PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21) 1967, p. 25—34

FORMALISME HOMOGENE DANS LA THEORIE DES CHAMPS

Đorđe Mušicki

(Communiqué le 1 juin 1966)

Le formalisme homogène de mécanique analytique est étendu à la théorie des champs pour le cas classique ainsi que pour le cas covariant de Weyl, à la base du calcul des fonctionnelles.

Introduction

Dans la mécanique analytique on peut considérer le temps en qualité d'une coordonnée généralisée supplémentaire et c'est le formalisme analytique homogène, introduit par P. Dirac [1]. De cette façon les formalismes de Lagrange et d'Hamilton reçoivent une forme symétrique [2], qui est spécialement commode pour la théorie de relativité. A partir de celui-ci, on peut obtenir le formalisme inhomogène comme une conséquence et formuler les transformations canoniques d'une manière symétrique [3, 4]. Ce problème est renouvellé par les travaux récents de Dirac sur les systèmes dégénerés, à qui les systèmes homogènes appartiennent aussi [5].

Cette méthode peut être généralisée pour obtenir la représentation canonique du champ gravitationnel dans la théorie générale de relativité [6]. Dans cet article nous donnerons systématiquement le formalisme homogène dans la théorie des champs à la base du calcul des fonctionnelles, en continuant nos recherches sur les transformations canoniques [7, 8]. Dans la première section cela s'est développé pour le cas classique et dans la seconde pour le cas covariant de Weyl, en prenant le temps t ou quatre coordonnées d'espace-temps x^α pour les fonctions supplémentaires du champ. De cette façon les formalismes homogènes de Lagrange et d'Hamilton sont obtenus, ainsi que la liaison entre les formalismes homogènes et inhomogènes et la formulation homogène des transformations canoniques.

1. Théorie classique des champs

Définition du formalisme homogène. — Considérons un champ qui est déterminé par un nombre des fonctions du champ $\psi_i \, (i=1, 2, \ldots, n)$ et supposons que ce champ peut être décrit à l'aide d'une fonction de Lagrange $L[\psi_i, \dot{\psi}_i; t]$. Si l'on prend le temps t pour une fonction supplémentaire du champ

$$t=\psi_{n+1} \tag{1.1}$$

et si l'on introduit au lieu des variables indépendantes t et x_i quatre paramètres par

$$t = t(\tau), \qquad x_i = x_i(y_k) \tag{1.2}$$

d'où il suit

$$\dot{\psi} = \frac{\psi_i'}{t'} \quad \left(\psi_i' = \frac{d\psi_i}{d\tau}\right) \tag{1.3}$$

ce formalisme analytique peut être nommé — formalisme homogène. Le paramètre τ est celui-ci qui joue le même role que le temps t dans le formalisme habituel.

Formalisme homogène de Lagrange. — Les équations du champ considéré peuvent être amenées à la forme de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_i} - \frac{\delta L}{\delta\psi_i} = 0,$$

qui est équivalent à un principe variationnel

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = 0. \tag{1.4}$$

Si l'on transforme l'élément Ldt d'après (1.2), on a

$$Ldt = L\left[\psi_i, \frac{\psi_i'}{t'}; t\right] t' d\tau \equiv L^* d\tau,$$

d'où l'on obtient la fonction nouvelle de Lagrange sous la forme d'une fonctionnelle

$$L^*[\psi_p, \psi_p'] = t' L\left[\psi_i, \frac{\psi_i'}{t'}; t\right]. \tag{1.5}$$

En passant aux variables nouvelles, le principe (1.4) se transforme à

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} L^* d\tau = 0,$$

qui donne

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\delta L^*}{\delta\psi_p'} - \frac{\delta L^*}{\delta\psi_p} = 0. \tag{1.6}$$

Ce sont les équations homogènes de Lagrange et la fonction correspondante L^* d'après (1.5) est une fonctionnelle homogène du premier degré par rapport aux ψ_p'

$$L^*[\psi_p, \lambda\psi_p'] = \lambda L^*[\psi_p, \psi_p'],$$

d'où, en vertu du théorème d'Euler étendu aux fonctionnelles

$$\int \sum \frac{\delta L^*}{\delta\psi_p'}\psi_p' dV = L^*. \tag{1.7}$$

Cependant, ces équations ne sont pas indépendantes, parce que

$$\int \sum \psi_p' \left(\frac{d}{d\tau}\frac{\delta L^*}{\delta \psi_p'} - \frac{\delta L^*}{\delta \psi_p}\right) dV = \frac{d}{d\tau}\int \sum \frac{\delta L^*}{\delta \psi_p'}\,\psi_p\, dV - \frac{dL^*}{d\tau}$$

et à cause de (1.7) on obtient une identité entre eux

$$\int \sum \psi_p' \left(\frac{d}{d\tau}\frac{\delta L^*}{\delta \psi_p'} - \frac{\delta L^*}{\delta \psi_p}\right) dV = 0. \tag{1.8}$$

