PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, 7 (21) 1967, p. 123–138

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (I)

Dušan Adamović

(Communiqué le 17 juin 1966)

0. Tous les résultats de cet article sont liés à la notion de *fonction à croissance lente* dans le sens de *Karamata* (J. Karamata, 1930 [12, 13]), c'est-à-dire d'une fonction réelle $L(x)$ définie et positive pour $x \geqslant 0$ et possédant la propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \qquad (\lambda > 0).$$

On démontre qu'une fonction à croissance lente et mesurable sur $[0, +\infty)$ est bornée, pour un a suffisamment grand, sur tout intervalle fini $[a, b]$ $(b > a)$ et par suite intégrable dans le sens de Lebesque sur chacun de tels intervalles. C'est pourquoi, dans les applications connues n'étant essentielles que les propriétés des fonctions à croissance lente pour les valeurs de x suffisamment grandes, nous allons supposer (sans l'énoncer explicitement) que *toute fonction à croissance lente qu'on mentionne est mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle* $[0, a]$ $(a > 0)$.

Dans le présent article nous donnons, au moyen de fonctions à croissance lente, les généralisations et les compléments d'un groupe de théorèmes de *A. Zygmund, B. Sz.-Nagy* et *R. P. Boas* [7-9, 14] concernant le comportement asymptotique et la connexion entre intégrabilité et convergence des séries trigonométriques. Quelques unes de ces généralisations, ne se limitant pas à l'introduction des fonctions à croissance lente, sont faites dans d'autres directions aussi. Nos résultats sont contenus dans les théorèmes I-XIII, avec un lemme auxiliaire. Notons que les théorèmes III-V et VIII ont été démontrés dans notre article [1] (où ils sont nommés théorèmes 1–3 et 6, respectivement). Nous les citons ici pour compléter notre exposé et pour corriger ou simplifier quelques détails de leurs démonstrations.

0.1. Dans les démonstrations de nos théorèmes nous allons profiter des résultats suivants qui se rapportent tous sauf (VI) aux propriétés des fonctions à croissance lente. Les propositions (I)-(V) et (X) sont bien connues, les propositions (VI)-(IX) sont démontrées dans notre travail [2] et la proposition (XI) dans l'article [4] de *Aljančić, Bojanić* et *Tomić*.

(I) *Si $L(x)$ est une fonction à croissance lente, on a*

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1 \quad (x \to +\infty)$$

uniformément pour $\lambda \in [a, b]$, où $0 < a < b < +\infty$.

(II) *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente et si pour la fonction* $L^+(x)$, *positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle fini, on a* $L^+(x) \sim L(x)\ (x \to +\infty)$, *alors la fonction* $L^+(x)$ *est à croissance lente.*

(III) (*Théorème de représentation.*) *Une fonction* $L(x)$ *mesurable sur* $[0, +\infty)$ *est à croissance lente si et seulement si l'on a*

$$L(x) = c(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt} \qquad (x \geqslant 0),$$

où $c(x)$ *est une fonction positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *qui tend vers une limite finie et positive lorsque* $x \to +\infty$ *et la fonction* $\varepsilon(x)$ *est continue pour* $x \geqslant 0$ *et tend vers zéro lorsque* $x \to +\infty$.

(IV) *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente et si* $\alpha > 0$, *alors*

$$x^\alpha L(x) \to +\infty, \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

(V) *Soit la fonction* $L(x)$ *à croissance lente et soit, pour* $\alpha > 0$,

$$\left.\begin{aligned} \overline{L}_1(x) &= x^{-\alpha} \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^\alpha L(t)\}, & \overline{L}_2(x) &= x^\alpha \sup_{t \geqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \\ \underline{L}_1(x) &= x^\alpha \inf_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, & \underline{L}_2(x) &= x^{-\alpha} \inf_{t \geqslant x} \{t^\alpha L(t)\} \end{aligned}\right\} (x \geqslant 0),$$

où l'on attribue à chacune de ces fonctions la valeur 1 pour $x = 0$. *Alors toutes les fonctions* $\overline{\underline{L}}_\nu(x)\ (\nu = 1,2)$ *sont à croissance lente (les deux dernières pour x suffisamment grand) et l'on a* $\overline{\underline{L}}_\nu(x) \sim L(x)\ (x \to +\infty\,;\ \nu = 1,2)$.

