

ÜBER SCHÜTTELSCHWINGUNGEN BEI MOTOREN

Günter Schmidt*

1. Die Schwingungsgleichungen

Bei Motoren treten infolge der Winkelabhängigkeit der Trägheitsmomente parametererregte Schwingungen auf, die oft als Schüttelschwingungen bezeichnet werden. Insbesondere muß nach F. Weidenhammer [5] mit parametererregten Kombinationsschwingungen gerechnet werden, wenn die Kurbelversetzungswinkel keine ganzzahligen Vielfachen von π sind.

Die Kombinationsschwingungen sollen explizit für das einfache Beispiel eines Gegenkolben-Zweitaktmotors mit vier gleichen Kurbeln untersucht werden, bei dem die zu einer Welle gehörenden beiden Kurbeln um $\pi/2$ gegeneinander versetzt sind. Die beiden Kurbelwellen sind durch ein Getriebe miteinander verbunden. Jede von ihnen läßt sich auf das in Abb. 1 dargestellte Ersatzsystem einer mit drei Scheiben besetzten geraden Welle abbilden, für die die Abstände l_1, l_2 der Scheiben, die Massen m_0, m_1, m_2 und die Trägheitsmomente $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ so bestimmt sind, daß die Kurbelwelle und das Ersatzsystem die gleiche Formänderungs- und die gleiche Bewegungsenergie haben [1]. Die Masse m_0 und das Trägheitsmoment θ_0 der Zusatzdrehmassen (Schwungrad, Kupplung) werden wie üblich als groß gegen die entsprechenden Kurbelgrößen angenommen, so daß die Längsverschiebung und der Verdrehwinkel der Zusatzdrehmassen als Null vorausgesetzt werden können und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für den Drehwinkel π_n der n -ten Scheibe

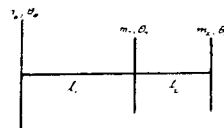


Abb. 1

$$(1) \quad \theta_n \pi_n'' + \frac{1}{2} \frac{d\theta_n}{d\pi_n} \pi_n'^2 + \beta_n \pi_n' + \delta_n \psi_n' - \delta_{n+1} \psi_{n+1}' + GJ_0 \left(\frac{\psi_n}{l_n} - \frac{\psi_{n+1}}{l_{n+1}} \right) + r^2 \mathfrak{S}_0 \left(\mathfrak{G} \Lambda + \frac{1}{3} E \right) \left(\frac{\psi_n^3}{l_n^3} - \frac{\psi_{n+1}^3}{l_{n+1}^3} \right) + E \mathfrak{S}_0 \left(\frac{v_n \psi_n}{l_n^2} - \frac{v_{n+1} \psi_{n+1}}{l_{n+1}^2} \right) = Q_n \quad (n=1,2)$$

und für die zugehörige Längsverschiebung u_n

$$m_n u_n'' + EF \left(\frac{v_n}{l_n} - \frac{v_{n+1}}{l_{n+1}} \right) + \frac{1}{4} r^2 EF \left(\frac{\psi_n^2}{l_n^2} - \frac{\psi_{n+1}^2}{l_{n+1}^2} \right) = 0 \quad (n=1,2)$$

*Vorgetragen auf dem Kongress der Jugoslawischen Gesellschaft für Mechanik, Split, 6 — 11. Juni 1966)

lauten [4]. In ihnen bezeichnen Striche Ableitungen nach der Zeit t , ferner sind r der Radius, E der Elastizitätsmodul, G der Gleitmodul und J_0 das polare Querschnittsträgheitsmoment der Welle, Λ der kubische Koeffizient eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes nach R. Grammel [3], β_n die Koeffizienten einer äußeren, δ_n die einer inneren Dämpfung und Q_n die äußeren Momente der Gaskräfte. Die Drehwinkel π_n setzen sich additiv aus dem Drehwinkel ωt der Zusatzdrehmassen, den konstanten Kurbelversetzungswinkeln (deren erster gleich Null gewählt wird) und den von der elastischen Verformung herrührenden Verdrehwinkeln φ_n zusammen, $\psi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ sind die relativen Verdrehwinkel, ebenso $v_n = u_n - u_{n-1}$ die relativen Längsverschiebungen. Neben $u_0 = \varphi_0 = 0$ sind dabei auch Ausdrücke gleich Null zu setzen, die die nichterklärten Größen l_3 oder δ_3 enthalten.