Formalisme homogène d'Hamilton. — Introduisons maintenant les densités d'impulsion

$$\pi_p = \frac{\delta L^*}{\delta \psi_p'} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \psi_p'} \tag{1.9}$$

où $\mathcal{L}^*$ est la densité de L^*, ainsi que la fonction correspondante d'Hamilton

$$H^*[\psi_p,\ \pi_p] = \int \left(\sum \pi_p \psi_p' - \mathcal{L}^*\right) dV \tag{1.10}$$

en la considérant comme une fonctionnelle des variables canoniques. Si l'on forme la différentielle de H^*, on a

$$dH^* = \int \sum \pi_p\, d\psi_p'\, dV + \int \sum \psi_p'\, d\pi_p\, dV - \int \sum \frac{\delta L^*}{\delta \psi_p}\, d\psi_p\, dV -$$

$$- \int \sum \frac{\delta L^*}{\delta \psi_p'}\, d\psi_p'\, dV,$$

d'où, en vertu de (1.6) et (1.9)

$$dH^* = \int \sum \psi_p'\, d\pi_p\, dV - \int \sum \pi_p'\, d\psi_p\, dV. \tag{1.11}$$

Puisque

$$dH^* = \int \sum \frac{\delta H^*}{\delta \psi_p}\, d\psi_p\, dV + \int \sum \frac{\delta H^*}{\delta \pi_p}\, d\pi_p\, dV,$$

on obtient par comparaison les équations homogènes d'Hamilton

$$\frac{d\pi_p}{d\tau} = -\frac{\delta H^*}{\delta \psi_p}, \qquad \frac{d\psi_p}{d\tau} = \frac{\delta H^*}{\delta \pi_p}. \tag{1.12}$$

Si l'on écrit la formule (1.7) sous la forme

$$\int \sum \pi_p \psi_p'\, dV = \int \mathcal{L}^*\, dV,$$

on voit immédiatement que

$$H^*[\psi_p,\ \pi_p] = 0. \tag{1.13}$$

Donc, la fonction homogène d'Hamilton est toujours égale à zéro pour toutes les valeurs de τ et y_k, mais remarquons que cette identité représente une identité seulement par rapport à τ et y_k après avoir substitué ψ_p et π_p par les fonctions correspondantes.

Pour examiner le système (1.9), dérivons chaque équation qui correspond aux quantités à intégrer de (1.7) par rapport à ψ_q'

$$\sum \frac{\partial^2 \mathscr{L}^*}{\partial \psi_p' \partial \psi_q'} \psi_p' = 0.$$

Ce système des équations homogènes aura des solutions différentes de zéro seulement si son déterminant est nul

(1.14)
$$\Delta \equiv \left| \frac{\partial^2 \mathscr{L}^*}{\partial \psi_p' \partial \psi_q'} \right| = 0$$

d'où l'on voit que l'inversion des équations (1.9) n'est pas possible. D'une manière semblable comme en mécanique analytique ([2], p. 37), on peut conclure qu'il existe une relation entre les variables nouvelles ψ_p et π_p, qu'on peut nommer — condition accessoire et c'est justement l'équation (1.13). D'autre part, on doit poser encore une équation supplémentaire da la forme

(1.15)
$$F[\psi_p, \psi_p'] = 0,$$

dont le choix est arbitraire et qui fixe le paramètre τ. Les équations (1.9) et (1.15) déterminent alors tous les ψ_p' comme des fonctions de ψ_p et π_p.