(VI) 1° *Supposons que les fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *soient définies et intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini* $[a, x]$ $(x > a)$, *que l'on ait* $g(t) > 0$ $(t \geqslant a)$ *et que les intégrales* $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *et* $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *soient finies. Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t)\, dt}{\int_x^{+\infty} g(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

2° *Supposons que les fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *soient intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini* $[a, x]$ $(x > a)$ *et que l'on ait* $g(t) > 0$ $(t \geqslant a)$ *et*

$$\int_a^x g(t)\, dt \to +\infty \qquad (x \to +\infty).$$

Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_a^x f(t)\, dt}{\int_a^x g(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous l'hypothèse que la limite au second membre existe, comme valeur fini ou comme $\pm\infty$.

(VII) *Soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente. Alors*:

1° *La série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ *et l'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt$ *sont équiconvergentes.*

2° *On a*

$$L(x) = o\left(\int\limits_{1}^{x} t^{-1} L(t)\, dt\right) \qquad (x \to +\infty).$$

3° *Soit*

$$(D_1) \qquad \sum \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n),\ S(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{1}^{x} t^{-1} L(t)\, dt,\ S^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu \leqslant x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Si $\sum = +\infty$, *on a* $S(x) \sim S^*(x)$ $(x \to +\infty)$ *et ces deux fonctions sont à croissance lente.*

4° *Soit*

$$(D_2) \qquad R(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{x}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt,\ R^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu \geqslant x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Si $\sum < +\infty$, *on a* $L(x) = o(R(x))$, $R^*(x) \sim R(x)$ $(x \to +\infty)$ *et ces deux fonctions sont à croissance lente.*

Dans ce qui suit on va employer les symbôles $\sum$, $S(x)$, $S^*(x)$, $R(x)$ et $R^*(x)$ avec les significations définies par (D_1) et (D_2).

(VIII) *Soit la fonction* $f(x)$ *non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle* $(0, \delta)$ $(\delta > 0)$ *et soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente. Alors*:

1° *La convergence (vers une limite finie) de l'une des intégrales*

$$\int\limits_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \qquad \text{et} \qquad \int\limits_{+0}^{\infty} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \qquad (\alpha > 0)$$

entraîne la convergence de l'autre et que

$$f(x) \int\limits_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \to 0 \qquad (x \to +0).$$

2° *Sous l'hypothèse*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt < +\infty,$$

la convergence de l'une des intégrales

$$\int\limits_{+0}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \qquad \text{et} \qquad \int\limits_{+0}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

entraîne la convergence de l'autre et que

$$R\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\to 0 \qquad (x\to +0).$$

(IX) *Pour toute fonction à croissance lente $L(x)$ il existe une fonction à croissance lente et infiniment différentiable $L_0(x)$ telle que l'on ait:*

1° $L_0(x)\sim L(x) \qquad (x\to\infty)$.

2° $L_0(n)=L(n) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$.

3° *Si la fonction $L(x)$ est monotone, pour $x\geqslant 0$ ou pour x suffisamment grand, alors $L_0(x)$ a la même propriété.*

4° *L'énoncé correspondant au précédent qui concerne la convexité est aussi vrai.*

Le théorème précédent implique que *dans les énoncés de nos théorèmes* I-XIII, *de même que dans ceux des autres théorèmes abeliens et tauberiens ou de la théorie trigonométrique où interviennent les fonctions à croissance lente* (exemples: les résultats dans [3], [4], [5] et [6]) *on peut supposer, sans restreindre la généralité, que toute fonction à croissance lente $L(x)$ en question a pour $x\geqslant 0$ autant de dérivées que l'on veut et de même que, dès que l'on introduit une condition de monotonie ou de convexité relative à $L(x)$, il n'importe si l'on y soumet $L(x)$ ou seulement la suite correspondante $L(n)\,(n=0,1,2,\ldots)$.*

(X) *Soit $\mathcal{K}$ la classe de toutes les fonctions à croissance lente et $\mathcal{K}_0$ la classe de Zygmund* ([15], tome I, p. 299) *de toutes les fonctions $K(x)$ positives et mesurables sur* $[0,+\infty)$ *et bornées sur tout intervalle fini* $[0,a]\,(a>0)$ *pour lesquelles*

$$x^{\delta}K(x)\nearrow,\ x^{-\delta}K(x)\searrow^{1)}\ (x \textit{ suffisamment grand};\ \delta>0).$$

Alors $\mathcal{K}_0$ est un vrai sous-ensemble de $\mathcal{K}$.