2. Transformation

Die Bewegungsgleichungen lassen sich in dimensionsloser Form schreiben, dazu werden durch

$$s = \frac{\omega}{M} t$$

mit einer noch festzulegenden natürlichen Zahl M eine dimensionslose Zeit s , durch die übliche Frahmische Näherung für die Winkelabhängigkeit der Trägheitsmomente

$$\Theta_n(\pi_n) = \Theta (1 - p \cos 2 \pi_n)$$

eine Erregergröße $p > 0$, durch

$$b_n = \frac{M \beta_n}{\Theta \omega}, \quad d_n = \frac{M \delta_n}{\Theta \omega}$$

dimensionslose Dämpfungsgrößen, durch

$$q_n(s) = \frac{M^2 Q_n}{\Theta \omega^2}$$

dimensionslose äußere Momente mit derselben Frequenz wie die Trägheitsmomente und durch

$$a_n = \frac{M^2 EF}{l_n m \omega^2}, \quad e_n = \frac{M^2 r^2 EF}{4 l_n^2 m \omega^2},$$

$$c_n = \frac{M^2 \mathfrak{S}_0}{l_n \Theta \omega^2}, \quad f_n = \frac{M^2 r^2 \mathfrak{S}_0}{l_n^3 \Theta \omega^2} \left(\frac{1}{3} E + \mathfrak{S} \Lambda \right), \quad g_n = \frac{M^2 I E \mathfrak{S}_0}{l_n^2 \Theta \omega^2}$$

mit $l = l_1 + l_2$, $m = m_1 + m_2$ dimensionslose Verformungskoeffizienten eingeführt.

Die beiden ersten Ausdrücke in den Bewegungsgleichungen (1) werden noch durch Taylorentwicklungen nach den Verdrehwinkeln und Weglassen von Gliedern höheren als ersten Grades, deren Einfluß auf die zu untersuchenden Schwingungen nach [4] vernachlässigt werden kann, vereinfacht.

Durch Transformation auf Normalkoordinaten werden die Bewegungsgleichungen im Hauptteil entkoppelt und dadurch einer Auflösung zugänglich gemacht. Die (dimensionslosen) Normalkoordinaten sind

$$x_i = \frac{u_1 + t_i u_2}{l}, \quad y_i = \varphi_1 + t_i \varphi_2 \quad (i = 1, 2)$$

mit den Konstanten

$$(2) \quad \begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{l_2}{2l_1} \pm \frac{1}{2l_1} \sqrt{4l_1^2 + l_2^2} \\ &= \delta \pm \sqrt{1 + \delta^2} \quad \left(\delta = \frac{l_2}{2l_1} \right). \end{aligned}$$

Für diese Normalkoordinaten haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\ddot{x}_i + \kappa_i^2 x_i = X_i, \quad \ddot{y}_i + \lambda_i^2 y_i = Y_i \quad (i = 1, 2),$$

dabei sind die rechten Seiten, wenn

$$(3) \quad j \neq i, \text{ d. h. } j = \begin{cases} 2 & \text{für } i = 1 \\ 1 & \text{für } i = 2 \end{cases}$$

ist,

$$\begin{aligned} X_i = X_i\{s\} &= - \left(\frac{t_2 y_1 - t_1 y_2}{t_2 - t_1} \right)^2 e_1 + \frac{1 - t_i}{(t_2 - t_1)^2} [(1 + t_2) y_1 - (1 + t_1) y_2]^2 e_2, \\ Y_i = Y_i\{s\} &= q_1(s) + t_i q_2(s) + M^2 (t_i - 1) p \sin 2 Ms - M (b_1 + t_i b_2) + \alpha \lambda_i^2 y_i + \\ & \frac{(t_1 + t_2) (2 M^2 y_i - \ddot{y}_i) - 2 t_i (2 M^2 y_j - \ddot{y}_j)}{t_i - t_j} p \cos 2 Ms + \frac{(t_1 + t_2) \dot{y}_i - 2 t_i \dot{y}_j}{t_i - t_j} 2 M p \sin 2 Ms \\ & + \frac{t_2 \dot{y}_1 - t_1 \dot{y}_2}{t_1 - t_2} (b_1 + d_1) + \frac{t_i}{t_2 - t_1} (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) b_2 + \frac{t_i - 1}{t_2 - t_1} [(1 + t_2) \dot{y}_1 - (1 + t_1) \dot{y}_2] d_2 \\ & - \left(\frac{t_2 y_1 - t_1 y_2}{t_2 - t_1} \right)^3 f_1 + \frac{t_i - 1}{(t_2 - t_1)^3} [(1 + t_2) y_1 - (1 + t_1) y_2]^3 f_2 \\ & - \frac{(t_2 x_1 - t_1 x_2) (t_2 y_1 - t_1 y_2)}{(t_2 - t_1)^2} g_1 + \frac{1 - t_i}{(t_2 - t_1)^2} [(1 + t_2) x_1 - (1 + t_1) x_2] [(1 + t_2) y_1 - \\ & - (1 + t_1) y_2] g_2, \end{aligned}$$