Formalisme inhomogène comme conséquence. — A partir du formalisme homogène on peut passer au formalisme inhomogène en posant

(1.16)
$$\psi_{n+1} = t, \quad y_i = y_i(x_k).$$

En vertu de (1.5) on obtient les relations entre eux

(1.17)
$$\frac{\delta L^*}{\delta \psi_i} = t' \frac{\delta L}{\delta \psi_i}, \qquad \frac{\delta L^*}{\delta \psi_{n+1}} = t' \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t},$$
$$\frac{\delta L^*}{\delta \psi_i'} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i}, \qquad \frac{\delta L^*}{\delta \psi_{n+1}'} = -\mathscr{H},$$

où $\mathscr{H}$ est la densité de H. De là il suit

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\delta L^*}{\delta \psi_i'} - \frac{\delta L^*}{\delta \psi_i} = t' \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} - \frac{\delta L}{\delta \psi_i} \right)$$

et si les équations homogènes de Lagrange sont satisfaites, parce que $t' \neq 0$, on arrive à

(1.18)
$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} - \frac{\delta L}{\delta \psi_i} = 0.$$

D'une manière semblable, les densités d'impulsion sont données par

(1.19)
$$\pi_i = \frac{\delta L^*}{\delta \psi_i'} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i}, \qquad \pi_{n+1} = \frac{\delta L^*}{\delta \psi_{n+1}'} = -\mathscr{H}$$

et la densité de H^*

(1.20)
$$\mathscr{H}^* = t' (\mathscr{H} + \pi_{n+1}).$$

Alors existent les identités

$$\frac{d \pi_i}{d\tau} + \frac{\delta H^*}{\delta \psi_i} = t' \left(\frac{d \pi_i}{dt} + \frac{\delta H}{\delta \psi_i} \right),$$

$$\frac{d\psi_i}{d\tau}-\frac{\delta H^*}{\delta\pi_i}=t'\left(\frac{d\psi_i}{dt}-\frac{\delta H}{\delta\pi_i}\right)$$

et à partir des équations homogènes d'Hamilton on obtient

$$\frac{d\pi_i}{dt}=-\frac{\delta H}{\delta\psi_i},\qquad \frac{d\psi_i}{dt}=\frac{\delta H}{\delta\pi_i}. \tag{1.21}$$

De cette façon, le formalisme habituel peut être considéré comme une conséquence du formalisme homogène, qui est plus général.

Formulation homogène des transformations canoniques. — A la base des résultats obtenus on peut formuler toute la théorie du formalisme inhomogène d'une manière symétrique. Ainsi, si l'on considère les transformations canoniques, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation des variables canoniques soit canonique a la forme [7]

$$\int(\sum\pi_i\,\delta\psi_i-\mathscr{H}\,\delta t)\,dV=\int c(u)(\sum\bar{\pi}_i\,\delta\bar{\psi}_i-\bar{\mathscr{H}}\,\delta t)\,dV+\delta G. \tag{1.22}$$

En vertu de (1.1) et (1.19) cette condition peut être écrite

$$\int\sum\pi_p\,\delta\psi_p\,dV=\int c(u)\sum\bar{\pi}_p\,\delta\bar{\psi}_p\,dV+\delta G \tag{1.23}$$

où l'index p va jusqu'à $n+1$, d'où il suit, si l'on considère la génératrice G comme une fonctionnelle des variables ψ_p et $\bar{\psi}_p$

$$\pi_p=\frac{\delta G}{\delta\psi_p},\qquad c\,\bar{\pi}_p=-\frac{\delta G}{\delta\bar{\psi}_p}. \tag{1.24}$$

De là on voit qu'il est possible étendre la théorie inhomogène des transformations canoniques au formalisme homogène en remplaçant formellement l'index i par index p, qui parcourt ici jusqu'à $n+1$, et en laissant à côté la variable indépendante t, qui est une fonction du champ aussi. De cette manière on peut obtenir tous les résultats correspondants dans le formalisme homogène, par exemple l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$H\left[\psi_p,\frac{\delta S}{\delta\psi_p}\right]=0, \tag{1.25}$$

et l'intégral invariant de Poincaré-Cartan

$$J=\oint\int\sum\pi_p\,\delta\psi_p\,dV \tag{1.26}$$

sous la forme homogène.

2. Formulation covariante

Définition du formalisme homogène. — Ce formalisme homogène peut être donné dans la formulation covariante aussi, à la base du concept de surface du genre d'espace dans l'univers de Minkowski. Dans le formalisme de Weyl on y utilise quatre coordonnées d'espace temps x^α et dans le formalisme de Weiss on passe à quatre paramètres

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}(v,\ u^{r}),\qquad v=\text{const sur }\sigma \tag{2.1}$$

où σ est une de deux surfaces du genre d'espace. Les densités correspondantes d'impulsion y sont définies par

$$\pi_i^{\alpha}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{i}_{,\alpha}},\qquad \pi_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^{i}} \tag{2.2}$$

où $\mathcal{L}$ est la fonction de Lagrange de la forme $\mathcal{L}\,(\psi^{i},\varphi^{i}_{,\alpha};\ x^{\alpha})$, et entre eux existent les relations suivantes

$$\pi_i^{\alpha}=n^{\alpha}\pi_i+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{r}}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{i(r)}},\qquad \pi_i=n_{\alpha}\pi_i^{\alpha}. \tag{2.3}$$

