambda=0\end{cases}$$

Soit $\lambda_n=\dfrac{1}{n}$ une suite qui tend vers zéro. Il est connu [1] que la suite $\{ne^{n\,t}\}$ ne converge pas dans K. C'est pourquoi la fonction opératoire $\dfrac{I}{\lambda s-I}$ est discontinue pour $\lambda=0$.

2. Pour $\beta(\lambda)=\lambda^2$, $\alpha(\lambda)=I$ on a:

$$\frac{I}{\lambda^2 s+I}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{1}{\lambda^2} t}, & \lambda \neq 0 \\ I, & \lambda=0\end{array}\right\}=s^2\left\{\begin{array}{ll}-\lambda^2+t+\lambda^2 e^{-\frac{1}{\lambda^2} t}, & \lambda \neq 0 \\ t, & \lambda=0\end{array}\right\}$$

La fonction numérique:

$$\left\{\begin{array}{ll}-\lambda^2+t+\lambda^2 e^{-\frac{1}{\lambda^2} t}, & \lambda \neq 0 \\ t, & \lambda=0\end{array}\right\}$$

est continue pour $\lambda=0$, $0 \leqslant t<-\infty$ et par suite $\frac{I}{\lambda^2 s+I}$ est continue pour $\lambda=0$ au sens des opérateurs.

THÉORÈME 1. *Supposons*

1. $\alpha(\lambda)$ *et* $\beta(\lambda)$ *soient deux fonctions réelles, continues sur l'intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$.
2. $\lambda_0 \in[\lambda_1, \lambda_2]$ *soit un zéro isolé de la fonction* $\beta(\lambda)$, $\beta(\lambda_0)=0$.
3. $\alpha(\lambda_0) \neq 0$.

S'il existe un voisinage V_0 *de* λ_0, *tel que* $\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} \geqslant 0$, $\lambda \in V_0 \backslash\{\lambda_0\}$, *la fonction (2) est continue au sens des opérateurs pour* $\lambda=\lambda_0$. *Dans le cas contraire la fonction (2) est discontinue pour* $\lambda=\lambda_0$.

Démonstration. —

$$\frac{I}{\beta(\lambda) s+\alpha(\lambda)}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\beta(\lambda)} e^{-\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} t}, & \lambda \neq \lambda_0 \\ \frac{1}{\alpha(\lambda)} I, & \lambda=\lambda_0\end{array}\right\}$$

$$=s^2\left\{\begin{array}{ll}\frac{\beta(\lambda)}{\alpha^2(\lambda)} e^{-\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} t}-\frac{\beta(\lambda)}{\alpha^2(\lambda)}+\frac{t}{\alpha(\lambda)}, & \lambda \neq \lambda_0 \\ \frac{t}{\alpha(\lambda)}, & \lambda=\lambda_0\end{array}\right\}$$

Supposons qu'il existe un voisinage V de λ_0, tel que $\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} \geqslant 0$, $\lambda \in V_0 \backslash \{\lambda_0\}$, la fonction numérique dans la paranthèse est continue pour $\lambda=\lambda_0$, $0 \leqslant t<\infty$.

La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Soit maintenant V_0 un voisinage de λ_0 dans lequel $\alpha(\lambda) \neq 0$ et $\beta(\lambda)$ ne s'annule que pour $\lambda=\lambda_0$. Dans tout voisinage $V \subset V_0$ il existe un λ', tel que $\frac{\alpha(\lambda')}{\beta(\lambda')}<0$. Comme $\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ est continue dans $V_0 \backslash\{\lambda_0\}$, $\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}=-x$ applique V_0 sur un voisinage de $-\infty$.