und die Quadrate der Eigenwerte κ_i, λ_i sind mit (3)

$$(4) \quad \kappa_i^2 = (1 + t_j) a_2, \quad \lambda_i^2 = (1 + t_j) \bar{c}_2,$$

wobei in \bar{a}_2, \bar{c}_2 gegenüber a_2, c_2 die (Kreis) Frequenz ω durch eine feste Frequenz $\bar{\omega}$ ersetzt ist, so daß sich das Variieren von ω in der Umgebung von $\bar{\omega}$ durch die kleine Frequenzvariation

$$\alpha = 1 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} \approx 2 \frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

ausdrückt.

Wir untersuchen den Verzweigungsfall, bei dem mindestens ein Eigenwert ($\lambda_k = K$), evtl. auch der zweite ($\lambda_l = L$) ganzzahlig ist, während die x_i nicht ganzzahlig sind.

Die Bewegungsgleichungen sind nichtlinear gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen, deren periodische Lösungen sich übersichtlich durch Übergang zu den äquivalenten nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} x_i(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2x_i^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(s-\sigma)}{x_i^2 - m^2} \right] X_i\{\sigma\} d\sigma, \\ y_i(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\lambda_i^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(s-\sigma)}{\vartheta_{\lambda_i}^m \lambda_i^2 - m^2} \right] Y_i\{\sigma\} d\sigma \\ &+ \delta_i^k (r_1 \cos Ks + r_2 \sin Ks) + \delta_i^l (r_3 \cos Ls + r_4 \sin Ls) \end{aligned}$$

iterativ bestimmen lassen, in denen δ_i^j das Kroneckersymbol, $\vartheta_{\lambda_i}^j = 1 - \delta_i^j$ ist und r_ν zunächst freie Verzweigungsparameter sind, die nachträglich durch Einsetzen der Näherungslösungen in die vier Verzweigungsgleichungen

$$(6) \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_k(s) \frac{\cos Ks ds}{\sin}, \quad \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_l(s) \frac{\cos Ls ds}{\sin}$$

zu bestimmen sind. Für hinreichend kleine Werte von α , p , b_i , d_i , q_i läßt sich die Konvergenz des Iterationsverfahrens beweisen. Neben den üblicherweise untersuchten erzwungenen Schwingungen infolge der äußeren Gaskräfte ergeben sich in bestimmten Frequenzbereichen (Schüttelbereichen) auch schon bei fehlenden Gaskräften parametererregte Schwingungen (Schüttelschwingungen), die durch den Parameter p , d. h. durch die Winkelabhängigkeit der Trägheitsmomente entstehen.

3. Resonanzmöglichkeiten, einfache Resonanz

Ein Bereich einfacher Resonanz ν -ter Ordnung ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) liegt vor, wenn die Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ gerade so groß ist, daß ein Eigenwert ganzzahlig ist, $\lambda_k = K$, und

$$K = \nu M$$

gilt. Bei einer Kombinationsresonanz ν -ter Ordnung sind $\bar{\omega}$ und das Verhältnis δ der beiden Wellenstücke so, daß beide Eigenwerte ganzzahlig sind, $\lambda_1 = K$ und $\lambda_2 = L > K$, und

$$L \pm K = 2\nu M$$

gilt. Die breitesten Resonanzbereiche mit den größten Schwingungsamplituden sind die erster Ordnung, daher beschränken wir die weitere Betrachtung auf diesen Fall. Aus den ersten drei Näherungslösungen lassen sich durch Einsetzen in die Verzweigungsgleichungen (6) wie in [4] die wichtigsten Eigenschaften der Lösungen ableiten.

Bei einfacher Resonanz ist λ_i nicht ganzzahlig und daher $r_3 = r_4 = 0$. Bei einfacher Resonanz erster Ordnung kann $K = M$ gleich Eins gewählt werden. Neben den erzwungenen Schwingungen, die im Takte der äußeren Momente vor sich gehen, ergeben sich nach (5) parametererregte Schwingungen, die in erster Näherung harmonisch sind von der Form

$$y_k(s) = r_1 \cos s + r_2 \sin s,$$

also die halbe Frequenz der äußeren Momente und die Amplitude $A = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ haben.