(XI) *Si $L(x)$ est le produit de deux fonctions à croissance lente monotones $L^{(1)}(x)$ et $L^{(2)}(x)$ (ou bien de deux fonctions à croissance lente telles que $L^{(1)}(n)\nearrow$, $L^{(2)}(n)\searrow$) et $\alpha>0$, alors*

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}|\nu^{-\alpha}L(\nu)-(\nu+1)^{-\alpha}L(\nu+1)|\leqslant M(\alpha)\,n^{-\alpha}L(n)\ (=1,2,\ldots),$$

$M(\alpha)$ étant indépendant de n.

0.2. Dans la démonstration du théorème I on va profiter du lemme suivant.

Lemme. *Soit la fonction $h(x)$ intégrable dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle $[\varepsilon,\pi]\,(0<\varepsilon<\pi)$ et soit $L(x)$ une fonction à croissance lente et $\gamma>0$. Alors la relation asymptotique*

$$h(x)\sim x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to +0) \tag{1}$$

entraîne

$$\int_0^x h(t)\,dt\sim\frac{1}{\gamma}x^{\gamma}L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to +0).$$

---

[1]) Le symbôle $f(x)\nearrow$ désigne que l'on a $f(x)\geqslant f(y)$ pour $x>y$. On admet la signification correspondante de $f(x)\searrow$ et des même symbôles pour les suites.

En particulier, pour $\gamma > 0$

$$\int_0^x t^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \sim \frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Démonstration. (1) entraîne

$$h(x) = \alpha(x)\, x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\lim\limits_{x\to+0} \alpha(x) = 1$ et la fonction $\alpha(x)$ est intégrable sur $[\varepsilon, \pi]\,(0<\varepsilon<\pi)$. On obtient alors, d'après (III) et (VI) (assertion 1°),

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_0^x t^{\gamma-1} \alpha(t) L\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_{\frac{1}{x}}^{+\infty} t^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{t}\right) L(t)\, dt}{\frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\int\limits_y^{+\infty} t^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{t}\right) L(t)\, dt}{\frac{1}{\gamma} y^{-\gamma} L(y)}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{-y^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{y}\right) L(y)}{-y^{-\gamma-1} L(y) + \frac{1}{\gamma} y^{-\gamma-1} c(y)\, \varepsilon(y) \exp\left(\int\limits_1^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right)}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \alpha\left(\frac{1}{y}\right) = 1.$$

1. Le comportement asymptotique des séries trigonométriques de sinus et de cosinus pour $x \to +0$.

A partir d'ici, on va sous-entendre que toute fonction désignée par $L(x)$ est à croissance lente sans l'énoncer explicitement. Comme nous l'avons déjà dit, on peut supposer partout que $L(x)$ a autant de dérivées que l'on veut. L'intégrabilité de la fonction $f(x)$ sur l'intervale $(0, \pi)$ sera partout désignée par $f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi)$.

Les considérations dans ce paragraphe se rapportent au comportement asymptotique des séries

(2) $$g(x) = \sum_{n=1} b_n \sin nx$$

et

(3) $$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

pour $x\to+0$, sous l'hypothèse que $a_n\searrow 0$, $b_n\searrow 0\,(n\to\infty)$, ou sous quelque autre hypothèse qui assure la convergence de ces séries pour $x\in(0,\pi)$.

Comme résultat initial dans ce domaine, on peut considérer les formules

(4) $$\left.\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\gamma}\cos nx\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi\gamma}{2}\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\gamma}\sin nx\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\end{cases}\right\}(x\to+0;\ 0<\gamma<1).$$

Pour la démonstration voir, par exemple, [15] (I, pp. 298—299).

Quant aux séries de sinus (2), *Hardy* [10] a démontré en 1928 que, sous l'hypothèse $b_n\searrow 0\,(n\to\infty)$, la relation

(5) $$b_n\sim n^{-\gamma}\quad(n\to\infty\ ;\ 0<\gamma<1)$$

entraîne

(6) $$g(x)\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\qquad(x\to+0).$$

En 1931 *Hardy* a établi que, inversement, sous la même condition, (6) entraîne (5). Plus tard ce résultat-là a été étendu à l'intervalle $0<\gamma<2$ tout entier [11]. On a obtenu des résultats analogues pour la série de cosinus.

