PUBLICATIONS DE INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21) 1967, p. 99–109

FAST INVERTIERBARE PRIMIDEALE DER KOMMUTATIVEN RINGE[1])

Veselin Perić

(Vorgelegt am 27. Mai 1966)

In der Arbeit [9] habe ich bewiesen, dass jedes echte fast inveritierbare Primideal P eines Noetherschen Ringes R mit Einselement ein minimales reguläres Primideal von R ist ([9], Satz 1.7). Im dritten Abschnitt vorliegender Arbeit zeige ich unter denselben Voraussetzungen über den Ring R, dass (diese notwendige Bedingung nicht hinreichend ist, sondern, dass) ein echtes Primideal P von R dann und nur dann fast invertierbar ist, wenn P ein minimales reguläres Primideal von R und R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist (Satz 3.5).

Dazu werden noch verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen für die Fast-Invertierbarkeit eines echten Primidiales P von R angeführt. Insbesondere wird ein enger Zusammenhang zwischen der Fast-Invertierbarkeit eines Primideals P von R und der der zu P gehörigen Primärideale Q festgestellt.

Anschliessend werden der Ring R und die Quotientenringe R_P von R in Bezug auf die ganze Abgeschlossenheit untersucht. Es stellt sich heraus, dass ein Noetherscher Ring R mit Einselement dann und nur dann ganz abgeschlossen ist, wenn für jedes minimale reguläre Primideal P von R der zugehörige Quotientenring R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist und wenn dazu jedes reguläre echte Hauptideal (a) von R nur die isolierten Primärkomponenten hat (S. Sätze 3.7, 3.8 u. 3.9). Daraus ergeben sich zwei bekannte Tatsachen über die ganz abgeschlossenen Noetherschen Ringe und eine einfache Charakterisierung der Dedekindschen Integritätsbereiche (S. Sätze 3.10, 3.11 u. Satz 3.12).

Für alle diese Untersuchungen war die Behandlung zweier Klassen der Noetherschen Ringe erforderlich, die von den Dedekindschen Ordnungen ohne Nullteiler, b.z.w. von den Dedekindschen Integritätsbereichen nur insofern abweichen, dass sie auch echte Nullteiler enthalten dürfen. Diese im zweiten Abschnitt vorliegender Arbeit durchgeführte Behandlung ging etwas über unsere Verwendungszwecke hinaus.

Die meisten Beweise stützen sich auf eine natürliche Beziehung zwischen der Fast-Invertierbarkeit eines jeden Ideals A von R und der Invertierbarkeit der Erweiterrung A^e von A in einem passenden Quotientenring R_S von R, die im ersten Abschnitt dieser Arbeit festgelegt wurde (Sätze 1.1 u. 1.2). Diese Beziehung ermöglicht noch das Zurückführen der Frage nach der Fast-Invertierbarkeit von A auf die von den isolierten Primärkomponenten von A (S. Satz 1.3).

---

[1]) Diese Arbeit ist ein Teil meiner im März 1966 an der Universität Zagreb verteidigten Doktorarbeit.

Unter einem Ring R wird stets ein assoziativer und kommutativer Ring mit Einselement verstanden. Die nicht erklärten Begriffe und Bezeichnungen werden als allgemein bekannt vorausgesetzt, oder sind der Arbeit [9] entnommen worden.

1. Erweiterungsideale der fast invertierbaren Ideale

S sei ein multiplikatives System von R, und $h: R \to R_S$ der natürliche Homomorphismus von R in den Quotientenring R_S. Dann ist der Kern K von h gleich der isolierten S-Komponente $(0)_S$ des Nullideals (0) von R.

Da jedes reguläre Element t von R durch h in ein reguläres Element $h(t)$ von R_S abgebildet wird, ist es leicht zu sehen, dass sich h auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus

$$\bar{h}: Q(R) \to Q(\bar{R}) = Q(R_S) \quad (\bar{R} = h(R)) \tag{1.1}$$

des vollen Quotientenringes $Q(R)$ von R in den vollen Quotientenring $Q(R_S)$ von R_S, und zwar durch:

$$\bar{h}(r/t) =_{\mathrm{Def.}} h(r)/h(t) \; (r/t \in Q(R)) \tag{1.2}$$

erweitern lässt.

Wir werden weiterhin anstatt $\bar{h}$ einfach h schreiben.