Berechnet man die ersten drei Näherungen und setzt sie in (6) ein, so erhält man zwei gekoppelte kubische Gleichungen der Gestalt

$$(7) \quad [F_k A^2 + \alpha] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \frac{p_{kk}}{2} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} + b_{kk} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_k \\ q_k \end{pmatrix} = 0$$

zur Bestimmung von r_1, r_2 . Hierbei wird zur Abkürzung für $i = 1, 2$

$$F_i = -\frac{3}{4} \frac{(t_i - 1)^4 + 8 \delta^3}{(t_i^2 + 1)^3} f_2$$

$$+ \left[\left(\frac{2}{x_i^2} + \frac{1}{x_i^2 - 4 \lambda_i^2} \right) T_{ii}^2 + \left(\frac{2}{x_j^2} + \frac{1}{x_j^2 - 4 \lambda_j^2} \right) T_{ji} T_i \right] e_2 g_2,$$

$$p_{ii} = \frac{t_1 + t_2}{t_i - t_j} p,$$

$$b_{ii} = \frac{t_j}{t_i - t_j} (b_1 + d_1) + \frac{t_i}{t_j - t_i} b_2 + \frac{(1 - t_i)(1 + t_j)}{t_i - t_j} d_2$$

gesetzt, dabei gilt (3), und es ist

$$T_i = -\frac{\delta(1 + t_j)}{4(1 + \delta^2)}, \quad T_{i\nu} = \frac{(1 - t_i)(1 - t_\nu)^2 - 4 \delta^2}{8 t_\nu^2 (1 + \delta^2)} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2 \\ \nu = 1, 2 \end{matrix} \right).$$

Die Dämpfungsgrößen b_{ii} sind, wie mit (2) folgt, sicher negativ, da die Dämpfungskoeffizienten β_n, δ_n und damit b_n, d_n als positiv vorausgesetzt werden können. Die Ausdrücke q_k, q'_k , die wegen ihrer großen Länge nicht angegeben werden, erhalten die Fourierkoeffizienten der äußeren Momente und verschwinden mit diesen.

Bei fehlenden äußeren Momenten lassen sich aus (7) neben der trivialen Lösung $A = 0$ die beiden Lösungen

$$(8) \quad F_k A_\pm^2 = -\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} p^2 - b_{kk}^2}$$

gewinnen, die in den Grenzpunkten

$$(9) \quad \alpha_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} p^2 - b_{kk}^2}$$

des Resonanzbereiches von der trivialen Lösung abzweigen (Abb. 2); dabei wird stets der größere der beiden Amplitudenwerte A_{\pm} mit A_+ bezeichnet.

In den Grenzpunkten ergibt sich neben der Amplitude Null die „Grenzamplitude“

$$(10) \quad A_G = \frac{1}{|F_k|} \sqrt{\frac{\delta^2}{1 + \delta^2} p^2 - 4 b_{kk}^2}.$$

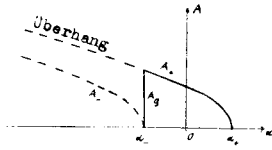


Abb. 2

Sie stellt eine einfache Kenngröße für die möglichen Schwingungsauslässe dar; die genaue Größtamplitude kann infolge der unbekanntenen Größe des „Schwingungsüberhanges“ über den Resonanzbereich (α_- , α_+) hinaus nicht berechnet werden.

Bei Vorhandensein äußerer Momente ergeben sich zur Duffinggleichung analoge Resonanzkurven, deren Skelettlinien mit den durch (8) dargestellten Resonanzkurven übereinstimmen [4], so daß die Beschränkung auf den formelmäßig noch zugänglichen Fall fehlender äußerer Momente das wesentliche Bild der Parameterresonanz wiedergibt.

Das Auftreten einer Parameterresonanz wurde von G. R. Goldsbrough [2] am Modell einer Einzylindermaschine experimentell nachgewiesen.