Dans [4] et [6] *Aljančić, Bojanić* et *Tomić* ont généralisé le résultat cité relatif à la série de sinus, par la proposition suivante:

Soit $0<\gamma<2$, $b_n\searrow 0$. *Alors*

(7) $$b_n\sim n^{-\gamma}L(n)\qquad(n\to\infty)$$

entraîne

(8) $$g(x)\sim x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\qquad(x\to+0)$$

et inversement, (8) *entraîne* (7). *Pour* $1<\gamma<2$ (8) *est valable dès que*

(9) $$b_n=n^{-\gamma}L(n),$$

sans la condition $b_n\searrow$, *et pour* $0<\gamma\leqslant 1$ (8) *est aussi valable si l'on a* (9) *où* $L(x)$ *est produit de deux fonctions monotones à croissance lente.*

Ici nous ne nous intéressons qu'à la partie directe de ce théorème-là, c'est-à-dire à l'énoncé des conditions suffisantes pour (8).

On a des propositions analogues sur la série de cosinus (3) avec

$$a_n=n^{-\gamma}L(n)\quad(0<\gamma<1).$$

Dans [4] et [6] *Aljančić, Bojanić* et *Tomić* ont aussi étendu, au moyen de fonctions à croissance lente, l'énoncé direct et l'énoncé inverse de leur théorème cité au cas de la série de sinus avec $\gamma=0$. La partie directe de ce résultat est formulée comme il suit:

Soit $L(x)$ *une fonction à croissance lente et convexe qui tend vers zéro lorsque* $x\to+\infty$. *Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\sin nx \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0).$$

Dans sa monographie [15], *A. Zygmund*, employant la notion plus étroite de fonction à croissance lente, à savoir la notion de fonction appartenant à la classe $\mathcal{K}_0$ de *Zygmund* ((*X*) dans 0.1), étend les propositions de type considéré pour les séries de sinus et pour celles de cosinus aux cas $\gamma=0$ et $\gamma=1$ et puis, par „l'intégration", qu'il omet d'expliquer de plus près, à quelques autres intervalles et valeurs entiers de γ ([15], tome I, pp. 298—305 et page 366, problèmes 11 et 12). Nous remarquons cependant que l'on peut, en modifiant et complétant les démonstrations correspondantes contenues dans les travaux des auteurs cités, formuler tous les résultats de *Zygmund* avec la notion générale de fonction à croissance lente et aussi avec les variantes de conditions dans les résultats de *Aljančić, Bojanić* et *Tomić*. En outre, on peut donner, à l'aide de l'induction mathématique, une forme fermée à l'extension des énoncés à toutes les valeurs entières non négatives de γ et a tous les intervalles entre ces valeurs—là.

1.1. Tous les résultats et toutes les remarques qui précèdent (concernant les énoncés directs) sont contenus dans le

Théorème I. *Avec les désignations*

$$f_\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\cos nx,\quad g_\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\sin nx, \tag{10}$$

les assertions suivantes sont valables:

1° *Si la fonction* $L(x)$ *est convexe et tend vers zéro lorsque* $x\to+\infty$, *alors*

$$g_0(x)\sim x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0);$$

si en outre la fonction $x[L(x)-L(x+1)]$ *est à croissance lente, alors*

$$f_0(x)\sim \frac{\pi}{2} x^{-2}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)-L\left(\frac{1}{x}+1\right)\right] \qquad (x\to+0)$$

$\left[\sim -\frac{\pi}{2} x^{-2} L'\left(\frac{1}{x}\right) (x\to+0),\right.$ *si la fonction* $\left. -xL'(x) \text{ est à croissance lente}\right]$.

2° *Pour* $\gamma\in(2k,\ 2k+1)\,U\,(2k+1,\ 2k+2)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *on a*

$$g_\gamma(x)-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!}x^{2\nu-1} f_{\gamma+1-2\nu}(0)$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x\to+0), \tag{11}$$

où l'on n'écrit pas la somme si $k=0$; *pour* $\gamma \in (0,1)$

$$f_\gamma(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0); \tag{12}$$

pour $\gamma \in (2k-1,\ 2k)\, U(2k\ 2k+1) \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$

$$f_\gamma(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{\gamma-2\nu}(0) \tag{13}$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0);$$

les relations (11) *avec* $\gamma \in (2k+1,\ 2k+2)\,(k=0, 1, 2, \ldots)$ *et les relations* (13) *avec* $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\,(k=1, 2, 3, \ldots)$ *ont lieu dès que* $L(x)$ *est une fonction à croissance lente et les relations* (11) *avec* $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\,(k=0, 1, 2, \ldots)$, *les relations* (12) *et les relations* (13) *avec* $\gamma \in (2k-1,\ 2k)\,(k=1, 2, 3, \ldots)$ *si une des conditions suivantes est encore remplie*