Considérons maintenant les coordonnées x^{α} en qualité des fonctions supplémentaires

$$x^{\alpha}=\psi^{n+\alpha}. \tag{2.4}$$

Introduisons encore au lieu de v un scalaire nouvel w, tellement que les relations

$$y^{\mu}=y^{\mu}(w,\ u^{r}),\qquad w=w(v) \tag{2.5}$$

définissent les coordonnées nouvelles dans l'univers de Minkowski, d'où il suit

$$\psi^{i}_{,\alpha}=\psi^{i}_{,\mu}\,\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \tag{2.6}$$

avec les notations

$$\psi^{i}_{,\alpha}=\frac{\partial\psi^{i}}{\partial x^{\alpha}},\qquad \psi^{i}_{,\mu}=\frac{\partial\psi^{i}}{\partial y^{\mu}}. \tag{2.7}$$

Ces coordonnées y^{μ} dépendent de x^{α} seulement au moyen du paramètre w sur la surface σ et c'est le formalisme homogène covariant.

Formalisme homogène de Lagrange. — Dans ce cas les éléments du volume sont

$$d^4x=d\sigma\,dv,\qquad d^4y=d\sigma\,dw,$$

d'où on voit que

$$d^4x=v'\,d^4y. \tag{2.8}$$

D'autre part, l'élément d'action en vertu de (2.6) se transforme à

$$\mathcal{L}\,d^4x=\mathcal{L}\left(\psi^{i},\ \psi^{i}_{,\mu}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}};\ x^{\alpha}\right)v'\,d^4y\equiv\mathcal{L}^{*}\,d^4y$$

et la fonction nouvelle de Lagrange a la forme suivante

$$\mathcal{L}^{*}(\psi^{p},\psi^{p}_{,\mu})=v'\,\mathcal{L}\left(\psi^{i},\ \psi^{i}_{,\mu}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}};\ x^{\alpha}\right) \tag{2.9}$$

où

(2.10) $$v' = \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial w}.$$

A partir du principe variationnel aux variables nouvelles

$$\delta \int \mathscr{L}^* d^4 y = 0$$

on obtient alors

(2.11) $$\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^i} - \frac{d}{dy^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^i_{,\mu}} = 0.$$

Ces équations sont les équations covariantes de Lagrange sous la forme homogène. D'après (2.9) et les identités

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

on voit que la fonction correspondante $\mathscr{L}^*$ est une fonction homogène du premier degré par rapport aux $\psi^p_{,\mu}$

$$\mathscr{L}^* (\psi^p_, \lambda \psi^p_{,\mu}) = \lambda \mathscr{L}^* (\psi^p_, \psi^p_{,\mu})$$

et à la base du théorème d'Euler on a

(2.12) $$\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p_{,\mu}} \psi^p_{,\mu} = \mathscr{L}^*.$$

Mais ces équations ne sont pas indépendantes, car si l'on passe au formalisme de Weiss à l'aide de (2.3), on obtient une identité entre eux

(2.13) $$\psi^p_{,\nu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p} - \frac{d}{dy^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p_{,\mu}} \right) n^\nu = 0.$$

Formalisme homogène d'Hamilton. — Introduisons maintenant les densités d'impulsion sous la forme covariante

(2.14) $$\pi^\mu_p = \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p_{,\mu}}$$

et la fonction correspondante d'Hamilton

(2.15) $$\mathscr{H}^* (\psi^p_, \pi^\mu_p) = \pi^\mu_p \psi^p_{,\mu} - \mathscr{L}^*$$

comme une fonction des variables canoniques. De là on a

$$d\mathscr{H}^* = \pi^\mu_p \, d\psi^p_{,\mu} + \psi^p_{,\mu} \, d\pi^\mu_p - \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p} d\psi^p - \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p_{,\mu}} d\psi^p_{,\mu},$$

d'où, à cause de (2.11) et (2.14)

(2.16) $$d\mathscr{H}^* = \psi^p_{,\mu} \, d\pi^\mu_p - \pi^\mu_{p,\mu} \, d\psi^p$$