1.1. Satz. A sei ein endlich erzeugbares reguläres Ideal, und S ein multiplikatives System eines Ringes R. Falls A^e das Erweiterungsideal von A in R_S bezeichnet, so sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

$$(A^{-1} \cdot A) \cap S \neq \varnothing, \tag{1.3}$$

$$(A^e)^{-1} \cdot A^e = R_S. \tag{1.4}$$

Beweis. Da $A^{-1} \cdot A$ ein ganzes Ideal von R ist, die Bedingung (1.3) ist mit der Bedingung

$$(A^{-1} \cdot A)^e = R_S \tag{1.4'}$$

gleichbedeutend (Vgl. [10], p. 223, Th. 15).

Es ist leicht zu sehen, dass aus (1.4'), also aus (1.3) die Relation (1.4) folgt. Nach (1.4') ist nämlich auf Grund von (1.1)

$$R_S = (A^{-} \cdot A)^e = R_S \cdot h(A^{-1} \cdot A) = R_S \cdot h(A^{-1}) \cdot h(A) = h(A^{-1}) \cdot A^e,$$

so dass, wegen

$$h(A^{-1}) \subseteq Q(R_S)$$

die Bedingung (1.4) sicherlich erfüllt ist.

Die Umkehrung ist nicht so trivial und braucht sogar nicht richtig zu sein, falls man die Endlichkeitsbedingung für A weglässt, wie wir es später sehen werden (S. 2. Abschnitt, Ende).

Es sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ein reguläres Ideal von R. Falls die Bedingung (1.4) erfüllt ist, so gibt es die Elemente

$$\bar{b_i} \in (A^e)^{-1} \subseteq Q(R_S) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

mit

(1.6) $$\sum_1^n \bar{b}_i \cdot h(a_i) = 1 \text{ (Einselement von } R_S).$$

Auf Grund von (1.5) ist insbesondere

$$\bar{b}_i \cdot h(a_j) \in R_S \quad (i,\ j = 1, \ldots, n)$$

und deswegen gibt es ein Element $s \in S$ derart, dass

(1.7) $$h(s) \cdot \bar{b}_i \cdot h(a_j) \in h(R) \quad (i,\ j = 1, \ldots, n).$$

Nach (1.7) ist für jedes und insbesondere für jedes reguläre Element $a \in A$

$$h(s) \cdot \bar{b}_i \cdot h(a) = h(r_i) - r_i \in R \quad (i = 1, \ldots, n),$$

also

(1.8) $$h(s) \cdot \bar{b}_i = h(r_i/a), \quad r_i \in R \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Aus (1.7) und (1.8) ergibt sich

$$h(r_i/a) \cdot h(a_j) = h(b_{ij}), \quad b_{ij} \in R \quad (i,\ j = 1, \ldots, n)$$

und daraus folgt

$$r_i \cdot a_j = a \cdot b_{ij} + k_{ij}, \quad k_{ij} \in (0)_S \ (i,\ j = 1, \ldots, n).$$

Es gibt aber $s' \in S$ mit $s' \cdot k_{ij} = 0$ $(i,\ j = 1, \ldots, n)$. Infolgedessen gilt

$$a_j \cdot (s' \cdot r_i)/a = s' \cdot b_{ij} \in R \ (i,\ j = 1, \ldots, n),$$

und somit ist

(1.9) $$(s' \cdot r_i)/a \in A^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

weil

$$(s' \cdot r_i)/a \in Q(R) \ (i = 1, \ldots, n).$$

Aus (1.6) auf Grund von (1.8) folgt

$$\sum_1^n h(s' \cdot r_i/a) \cdot h(a_i) = h(s \cdot s'),$$

und daraus wegen (1.9) ergibt sich

(1.10) $$\sum_1^n (s' \cdot r_i/a) \cdot a_i \equiv s \cdot s' \ (\text{mod. } (0)_S).$$

Nehmen wir nun an, die Bedingung (1.3) wäre nicht erfüllt. Dann gäbe es ein Primideal P mit der Eigenschaft

(1.11) $$A^{-1} \cdot A \subseteq P, \quad P \cap S = \varnothing.$$

Wegen $P \cap S = \varnothing$ wäre $(0)_S \subseteq P$, so dass aus (1.10) wegen (1.9) und (1.11) $s \cdot s' \in P$ folgen würde. Das widerspricht aber dem zweiten Teil der Relation (1.11); denn es ist ja $s \cdot s' \in S$.

Damit ist der Satz bewiesen.

1.2. Satz. R sei ein Noetherscher Ring, $P_1, \ldots, P_r$ seien sämtliche isolierte Primideale eines echten regulären Ideals A von R und es sei

(1.12) $$S = R \setminus \bigcup_1^r P_i.$$

Das Ideal A ist dann und nur dann fast invertierbar, wenn das Erweiterungsideal A^e von A in R_S invertierbar ist.