(C_1) $$x^{|\gamma|-\gamma} L(x) \searrow;$$

(C_2) $L(x)$ *est produit de deux fonctions à croissance lente monotones.*

3° *En supposant une des conditions* (C_2) *ou*

(C_1') $$x^{-1} L(x) \searrow$$

remplie, on a

$$g_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} L\left(\frac{1}{x}\right); \tag{14}$$

$$f_{2k}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} L\left(\frac{1}{x}\right); \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &(16)\ g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} S\left(\frac{1}{x}\right), \\ &(17)\ f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-2} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} S\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\} \left(\sum = +\infty\right)$$

$$(x \to +0;\ k=1, 2, 3, \ldots).$$

Si $\sum < +\infty$,

$$g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} R\left(\frac{1}{x}\right), \tag{18}$$

$$f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} R\left(\frac{1}{x}\right) \tag{19}$$

$$(x \to +0;\ k=1, 2, 3, \ldots)$$

Pour $k=1$ *on n'écrit pas les sommes* (14), (16) *et* (17).

4° *Sous la condition* (C_2) *les séries* (2) *et* (3) *avec* $0 < \gamma \leqslant 1$ *convergent uniformément pour* $x \in [\delta,\ 2\pi-\delta]$ $(0 < \delta < \pi)$.

Notons que la condition particulière de la seconde assertion sous 1° est remplie si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente.

Dans les résultats précédemment cités de *Aljančić-Bojanić-Tomić* sont contenus la première assertion 1°, la relation (11) pour $\gamma \in (0, 1)\, U\, (1, 2)$ et la relation (14) pour $k=1$, tout cela sous les conditions correspondantes citées dans l'énoncé de notre théorème. La seconde assertion 1° et les relations: (12); (13) avec $\gamma \in (1, 2)$; (15)—(19) pour $k=1$ sont démontrées dans le livre de *Zygmund*, mais sous des hypothèses plus restrictives que dans notre théorème. Il faut remarquer que les hypothèses de la seconde assertion 1° chez *Zygmund* ne sont pas plus restrictives en raison de la plus large notion de fonction à croissance lente dans notre énoncé, la convexité de la fonction $L(x)$ à croissance lente entraînant $L(x) \in \mathcal{K}_0$ (théorème VI dans notre travail [2]), mais parce que la fonction $-xL'(x)$ est remplacée dans le théorème I par la fonction $x[L(x)-L(x+1)]$, supposée à croissance lente (dans le sens plus large) et que, d'autre part, si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente dans le sens de *Zygmund*, la fonction $L(x)$ est convexe: en effet, alors $-L'(x)= =x^{-1}[-xL'(x)]\searrow$.

Démonstration. Ce que nous avons à prouver encore, nous allons le faire dans l'orde suivant:

a) l'assertion 4°;

b) la seconde assertion 1°;

c) la relation (12);

d) la relation (11) avec $k=1, 2, 3, \ldots$ et les relations (13);

e) les relations (17) et (19) avec $k=1$;

f) les autres cas des relations (14)—(19).—

a) En supposant la condition (C_2) remplie et avec un $\gamma \in (0,1)$ fixé, on obtient, d'après (XI), pour $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$,

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{p} \nu^{-\gamma} L(\nu) \sin \nu x \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=m+1}^{p-1} [\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)]^{-\gamma} L(\nu+1)] \cdot \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right.$$

$$\left. + p^{-\gamma} L(p) \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \left[\sum_{\nu=m+1}^{p-1} |\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-\gamma} L(\nu+1)| + p^{-\alpha} L(p) \right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} [M(\gamma)(m+1)^{-\gamma} L(m+1) + p^{-\gamma} L(p)].$$

On obtient la même majorante, d'une manière tout-à-fait semblable, dans le cas de la série des cosinus. Cette majorante-là ne dépend pas de x et tend vers zéro lorsque $m,\ p \to \infty$.