En tenant compte que $\mathscr{H}^*$ est une fonction de ψ^p et π^μ_p, on obtient les équations covariantes d'Hamilton

$$\frac{d\pi_p^\mu}{dy^\mu}=-\frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial \psi^p}, \qquad \frac{d\psi^p}{dy^\mu}=\frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial \pi_p^\mu}. \tag{2.17}$$

Puisque la formule (2.12) peut être écrite sous la forme

$$\pi_p^\mu \psi^p_{,\mu}=\mathscr{L}^*,$$

on voit que

$$\mathscr{H}^*(\psi^p, \pi_p^\mu)=0. \tag{2.18}$$

Donc la fonction homogène d'Hamilton est égale à zéro pour toutes les valeurs x^α, après avoir substitué ψ^p et π_p^μ par les fonctions correspondantes. Si l'on dérive chaque équation (2.12) par rapport à $\psi^q_{,\nu}$, on a

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p_{,\mu}\,\partial \psi^q_{,\nu}}\,\psi^p_{,\mu}=0$$

et pour obtenir des solutions différentes de zéro, le déterminant de ce système homogène doit être nul

$$\Delta \equiv \left|\frac{\partial^2 \mathscr{L}^*}{\partial \psi^p_{,\mu}\,\partial \psi^q_{,\nu}}\right|=0. \tag{2.19}$$

De là on peut conclure que l'inversion des équations (2.14) n'est pas possible et, comme dans le cas classique, on doit ajouter encore une équation arbitraire de la forme

$$F(\psi^p, \psi^p_{,\mu})=0. \tag{2.20}$$

Relations auxiliaires. — A la base de (2.9) on peut obtenir les relations entre le formalisme homogène et inhomogène covariant. De cette façon on a

$$\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^i}=v'\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i}, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^{n+\alpha}}=v'\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha} \tag{2.21}$$

et si l'on forme $\partial \mathscr{L}^*/\partial \psi^i_{,\mu}$ et multiplie par n_μ, à l'aide de (2.6) et (2.10) il suit

$$n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^i_{,\mu}}=n_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}}. \tag{2.22}$$

La dérivée $\partial \mathscr{L}^*/\partial \psi^{n+\alpha}_{,\mu}$ peut être trouvée d'une manière indirecte, en partant de

$$\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial v'}=n^\alpha n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^{n+\alpha}_{,\mu}}$$

et en calculant celle à gauche, d'où on obtient

$$n^\alpha n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^{n+\alpha}_{,\mu}}=-\mathscr{H}+\frac{\partial \psi^i}{\partial u^r}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^{i(r)}}. \tag{2.23}$$

Pour trouver une relation qui exprime $\pi_{n+\beta}^\mu$, écrivons la formule dernière sous la forme

$$n^\beta n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^{n+\beta}_{,\mu}} = \delta^\alpha_\beta n^\beta n_\alpha \mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} \left(n^\beta n_\alpha \psi^i_{,\beta} + \frac{\partial x^\beta}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x^\alpha} \psi^i_{,\beta} \right) + \frac{\partial \psi^i}{\partial u^r} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^{i(r)}}$$

qui peut être transformée à

$$n^\beta n_\alpha \left(\frac{1}{v'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^{n+\beta}_{,\mu}} - \delta^\alpha_\beta \mathscr{L} + \psi^i_{,\beta} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} \right) = 0.$$

Cette équation sera satisfaite si l'expression entre parenthèses est égale à zéro, d'où il suit par multiplication par n_α

(2.24) $$n_\mu \pi^\mu_{n+\beta} = -n_\alpha T^\alpha_\beta$$

avec

(2.25) $$T^\alpha_\beta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} \psi^i_{,\beta} - \delta^\alpha_\beta \mathscr{L}.$$

Enfin, exprimons la fonction $\mathscr{H}^*$ à l'aide de $\mathscr{H}$, en séparant l'expression (2.15) à

$$\mathscr{H}^* = \pi^\mu_i \psi^i_{,\mu} + \pi^\mu_{n+\beta} \psi^{n+\beta}_{,\mu} - v' \mathscr{L}$$

et le premier terme peut être écrit sous la forme

$$\pi^\mu_i \psi^i_{,\mu} = v' \pi^\alpha_i \psi^i_{,\alpha} + \frac{\partial u^r}{\partial x^\alpha} \psi^{i(r)} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \pi^\mu_i - v' \pi^\alpha_i \right).$$

Mais, parce que l'expression entre parenthèses multipliée par n_α est égale à zéro et les n_α sont arbitraires sur σ, cette expression se réduit au premier terme et l'on obtient