Beweis. Das ideal $A^{-1} \cdot A$ von R ist in der Vereinigungsmenge $\bigcup_1^r P_i$ der echten Primideal $P_i\,(i=1, \ldots, r)$ dann und nur dann enthalten, wenn es in einem dieser Ideale enthalten ist (S. [7], p. 12, Prop. 6). Infolgedessen ist für das echte reguläre Ideal A und das multiplikative System (1.12) die Bedingung (1.3) genau dann erfüllt, wenn A fast invertierbar ist.

Die Behauptung folgt nun aus 1.1.

Der folgende Satz zeigt, wie sich die Frage nach der Fast-Invertierbarkeit eines regulären Ideals A von R auf die Frage nach der Fast-Invertierbarkeit der isolierten Primärkomponenten von A zurückführen lässt. Später werden wir sehen, dass diese letzte Frage nicht etwa mit der entsprechender Frage für die isolierten Primideale von A gleichbedeutend ist.

1.3. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und A ein reguläres Ideal von R. Das Ideal A ist genau dann fast invertierbar, wenn für jedes isolierte Primideal P von A die zu P gehörige Primärkomponente Q von A fast invertierbar ist.

Beweis. Die Behauptung ist trivial, falls $A=R$. Nun nehmen wir an, A sei ein echtes reguläres Ideal von R.

Ist P ein beliebiges isoliertes Primideal von A, $S=R\backslash P$ und Q die zu P gehörige Primärkomponente, so ist das Ideal Q regulär, und es ist $A^e=Q^e$ (S. [10], p. 225, Th. 17). Nach Satz 1.1. ist für A, P und das multiplikative System $S=R\diagdown P$ die Bedingung (1.3) genau dann erfüllt, wenn das Ideal $A^e=Q^e$ von R_P invertierbar, also nach Satz 1.2 wenn das Ideal Q von R fast invertierbar ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

2. Dedekindsche Ordnungen. Dedekindsche Ringe

2.1. Definition. Einen Ring (Integritätsbereich) R werden wir Dedekindsche Ordnung (ohne Nullteiler) nennen, falls:

1. R Noethersch ist;
2. Jedes reguläre echte Primideal P von R maximal ist.

(Für den Fall, dass R ein Integritätsbereich ist vgl. z. B. [6]).

2.2. Satz. Ein echtes reguläres Primideal P einer Dedekindschen Ordnung R ist dann und nur dann invertierbar, wenn jedes zu P gehörige Primärideal Q von R eine Potenz des Ideals P ist, die dann eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Ist P invertierbar und n die kleinste natürliche Zahl, für die $P^n \subseteq Q$, so ist $Q=P^n$.

Für $n=1$ gibt es nichts zu beweisen. Es sei nun $n>1$. Dann ergibt sich aus $P^n \subseteq Q \subseteq P$ durch Multiplikation mit P^{-1} die folgende Inklusion:

$$P^{n-1} \subseteq P^{-1} \cdot Q \subseteq R.$$

Dabei lässt sich das zweite Zeichen $\subseteq$ nicht durch Gleichheitszeichen ersetzen; denn aus $P^{-1} \cdot Q=R$ folgt $Q=P$ im Gegensatz zu $n>1$.

Deswegen ist das echte Ideal $P^{-1}\cdot Q$ von R mindestens in einem echten Primideal P' von R enthalten. Da P maximal und $P\subseteq P'$ ist, so gilt $P=P'$, also

$$P^{n-1}\subseteq P^{-1}\cdot Q\subseteq P.$$

Mit derselben Schlussweise gelangt man nach $n-1$ Schritten zu der Inklusion

$$P\subseteq P^{-(n-1)}\cdot Q\subseteq P,$$

aus der sich unmittelbar die behauptete Gleichung $Q=P^n$ ergibt.

Falls noch $Q=P^m$ ist, so ist $m\geqslant n$. Wäre $m>n$, so würde aus $P^m=P^n$ $P^{m-n}=R$ folgen, im Gegensatz zu der Annahme, dass P ein echtes Ideal von R ist.

Ist umgekehrt jedes zu P primäre Ideal Q von R eine P-Potenz, so ist das echte reguläre Primideal P von R invertierbar.

Für jedes reguläre Element $a\in P$ ist P nämlich ein isoliertes Primideal von (a); denn jedes echte reguläre Primideal von R ist ein maximales, also ein minimales reguläres Primideal von R. Die zu P gehörige Primärkomponente Q von (a) ist nach 1.3. fast invertierbar, und daher invertierbar (S. [9], Satz 1.5). Da $Q=P^n$, so ist auch das Ideal P invertierbar.