4. Kombinationsresonanz

Bei Kombinationsresonanz sind die parameterregten Drehschwingungen nach (5) schon in erster Näherung unharmonisch von der Form

$$y_1 = r_1 \cos Ks + r_2 \sin Ks, \quad y_2 = r_3 \cos Ls + r_4 \sin Ls,$$

wenn man etwa $k=1$, $l=2$ und damit

$$(11) \quad \lambda_1 = K, \quad \lambda_2 = L$$

wählt. Im *Summenfall*

$$K + L = 2M$$

liegt die Kreisfrequenz $\bar{\omega}_s$ der Summenresonanz in der Mitte zwischen den Kreisfrequenzen $\bar{\omega}_{1,2}$ der einfachen Resonanzen erster Ordnung, die zu $\lambda_1 = K$ bzw. $\lambda_2 = L$ gehören, denn es ist

$$(12) \quad \frac{\bar{\omega}_1}{K} = \frac{\bar{\omega}_2}{L} = \frac{\bar{\omega}_s}{M}.$$

Die vier Verzweigungsgleichungen (6) nehmen, wenn die umfangreichen Ausdrücke für die ersten drei Näherungen eingesetzt werden und der Sonderfall $L=3K$ einer „inneren Resonanz“ ausgeschlossen wird, nach längerer Rechnung die Gestalt an

$$(13) \quad \begin{cases} [F_1 A^2 + F_1' B^2 + K^2 \alpha] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + Kb_{11} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} + \frac{K^2 + L^2}{4} p_{12} \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} = 0, \\ [F_2 B^2 + F_2' A^2 + L^2 \alpha] \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + Lb_{22} \begin{pmatrix} r_4 \\ -r_3 \end{pmatrix} + \frac{K^2 + L^2}{4} p_{21} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} = 0, \end{cases}$$

dabei sind $A = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ und $B = \sqrt{r_3^2 + r_4^2}$ die Partialamplituden, und neben den schon eingeführten Größen ist noch mit (3)

$$(14) \quad p_{ij} = \frac{2 t_i}{t_j - t_i} p,$$

$$F'_i = \delta \frac{t_i^2 - 1 + 4 \delta^2 t_i}{(t_j - t_i)^3} f_2 + 2 \left\{ \left[\frac{1}{x_i^2 - (K+L)^2} + \frac{1}{x_i^2 - (K-L)^2} \right] T_i^2 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{x_j^2 - (K+L)^2} + \frac{1}{x_j^2 - (K-L)^2} \right] T_{ij} T_j + \frac{1}{x_i^2} T_{ii} T_{ij} + \frac{1}{x_j^2} T_{jj} T_i \right\} e_2 g_2.$$

Die Gleichungen (13) haben die triviale Lösung $A = B = 0$. Für die nichttriviale Lösbarkeit lassen sich die Bedingungen

$$(F_1 A^2 + F'_1 B^2 + K^2 \alpha) L b_{22} = (F_2 B^2 + F'_2 A^2 + L^2 \alpha) K b_{11},$$

$$(F A^2 + F'_1 B^2 + K^2 \alpha) (F_2 B^2 + F'_2 A^2 + L^2 \alpha) = \frac{(K^2 + L^2)^2}{16} p_{12} p_{21} - K L b_{11} b_{22}$$

ableiten, aus denen mit $b_{11} b_{22} > 0$ und (14) die Beziehungen

$$(15) \quad F_1 A^2 + F'_1 B^2 + K^2 \alpha = \pm K b_{11} \sqrt{\quad}, \quad F_2 B^2 + F'_2 A^2 + L^2 \alpha = \pm L b_{22} \sqrt{\quad},$$

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{\frac{(K^2 + L^2)^2 p^2}{16 K L (1 + \delta^2) b_{11} b_{22}} - 1}$$

folgen. Durch (skalare) Multiplikation der ersten Gleichung (13) mit $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$, der zweiten Gleichung (13) mit $\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r_4 \\ -r_3 \end{pmatrix}$ und geeignete Kombination ergibt sich ferner die Beziehung

$$(16) \quad B^2 = \frac{K b_{11}}{L b_{22} t_1^2} A^2.$$

Die Gleichungen (15) führen mit (16) auf die Amplitudenformeln

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{F_1 F_2 - F'_1 F'_2}{K^2 F_2 - L^2 F'_1} A_{\pm}^2 = -\alpha \pm \sqrt{\frac{(K^2 + L^2)^2 p^2}{16 K^2 L^2 (1 + \delta^2)} - \frac{b_{12} b_{22}}{K L}}, \\ B^2 = \frac{K^2}{L^2 t_1^2} A^2 \end{cases}$$

und die Bedingungen

$$(18) \quad b_{11} : b_{22} = K : L$$

„gleicher Hauptdämpfungen“ sowie

$$(19) \quad t_1^2 = \frac{K^2 (K^2 F_2 - L^2 F'_1)}{L^2 (L^2 F_1 - K^2 F'_2)};$$

dabei wird vorausgesetzt, daß die Nenner nicht verschwinden.