Supposons, contrairement à la proposition du théorème, que $\dfrac{I}{\beta(\lambda)s+\alpha(\lambda)}$ soit une fonction continue pour $\lambda=\lambda_0$. Soit $g\in C$ et $g\neq 0$, telle que $\dfrac{I}{\beta(\lambda)s+\alpha(\lambda)}\,g$ est définie par une fonction numérique de deux variables, continue pour $\lambda=\lambda_0$ et $0\leqslant t<\infty$. Pour tout $T\in R^+$ il existe alors un nombre fixe M tel que:

$$\left|\int_0^T e^{-\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}(T-\tau)}\,g(\tau)\,d\tau\right|\leqslant M,$$

c'est-à-dire:

$$\left|\int_0^T e^{-xt} g(\tau)\,d\tau\right|\leqslant Me^{-xT}, \tag{3}$$

où $x=-\dfrac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}$.

Nous allons, maintenant, utiliser deux théorèmes connus pour les intégrales de Laplace:

THÉORÈME B. *Si $f(s)=\mathscr{L}\{F\}$ a son demi-plan où elle est bornée, Beschränkheitsordnung" v dépend de $f(s)$ pour $s=x$ réel et:*

$$-v=\limsup_{x\to\infty}\frac{\log|f(x)|}{x}.$$

THÉORÈME C. *Si $f(s)=\mathscr{L}\{F\}$ a son demi-plan où elle est bornée et „Beschränkheitsordnung" $v>0$, $F(t)$ est une zéro fonction pour $0\leqslant t<v$.*

Pour trouver „Beschränkheitsordnung" v pour notre intégrale de Laplace. on utilise l'inégalité (3):

$$\log\left|\int_0^T e^{-x\tau} g(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\log M-xT,$$

d'où

$$\frac{\log\left|\int_0^T e^{-x\tau} g(\tau)\,d\tau\right|}{x}\leqslant\frac{\log M}{x}-T$$

et

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\left|\int_0^T e^{-x\tau} g(\tau)\,d\tau\right|}{x}\leqslant -T.$$

D'après le théorème C. il s'en suit que $g(t)=0$ pour $0\leqslant t<T$; T étant arbitraire, on a $g=0$. Mais c'est en contradiction avec la supposition qu'il existe $g\neq 0$ et notre théorème est ainsi démontré.

Ces considérations on peut étendre au cas quand les fonctions $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ sont complexes. La démonstration de la première partie du théorème 1. montre que la fonction (2) est aussi continue au sens des opérateurs s'il existe un voisinage V_0 de λ_0 tel que $Re\,\dfrac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}\geqslant -c$, $\lambda\in V_0\backslash\{\lambda_0\}$.

Considérons maintenant la fonction opératoire (2'). Pour les démonstrations dans ce qui suit la fonction de E. M. Wright [4] sera très commode. C'est pourquoi nous allons donner sa définition et ses propriétés.

Définition de la fonction de E. M. Wright:

$$\Phi(\beta, \rho; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+\rho n)}, \quad -1<\rho<0.$$

Propriétés de la fonction de E. M. Wright;

1. $\frac{1}{\nu}\Phi(0, \ -\nu; \ -x^{-\nu}) = x^{-\nu} \quad \Phi(1-\nu, \ -\nu; \ -x^{-\nu})$;

2. $\Phi(0, \ -\nu; \ -x^{-\nu}t) \sim \sin \nu\pi \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu}} t, \quad \frac{x}{t^{1/\nu}} \to \infty$;

3. $\int\limits_0^{\infty} e^{-zx}\Phi(1, \ -\nu; \ -tx^{-\nu})\, dx = z^{-1} e^{-tz^{\nu}}$;

4. $l^{\nu}\left\{\Phi(0, \ -\nu; \ -tx^{-\nu})\frac{1}{\nu t}\right\} = \{\Phi(1, \ -\nu; \ -tx^{-\nu})\}$;

5. $\Phi(0, \ -\nu; \ -x^{-\nu}) > 0, \quad 0<x<\infty$;

6. $\left|\Phi(0, \ -\nu; \ -tx^{-\nu})\frac{x^{\nu}}{t}\right| \leqslant A(\nu), \quad \frac{x}{t^{1/\nu}} \geqslant 0$;

7. $\frac{d}{du}\Phi(1, \ -\nu; \ -ut^{-\nu}) = -\frac{1}{\nu}\frac{1}{u}\Phi(0, \ -\nu; \ -ut^{-\nu})$