b) Il résulte des hypothèses sur $L(x)$ que cette fonction est non croissante pour x suffisamment grand et tend vers zéro quand $x \to +\infty$. Par conséquent, pour un nombre naturel n_0 on a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |L(n)-L(n+1)| = \sum_{n=n_0}^{\infty} [L(n)-L(n+1)] < +\infty. \tag{20}$$

On obtient alors, en appliquant la sommation partielle $(0<x<\pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\cos nx = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} L(n)\cos nx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{m-1} [L(n)-L(n+1)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + L(m)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [L(n)-L(n+1)] \left(\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2} + \cos nx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [L(n)-L(n+1)]\sin nx + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [L(n)-L(n+1)](\cos nx - 1)$$

$$= \left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} n [L(n)-L(n+1)]\sin nx + 0(1), \tag{21}$$

puisque, d'après (20),

$$\left| \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [L(n)-L(n+1)](\cos nx - 1) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |L(n)-L(n+1)| < +\infty.$$

D'après l'hypothèse, $x[L(x)-L(x+1)]$ est une fonction à croissance lente et

$$n^{-1} n[L(n)-L(n+1)] = L(n)-L(n+1)\searrow,$$

de sorte que, d'après (14) avec $k=1$, la dernière somme dans (21) a le comportement asymptotique de la fonction $x^{-1}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)-L\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\frac{\pi}{2}$. (21) entraîne alors l'assertion en question.

c) La première des formules (4) peut être écrite sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx = x^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}\gamma + o(x^{\gamma-1}) \quad (x \to +0; \quad 0<\gamma<1),$$

d'où, pour $0<\gamma<1$,

$$\frac{x^{1-\gamma}}{L\left(\frac{1}{x}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx - \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}\gamma$$

$$= x^{1-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1\right] n^{-\gamma} \cos nx + o(1) = T(x) + o(1) \quad (x \to +0).$$

Il suffit, donc, d'établir que $T(x) \to 0 \quad (x \to +0)$.

On a, avec $0<\delta<1<\Delta<+\infty$,

$$|T(x)| = \left| x^{1-\gamma} \left(\sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} + \sum_{\frac{\delta}{x} < n \leqslant \frac{\Delta}{x}} + \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} \right) \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1\right] n^{-\gamma} \cos nx \right|$$

$$\leqslant \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx \right| + x^{1-\gamma} \left| \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} n^{-\gamma} \cos nx \right|$$

$$+ x^{1-\gamma} \left| \sum_{\frac{\delta}{x} < n \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1\right] n^{-\gamma} \cos nx \right| + \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx \right|$$

$$+ x^{1-\gamma} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma} \cos nx \right| = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \tag{22}$$

On a ensuite, avec $\gamma<\beta<1$ et en désignant par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 M_1', M_4' des constantes positives, d'après (V),

$$T_1 \leqslant \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} L(n)\, n^{\beta-\gamma} \cdot n^{-\beta} |\cos nx|$$

$$\leqslant \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant t \leqslant \frac{\delta}{x}} \{t^{\beta-\gamma} L(t)\} \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} n^{-\beta}$$

$$\leqslant M_1' \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left(\frac{\delta}{x}\right)^{\beta-\gamma} L\left(\frac{\delta}{x}\right) \int_0^{\delta/x} t^{-\beta}\, dt$$

$$\leqslant M_1\, \delta^{1-\gamma} \frac{L(\delta x^{-1})}{L(x^{-1})} \tag{23}$$

et, comme cas particulier,

(24) $$T_2 \leqslant M_2 \delta^{1-\gamma}.$$

On obtient

$$T_3 \leqslant x^{1-\gamma} \sum_{\frac{\delta}{x} \leqslant n \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1 \right| n^{-\gamma} \left| \cos nx \right|$$

$$\leqslant x^{1-\gamma} \operatorname*{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right| \sum_{\frac{\delta}{x} \leqslant n \leqslant \frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma} \leqslant x^{1-\gamma} \operatorname*{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right| \int_{\frac{\delta}{x}-1}^{\frac{\Delta}{x}} t^{-\gamma} \, dt$$

(25) $$\leqslant M_3 \frac{\Delta^{1-\gamma} - \delta^{1-\gamma}}{1-\gamma} \operatorname*{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right|.$$

D'après la majoration que nous avons déjà fait dans a) (le cas des cosinus, comme nous l'avons dit, est tout-à-fait analogue à celui des sinus) et d'après (I), nous avons

$$T_4 = \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} L(n) n^{-\gamma} \cos nx \right| \leqslant \frac{M_4'}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} L([\Delta x^{-1}] + 1)([\Delta x^{-1}] + 1)^{-\gamma}$$