Falls das Verhältnis der Dämpfungsgrößen und der Wellenabschnitte nicht gerade so ist, daß die Bedingungen (18), (19) erfüllt sind, so findet man in analoger Weise periodische Lösungen, wenn man anstelle der Frequenzvariation α zwei Parameter α_1, α_2 einführt, die vermittelt

$$(20) \quad \frac{\alpha_1}{K} + \frac{\alpha_2}{L} = 2 M \alpha$$

mit der Frequenzvariation zusammenhängen. In den Formeln ist lediglich K_α^2 durch α_1 und L_α^2 durch α_2 zu ersetzen; setzt man die so abgeänderten Gleichungen (15) in (20) ein und benutzt man (16), so erhält man die Amplitudenformeln

$$(21) \quad \left[\frac{F_1}{K} + \frac{F_2}{L} + \frac{K b_{11}}{L b_{22} l_1^2} \left(\frac{F_1'}{K} + \frac{F_2'}{L} \right) \right] A_\pm^2 = -2 M \alpha \pm (b_{11} + b_{22}) \sqrt{\frac{(K^2 + L^2)^2 p^2}{16 K L (1 + \delta^2) b_{11} b_{22}}} - 1$$

sowie (16), die insbesondere unter den Bedingungen (18), (19) in (17) übergehen.

Durch (21) sind zwei parabolische Resonanzkurven gegeben, die Bereichsgrenzen und Grenzamplituden lassen sich entsprechend (9), (10) bestimmen.

Im Differenzfall $L - K = 2 M$ ergeben sich in analoger Weise Amplitudenformeln, in denen der erste Ausdruck im Radikanden negativ ist und die daher nicht auf reelle Amplituden führen. Die gewonnenen Formeln (8), (9), (17), (21) hängen nicht einzeln von K, L, M , sondern nur von K/M und L/M ab, wie man bei Division durch M^2 oder M^4 erkennt. Daher gehört zu zwei beliebigen (in rationalem Verhältnis $K:L$ stehenden) einfachen Resonanzfrequenzen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ vermittelt

$$\bar{\omega}_s = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$$

eine Summenfrequenz mit Schwingungsamplituden, die unabhängig davon sind, ob zu den Frequenzen nach (12) kleine oder große ganze Zahlen K, L, M gehören. Für die folgenden Beispiele werden nur der einfacheren Berechnung halber solche Größen $\delta = l_2/2 l_1$ gewählt, die auf kleine ganze Zahlen K, L, M führen.

5. Beispiele

Bei den numerischen Rechnungen wird in F_i, F_i' durch $e_2 = 0$ der Einfluß der Längsbewegung auf die Drehschwingungen vernachlässigt. Nimmt man etwa gleiche äußere sowie gleiche innere Dämpfungen an, $b_1 = b_2$ und $d_1 = d_2$, und wählt man ein bestimmtes Verhältnis $b_1 : d_1 = \gamma$, so erhält man ein bestimmtes Verhältnis $b_{11} : b_{22} = \Gamma$ und kann alle Amplitudenformeln (8), (17), (21) mit gewissen Konstanten k_v einheitlich in der Gestalt

$$(22) \quad k_1 f A_\pm^2 = -\alpha \pm \sqrt{k_2 p^2 - k_3 d_1^2}$$

schreiben; dabei wurde

$$f = -f_2$$

wie für $k=2$. In Abb. 4 sind in derselben Weise wie in Abb. 3 die Resonanzkurven für $k=1$ gezeichnet; man erkennt, daß

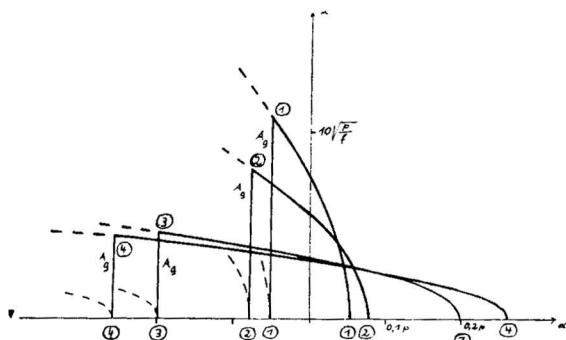


Abb. 4

mit wachsendem δ die Resonanzbereiche breiter, die Amplituden dagegen kleiner werden. In Tab. II 3 a und II 3 b sind die Koeffizienten für gleiche Werte von γ und nur wenig verschiedene Werte von δ angegeben; es zeigt sich, daß auch die Koeffizienten nur wenig verschieden sind, so daß die Resonanzkurven im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammenfallen.