8. $\Phi(0, \ -\nu; \ -tx^{-\nu}) \sim \sqrt{a}\, x^{-\frac{\nu}{2(1-\nu)}}\, t^{\frac{1}{2(1-\nu)}} \exp\left(-ax^{-\frac{\nu}{1-\nu}} t^{\frac{1}{1-\nu}}\right)$,

$$t \to \infty, \quad a = (1-\nu)^{\frac{\nu}{1-\nu}}.$$

Premièrement nous allons montrer que l'opérateur $\frac{s^{\nu-1}}{s^{\nu}+a}$ appartient à C.

LEMME. *Pour* $x>0$ *et* $a \in R$ *on a*:

$$\left\{\int\limits_0^{\infty}\Phi(0, \ -\nu; \ -tx^{-\nu})\, e^{-at}\frac{dt}{\nu t}\right\} = \frac{s^{\nu-1}}{s^{\nu}+a}. \tag{4}$$

Démonstration. — Les propriétés 6. et 8., elles nous affirment que l'intégrale dans la relation (3) existe. Cette intégrale soit notée par $\psi(x)$.

Nous savons que $\frac{s^{\nu-1}}{s^{\nu}+a} = \frac{l}{I+al^{\nu}}$, c'est pourquoi la relation (3) peut être écrite:

$$\{\psi(x)\} + al^{\nu}\{\psi(x)\} = l$$

Nous allons examiner seulement le terme $a\, l^{\nu}\{\psi(x)\}$, $x>0$:

$$a l^{\nu}\left\{\int_{0}^{\infty}\Phi(0,\ -\nu;\ -t\,x^{-\nu})\,e^{-at}\frac{dt}{\nu\,t}\right\}=$$

$$=\left\{a\int_{0}^{x}\frac{(x-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,d\,\tau\int_{0}^{\infty}\Phi(0,\ -\nu;\ -u\,\tau^{-\nu})\,e^{-au}\frac{du}{\nu\,u}\right\}.$$

Les propriétés déjà mentionnées 6. et 8. nous permettent de changer l'ordre des intégrales

$$=\left\{a\int_{0}^{\infty}e^{-au}\frac{du}{\nu\,u}\int_{0}^{x}\frac{(x-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,\Phi(0,\ -\nu;\ -u\,\tau^{-\nu})\,d\,\tau\right\}$$

et la propriété 4. donne:

$$=\left\{a\int_{0}^{\infty}e^{-au}\,\Phi(1,\ -\nu;\ -u\,x^{-\nu})\,du\right\}.$$

En utilisant la propriété 7. et en intégrant par partie l'intégrale:

$$a\int_{0}^{\infty}e^{-au}\,\Phi(1,\ -\nu;\ -u\,x^{-\nu})\,du=$$

$$=-e^{-au}\,\Phi(1,\ -\nu;\ -u\,x^{-\nu})\Big|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}\Phi(0,\ -\nu;\ -u\,x^{-\nu})\,e^{-au}\frac{du}{\nu\,u}$$

on a: $a\,l^{\nu}\{\psi(x)\}=l-\{\psi(x)\}$ et notre lemme est démontré.

THÉORÈME 2. *Soient les suppositions du théorème 1. remplies. S'il existe un voisinage V_0 de λ_0 tel que $\dfrac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}>0$, $\lambda\in V_0\backslash\{\lambda_0\}$, la fonction (2′) est continue pour $\lambda=\lambda_0$ au sens des opérateurs. Dans le cas contraire la fonction (2′) est discontinue pour $\lambda=\lambda_0$.*