(26) $$\leqslant M_4 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{-\gamma}}{L(x^{-1})} \cdot L(\Delta x^{-1})(\Delta x^{-1})^{-\gamma} = M_4 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma} \frac{L(\Delta x^{-1})}{L(x^{-1})}$$

et, comme cas particulier,

(27) $$T_5 \leqslant M_5 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma}.$$

D'après les inégalités (23)—(27) et les propriétés correspondantes des fonctions à croissance lente, on obtient, faisant dans (22) $x \to +0$,

$$\overline{\lim_{x \to +0}} \left| T(x) \right| \leqslant (M_1 + M_2) \delta^{1-\gamma} + (M_4 + M_5) \Delta^{-\gamma},$$

d'où ($\delta \to +0$, $\Delta \to +\infty$)

$$\lim_{x \to +0} T(x) = 0.$$

d) D'après le résultat de *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić*, la relation (11) est valable pour $k=0$ et cela sous une des conditions (C_i) $(i=1,2)$ si $\gamma \in (0,1)$ et sans condition particulière si $\gamma \in (1,2)$. On en déduit, pour $\gamma \in (0,1) \cup (1,2)$ et sous les mêmes conditions pour chacun des deux intervalles, par l'integration de 0 à $x \in (0, 2\pi)$, ce procédé étant justifié par le lemme de 0.2,

$$f_{\gamma+1}(x) - f_{\gamma+1}(0) \sim -\frac{x^\gamma}{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \cos \frac{\pi}{2} \gamma \qquad (x \to +0),$$

c'est-à-dire, pour $\gamma \in (1, 2) \cup (2, 3)$,

$$f_\gamma(x) - f_\gamma(0) \sim -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1} \Gamma(1+1-\gamma) \cos\frac{\pi}{2}(\gamma-1) \cdot L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1}(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \cdot L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\gamma-1}\Gamma(1-\gamma) L\left(\frac{1}{x}\right) \sin\frac{\pi}{2}\gamma,$$

cette égalité étant valable sous chacune des conditions $(C_i)(i=1,2)$ si $\gamma \in (1,2)$ et sans elles si $\gamma \in (2, 3)$. Les assertions (11) et (13) sont donc valables pour $k=0$ et pour $k=2$ respectivement. Si on les suppose valables pour un nombre naturel k, on établit, de la même manière que là-dessus, en intégrant de 0 à x et en profitant du lemme, leur validité pour le nombre naturel $k+1$ et cela sous les conditions correspondantes. C'est donc par induction mathématique que l'on vient d'achever la démonstration de toutes les assertions 2°.

e) Supposons une des conditions $(C_i)(i=1,2)$ remplie. Si $\sum = +\infty$, on a, d'après (IV) et VII),

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \cos nx$$

$$= \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1} L(n) - \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)$$

$$+ \sum_{n > \frac{1}{x}} n^{-1} L(n) \cos nx = S^*\left(\frac{1}{x}\right) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

$$= S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \tag{28}$$

Comme (P_1, P_2 constantes positives), d'après (V) et (VII),

$$\left|\sum\nolimits_1\right| = \left|\sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)\right| \leqslant \frac{1}{2} x^2 \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n L(n)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{x}} \{t L(t)\} \leqslant P_1 L\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et, d'après la majoration dans a),

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqslant \frac{P_2}{\sin\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

on déduit de (28) l'assertion (17) pour $k=1$.

Si l'on a $\sum < +\infty$ (sans autre condition) la série $f_1(x)$ est convergente et

$$f_1(0)-f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)=\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)+R^*\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(29)\qquad -\sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-1} L(n)\cos nx=R\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\sum\nolimits_3-\sum\nolimits_4.$$

On obtient de nouveau, de la même manière que plus haut,

$$\left|\sum\nolimits_3\right|=0\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \left|\sum\nolimits_4\right|=0\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et par suite, d'après (VII),

$$(30)\qquad \left|\sum\nolimits_3\right|=o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \left|\sum\nolimits_4\right|=o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Les égalités (29) et (30) entraînent l'assertion (19) avec $k=1$.