Ein Vergleich der Tabellen II mit den entsprechenden

Spalten der Tab. I zeigt folgendes. Die Resonanzbereiche sind bei Kombinationsresonanz wesentlich breiter als bei einfacher Resonanz, und zwar das Neunzehnfache im Falle des ersten Beispiels, das Elffache im zweiten Falle, das Dreifache im dritten Falle und etwa das Doppelte im vierten Falle. In ähnlicher Weise verhalten sich die Amplituden; die Grenzamplituden sind bei einfacher Resonanz ungefähr so groß wie bei der Partialamplitude B der Kombinationsresonanz, während bei der Partialamplitude A der Kombinationsresonanz die Grenzamplitude etwa siebenmal so groß ist wie bei einfacher Resonanz. Für das dritte Beispiel sind in Abb. 5 mit einheitlichem Maßstab die Resonanzkurven bei Kombinationsresonanz (in der Mitte) und bei einfacher Resonanz (links für $k=1$, rechts für $k=2$) dargestellt. Die Resonanzkurven des rechten Bereiches fallen im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit der Achse zusammen. Die Abbildung zeigt deutlich die große Bedeutung der Kombinationsresonanz, der zuweilen eine untergeordnete Rolle zugeschrieben wurde.

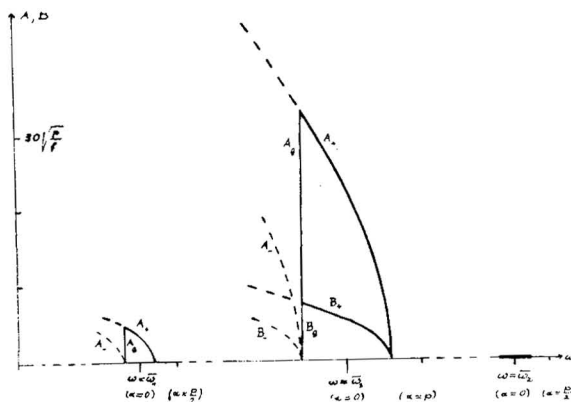


Abb. 5

In Tab. III werden zu dem dritten Beispiel aus Tab. I, also zu $\delta = l_2/2 l_1 = 0,51601$ und damit $K=5$, $L=13$, $M=9$ verschiedene Dämpfungsverhältnisse untersucht. Für die verschiedenen in der ersten Zeile angegebenen Werte von $\gamma = b_1/d_1$ stehen in der zweiten Zeile die zugehörigen Werte $\Gamma = b_{11}/b_{22}$. Zum Vergleich ist in der ersten Spalte der Wert $\gamma = 1,0104$ der Tab. I aufgenommen, für den $\Gamma = K/L$ und damit (18) erfüllt ist. In Abb. 6 sind für drei der berechneten Beispiele die Resonanzkurven angegeben. Man erkennt, daß die Grenzamplituden A_G und die Resonanzbreiten in gleicher Weise vom Dämpfungsverhältnis γ abhängen; für $\gamma = 0,1$ ergeben sich gegenüber $\gamma = 10$ etwa die anderthalbfachen Werte, während das Verhältnis $B:A$ für $\gamma = 10$ etwa ein Drittel, für $\gamma = 0,1$ weniger als ein Sechstel beträgt.

In den berechneten Beispielen wurden der Erregungsparameter p , die Größe f und teilweise auch der Dämpfungsparameter d_1 offen gelassen, so

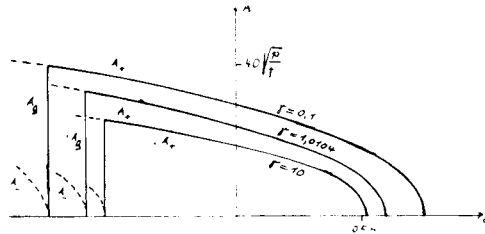


Abb. 6

daß die gewonnenen Ergebnisse für beliebige Werte dieser Größen gelten. Auch in den Abbildungen ist lediglich das Verhältnis der Dämpfung zur Erregung festgelegt, dagegen treten p und f als Maßstabfaktoren auf.