Démonstration — D'après le lemme, pour $\lambda\neq\lambda_0$ et $a=\dfrac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}$:

$$\frac{s^{\nu-1}}{\beta(\lambda)\,s^{\nu}+\alpha(\lambda)}=\frac{1}{\beta(\lambda)}\,\frac{s^{\nu-1}}{s^{\nu}+\dfrac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}}=\frac{1}{\beta(\lambda)}\left\{\int_{0}^{\infty}\Phi(0,\ -\nu;\ -t\,x^{-\nu})\,e^{-at}\frac{dt}{\nu\,t}\right\},$$

ou

$$\frac{I}{\beta(\lambda)\,s^{\nu}+\alpha(\lambda)}=s\begin{cases}\dfrac{l^{\nu}}{\beta(\lambda)}\left\{\displaystyle\int_{0}^{\infty}\Phi(0,\ -\nu;\ -t\,x^{-\nu})\,e^{-at}\frac{dt}{\nu\,t}\right\}, & \lambda\neq\lambda_0\\[2ex] \dfrac{l}{\alpha(\lambda)} & ,\ \lambda=\lambda_0\end{cases}$$

Nous avons vu que

$$\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} l^{\nu} \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t} \right\} + \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t} \right\} = l$$

et par suite:

$$\frac{l^{\nu}}{\beta(\lambda)} \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t} \right\} =$$

$$= \frac{l}{\alpha(\lambda)} - \frac{1}{\alpha(\lambda)} \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t} \right\}.$$

La deuxième partie de cette relation est une fonction continue pour $\lambda \in V_0 \setminus \{\lambda_0\}$, $x > 0$. Quand $\lambda \to \lambda_0$, $a \to \infty$ et elle converge vers $\frac{l}{\alpha(\lambda_0)}$.

Il nous n'est resté que la deuxième partie du théorème.

Nous avons supposé que $\alpha(\lambda_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage fermé $\overline{V'}$ dans lequel $\alpha(\lambda_0)$ garde son signe et reste différente de zéro. Pour tout voisinage $V_n \subset \overline{V'}$ il existe un point $\lambda_n \in V_n$ tel que $\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n)} < 0$. D'après les suppositions, $\left| \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} \right|$ ne reste pas bornée quand $\lambda_n \to \lambda_0$, c'est-à-dire $\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} \to -\infty$ quand $\lambda_n \to \lambda_0$.

La propriété 5. nous permet de minorer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t} \geqslant$$

$$\geqslant \int_c^{d} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t}, \quad c > 0,$$

$$= e^{-ac} \int_c^{d} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu}) \frac{dt}{\nu t}.$$

Supposons maintenant que (2′) est un opérateur continu. Soit $g \in C$, une fonction telle que:

$$\{g(x)\} \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, x^{-\nu})\, e^{-at} \frac{dt}{\nu t} \right\}$$

est bornée. Mais on a pour un x fixe:

$$\left| \int_0^{x} g(x-y)\, dy \int_0^{\infty} e^{-at}\, \Phi(0, \ -\nu; \ -t\, y^{-\nu}) \frac{dt}{\nu t} \right| =$$

$$= \left| g(\eta) \int^{x} dy \int^{\infty} e^{-at} \Phi(0, \; -\nu; \; -t\, y^{-\nu}) \frac{dt}{\nu t} \right|$$

$$\geqslant \left| g(\eta) \right| e^{-ac} \int_{0}^{x} dy \int_{c}^{d} \Phi(0, \; -\nu; \; -t\, y^{-\nu}) \frac{dt}{\nu t}.$$

Nous avons vu qu $a \to -\infty$ quand $\lambda_n \to \lambda_o$. La dernière expression ne peut être bornée quelque soit $g \in C g \neq 0$. C'est-à-dire (2′) n'est pas continue pour $\lambda = \lambda_o$.

BIBLIOGRAPHY

[1] J. Mikusiński: *Operational Calculus*, Pergamon Press (1959)

[2] T. Fényes: *Die Anwendung der Mikusinskischen Operatorenrechnung zur Lösung spezieller linearer partieller Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., IX, (1964), 35-49.

[3] G. Doetsch: *Handbuch de Laplace-Transformation* I, Basel. (1950), 186, 482

[4] E. Wright: *The generalized Bessel function of order greater than one*, Quart. J. Math. Oxford Series V. 11, (1940) 36-48.