(2.26) $$\mathscr{H}^* = v' \mathscr{H} + \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} \pi^\mu_{n+\beta}.$$

Formalisme inhomogène comme conséquence. — Passons maintenant au formalisme inhomogène à partir du formalisme homogène en posant

(2.27) $$\psi^{n+\alpha} = x^\alpha, \qquad y^\mu = y^\mu(x^\alpha).$$

A l'aide des relations (2.21) et (2.22) on a

$$\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^i} - \frac{d}{dy^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^i_{,\mu}} = v' \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i} - \frac{d}{dx^\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} \right)$$

et si les équations homogènes de Lagrange sont satisfaites, parce que $v' \neq 0$, on obtient

(2.28) $$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i} - \frac{d}{dx^\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} = 0.$$

D'une manière semblable, à la base des formules citées et (2.26) on peut poser les identités

$$\frac{d\pi^\mu_i}{dy^\mu} + \frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial \psi^i} = v' \left(\frac{d\pi^\alpha_i}{dx^\alpha} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi^i} \right),$$

$$\frac{d\psi^i}{dy^\mu}-\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \pi_i^\mu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\left(\frac{d\psi^i}{dx^\alpha}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i^\alpha}\right)$$

et en partant des équations homogènes d'Hamilton, on obtient

$$\frac{d\pi_i^\alpha}{dx^\alpha}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^i}, \qquad \frac{d\psi^i}{dx^\alpha}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i^\alpha}, \tag{2.29}$$

donc toutes les équations fondamentales du formalisme habituel comme conséquence.

Formulation homogène des transformations canoniques. — A l'aide des résultats obtenus formulons encore la théorie des transformations canoniques. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation des variables canoniques soit canonique a la forme [8]

$$\int (\pi_i^\alpha \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \delta x^\beta)\, d\sigma_\alpha = \int c(u)(\overline{\pi}_i^\alpha \delta\overline{\psi}^i - \overline{T}_\beta^\alpha \delta x^\beta)\, d\sigma_\alpha + \delta G \tag{2.30}$$

En vertu de (2.22) et (2.24) on a

$$\pi_i^\alpha\, d\sigma_\alpha = \pi_i^\mu\, d\sigma_\mu, \qquad -T_\beta^\alpha\, d\sigma_\alpha = \pi_{n+\beta}^\mu\, d\sigma_\mu$$

et la condition (2.30) devient symétrique

$$\int \pi_p^\mu \delta\psi^p\, d\sigma_\mu = \int c(u)\, \overline{\pi}_p^\mu \delta\overline{\psi}^p\, d\sigma_\mu + \delta G. \tag{2.31}$$

C'est la formulation homogène des transformations canoniques sous la forme covariante. A partir de cette formule, on peut obtenir tous les résultats correspondants dans le formalisme homogène, d'une manière similaire comme dans le cas inhomogène, par exemple le système à génératrice

$$\pi_p^\mu = \frac{\delta G_1^\mu}{\delta\psi^p}, \qquad c\,\overline{\psi}^p = n^\mu n_\nu \frac{\delta G_1^\nu}{\delta\overline{\pi}_p^\mu} \tag{2.32}$$

et l'integral invariant de Poincaré-Cartan

$$J = \oint \int \pi_p^\mu \delta\psi^p\, d\sigma_\mu \tag{2.33}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1]. P. Dirac: *Homogeneous variables in classical dynamics*, Proc. Camb. Phil. Soc., **29** (1933), 389 — 400.

[2] P. Wilker: *Kanonischer Formalismus in der homogenen Form*, Zeitschr. für Physik **130**, (1951) 245-55

[3]. A. Mercier: *Principes de mécanique analytique* (1955), 35 — 40, 45 — 8.

[4]. J. Synge: *Classical dynamics*, Handbuch der Physik von Flügge, III/1 (1960), 210 — 45.

[5]. P. Dirac: *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J. Math. **2** (1950), 129 — 48.

[6]. M. Zulauf: *Über einen erweiterten kanonischen Formalismus für Felder* (en manuscript).

[7]. G. Mouchitzhy: *Transformations canoniques générales et leurs invariants dans la théorie classique des champs*, C. R. Acad. Sc Paris, **260**, (1965) 6280—3.

[8] G. Mouchitzhy: *Formulation covariante des transformations canoniques dans la théorie des champs à la base du farmalisme de Weyl* C. R. Acad. Sc. Paris, **260** (1965) 6517—20.