	1	2	3	4
$\delta = l_2/2 l_1$	0,12055	0,17920	0,51601	0,83238
K	3	3	5	7
L	13	11	13	17
$M = K + L/2$	8	7	9	12
$\gamma = b_1/d_1$	0,1842	0,3769	1,0104	1,1119
$\Gamma = b_{11}/d_{11}$	0,2308	0,2727	0,3846	0,4118
k_1	0,000381	0,000776	0,00108	0,000853
k_2	1,2833	0,9397	0,4397	0,2979
k_3	0,04432	0,07189	0,07756	0,04736
k_4	1,0132	0,8671	0,5931	0,4881
k_5	72,93	49,04	33,06	33,83
k_{5B}	14,92	11,19	7,748	6,529
$B:A$	0,2046	0,2282	0,2343	0,1930

Tab. I. Kombinationsresonanz für verschiedene Werte von δ und $\Gamma = K/L$

	$k = 1$	$k = 2$
$k_1 = F_k$	0,000902	1,669
$k_2 = \delta^2/4 (1 + \delta^2)$	0,003549	0,003549
$k_3 = b_{kk}^2/d_1^2$	0,03992	7,490
k_4	0,05328	0,05328
k_5	10,869	0,2527

Tab. II, 1. Einfache Resonanz für $\delta = 0,12$ und $\gamma = 0,1842$

	$k=1$	$k=2$
$k_1 = F_k$	0,002514	1,745
$k_2 = \delta^2/4 (1 + \delta^2)$	0,007846	0,007846
$k_3 = b_{kk}^2/d_1^2$	0,6466	8,701
k_4	0,07922	0,07922
k_5	7,939	0,3013

Tab. II, 2 Einfache Resonanz für $\delta=0,18$ und $\gamma=0,3769$

	$k=1$	$k=2$
$k_1 = F_k$	0,01815	2,232
$k_2 = \delta^2/4 (1 + \delta^2)$	0,05000	0,05000
$k_3 = b_{kk}^2/d_1^2$	1,9388	13,166
k_4	0,2000	0,2000
k_5	4,695	0,4233

Tab. II, 3 a. Einfache Resonanz für $\delta=0,5$ und $\gamma=1,0104$

	$k=1$	$k=2$
$k_1 = F_k$	0,01905	2,281
$k_2 = \delta^2/4 (1 + \delta^2)$	0,05321	0,05321
$k_3 = b_{kk}^2/d_1^2$	1,9392	13,165
k_4	0,2063	0,2063
k_5	4,654	0,4253

Tab. 3 b. Einfache Resonanz für $\delta=0,52$ und $\gamma=1,0104$

	$k=1$	$k=2$
$k_1 = F_k$	0,02706	3,579
$k_2 = \delta^2/4 (1 + \delta^2)$	0,09756	0,09756
$k_3 = b_{kk}^2/d_1^2$	2,3063	13,728
k_4	0,2609	0,2609
k_5	4,391	0,3818

Tab. II, 4. Einfache Resonanz für $\delta=0,8$ und $\gamma=1,1119$

γ	1,0104	1	0,9	0,6	0,1	1,2	1,4	10
Γ	0,3846	0,3820	0,3458	0,3052	0,1774	0,4144	0,4435	0,8228
k_1	0,00108	0,00108	0,00102	0,00095	0,00075	0,00113	0,00118	0,00180
k_2	0,4397	0,4410	0,4620	0,4924	0,6894	0,4258	0,4144	0,3562
k_3	0,07756	0,07716	0,06531	0,05444	0,03161	0,09000	0,1038	1,6327
k_4	0,5931	0,5940	0,6079	0,6276	0,7426	0,5837	0,5758	0,5338
k_5	33,06	33,13	34,07	35,24	39,87	32,36	31,69	25,67
k_{5B}	7,748	7,736	7,570	7,357	6,345	7,870	7,975	8,798
B/A	0,2343	0,2335	0,2222	0,2087	0,1591	0,2432	0,2516	0,3427

Tab. III. Kombinationsresonanz für $\delta=0,51601$, d. h. $K=5$, $L=13$, und verschiedene Werte γ bzw. Γ

L I T E R A T U R

[1] C. B. Biezeno, R. Grammel: *Technische Dynamik*. 2. Aufl. Berlin, 1953
 [2] G. R. Goldsbrough: *Torsional vibrations in reciprocating engine shafts*. Proc. Roy. Soc. London A 109 (1925), 99–119 & A 113 (1927), 259–271
 [3] R. Grammel: *Nichtlineare Schwingungen mit unendlich vielen Freiheitsgraden*. Publ. sci. techn. Ministère de l'Air, Paris 281 (1953), 45–59
 [4] G. Schmidt: *Über nichtlineare Drehschwingungen rotierender Wellen*. Rev. Méc. Appl. 1967, Heft 3 (im Druck)
 [5] F. Weidenhammer: *Rheolineare Drehschwingungen in Kolbenmotoren*. Ing. — Arch. 23 (1955), 262 – 269