f) D'après ce qui précède, les relations (14), (17) et (19) sont valables pour $k=1$ sous les conditions correspondantes. En intégrant, dans le sens du lemme, la relation (14) de 0 à x, on aboutit à

$$f_2(x)-f_2(0)=-\frac{\pi}{2}\,xL\left(\frac{1}{x}\right)\qquad(x\to+0),$$

c'est-à-dire à la relation (15) pour $k=1$. En intégrant les relations (17) et (19), sous les conditions correspondantes, on aboutit respectivement aux relations

$$g_2(x)\sim xS\left(\frac{1}{x}\right)\qquad\left(x\to+0;\ \sum=+\infty\right),$$

$$g_2(x)-xf_1(0)\sim -xR\left(\frac{1}{x}\right)\qquad\left(x\to+0;\ \sum<+\infty\right),$$

c'est-à-dire aux relations (16) et (18) pour $k=1$. On a ainsi prouvées toutes les relations (14)—(19) pour $k=1$. Pareillement, en intégrant de 0 à x selon le lemme, de l'hypothèse que toutes les assertions (14)—(19) sont vraies pour le nombre naturel k on déduit leur validité pour $k+1$. C'est donc par induction mathématique que l'on prouve toutes les assertions (14)—(19).

1.2. Aux résultats précédents sur le comportement asymptotique des séries (2) et (3) nous ajoutons l'estimation suivante de la série des modules des termes de la série $g_\gamma(x)$.

Théorème II. *Sous une des conditions* (C_2) *et* (C_1') *(l'énoncé du théorème I) on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx|\sim\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\sin nx\qquad(x\to+0).$$

Si $\sum<+\infty$, *cette relation est valable sans conditions supplémentaires.*

Démonstration. Soit d'abord $\sum=+\infty$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx|=\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}}+\sum_{n>\frac{1}{x}}$$

$$\leqslant x \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1} L(n) + \sum_{n > \frac{1}{x}} n^{-\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} L(n)$$

$$\leqslant x S^*\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(x L\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= x S^*\left(\frac{1}{x}\right)(1 + o(1)) = x S\left(\frac{1}{x}\right)(1 + o(1))$$

et, d'autre part, d'après le thèorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0);$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \sim x S\left(\frac{1}{x}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \qquad (x \to +0).$$

Si $\sum < +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \leqslant x \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = x \sum;$$

d'autre part, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x \sum \qquad (x \to +0);$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \sim x \sum \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \qquad (x \to +0).$$

1.2.1. De la même façon que les inégalités dans la démonstration précédente, on peut déduire les deux estimations suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |\sin nx| \leqslant \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} x^{\gamma - 1} L\left(\frac{1}{x}\right) \tag{31}$$

($o < \varepsilon < \gamma$; $x > o$ et suffisamment petit; $1 < \gamma < 2$);

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |\sin nx| \leqslant x \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\gamma} L(n) \qquad (\gamma > 2),$$

valables sans aucune restriction pour $L(x)$.

(à suivre)

BIBLIOGRAPHIE

1. D. D. Adamović — *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund — B. Sz.-Nagy*, Publ. Ins. Math. Acad. serbe Sci., t. XII (1958), 81—100.

2. D. D. Adamović — *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata*, Matematički vesnik, 2 (17), 1965, sv. 2—3.

3. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publ. Inst. Math, Acad. serbe, Sci., t. VII (1954), 81—94.

4. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova*, Zbornik radova S. A. N., 4 (1955), 15 — 26.

5. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques*, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci. t. VII (1954), 81 — 94.

6. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur le comportement asymptotiques au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones*, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci. t. X (1958), 101—120,

7. Béla Sz.-Nagy — *Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées*, Acta Sci. math., Szeged, XIII (1949), 118 — 135.

8. R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series*, Tôhoku Math. Journal, 14 (1962), 363 — 368.

9. R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series, II*, Tôhoku Math. Journal, 16 (1964), 358 — 373.

10. G. H. Hardy — *A theorem concerning trigonometric series*, Journal London Math. Society, 3 (1928), 12 — 13

11. P. Heywood — *A note on a theorem of Hardy on trigonometric series*, Journal London Math. Society, 29 (1954), 373 — 378.

12. J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica, (Cluj), 4 (1930), 38 — 53.

13. J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondameutaux*, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 55 —62.

14. A. Zygmund — *Sur les fonctions conjuguées*, Fundamenta Math., 13 (1929), 284 — 303.

15. А. Зигмунд — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1965.