2.3. Satz. Ein echtes reguläres Primideal P einer Dedekindschen Ordnung R ist genau dann invertierbar, wenn R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist.

(Für einen Integritätsbereich vgl. [6], p. 483, Th. 1; p. 486, Th. 4).

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass das Erweiterungsideal P^e von P in R_P nicht nur das einzige maximale, sondern auch das einzige echte reguläre Primideal von R_P ist.

Ist R_P ein Integritätsbereich, so ist P^e dann und nur dann invertierbar, wenn R_P ganz abgeschlossen ist (S. [10], p. 275, Th. 13).

Da P genau dann fast invertierbar, also invertierbar (S. [9], Satz 1.5) ist, wenn P^e invertierbar ist (Satz 1.2), genügt es noch zu zeigen, dass R_P ein Integritätsbereich ist, falls P^e invertierbar ist.

Weil R_P Noethersch und P^e das einzige maximale Primideal von R_P ist, so ist die Durchschnittsmenge aller P^e — Potenzen gleich dem Nullideal von R_P (S. [10], p. 229, Th. 20). Ist P^e invertierbar, so ist diese Durchschnittsmenge ein Primideal von R_P (S. [1], Lemma), also ist R_P ein Integritätsbereich.

Wir führen nun einen Satz und ein Beispiel an, die zeigen, dass der Quotientenring R_S eines Noetherschen Ringes R nicht eine Dedekindsche Ordnung zu sein braucht, selbst wenn R eine Dedekindsche Ordnung ist.

2.4. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und S ein multiplikatives System von R. Der Quotientenring R_S von R ist genau dann eine Dedekindsche Ordnung, wenn für jedes echte Primideal P von R mit $P\cap S=\varnothing$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

1. Für jedes in P echt enthaltene Primideal P_1 von R gibt es ein Primideal P' von Nullideal derart, dass $P_1\subseteq P'$ und $P'\cap S=\varnothing$ ist.

Für ein reguläres Primideal P von R mit $P'\cap S=\varnothing$ ist die Bedingung 1. mit folgender Bedingung äquivalent:

2. P ist ein minimales reguläres Primideal von R.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für jedes reguläre Primideal P von R mit $P \cap S = \varnothing$ die Bedingungen 1. und 2. gleichbedeutend sind.

Ist P ein minimales reguläres Primideal von R, so ist jedes in P echt enthaltene Primideal P_1 von R ein isoliertes Primideal des Nullideals, so dass die Bedingung 1. mit $P' = P_1$ erfüllt ist.

Ist umgekehrt für ein reguläres Primideal P von R mit $P \cap S = \varnothing$ die Bedingung 1. erfüllt, so kann P kein reguläres Primideal P_1 echt enthalten. Da wegen $P \cap S = \varnothing$ das Ideal P ein echtes reguläres Primideal von R ist, so ist P ein minimales reguläres Primideal von R.

Und nun zum Beweis der ersten Behauptung.

Die Bedingung 1. ist hinreichend. $\bar{P}$ sei ein echtes reguläres Primideal und $\bar{P}_1$ ein beliebiges in $\bar{P}$ echt enthaltenes Primideal von R_S. Dann ist $\bar{P} = P^e$ und $\bar{P}_1 = P_1^e$, wobei P und P_1 echte Primideale von R mit $P_1 \subset P$ und $P \cap S = \varnothing$ sind. Nach der Bedingung 1. gibt es ein Primideal P' vom Nullideal mit $P_1 \subseteq P'$ und $P' \cap S = \varnothing$. Dann ist aber P'^e ein Primideal von $(0)^e$, dem Nullideal von R_S, und wegen $P_1^e \subseteq P'^e$ ist $\bar{P}_1$ ein singuläres Primideal von R_S. Also ist $\bar{P}$ ein minimales reguläres Primideal von R_S, d.h. R_S ist eine Dedekindsche Ordnung, weil R_S Noethersch ist.

Die Bedingung 1. ist notwendig. P sei ein Primideal von R mit $P \cap S = \varnothing$ und P_1 ein beliebiges in P echt enthaltenes Primideal von R. Dann ist P^e ein echtes und P_1^e ein in P^e echt enthaltenes Primideal von R_S. Da R_S eine Dedekindsche Ordnung ist, kann P_1^e nicht regulär sein. Es gibt also ein Primideal P'^e von Nullideal in R_S, so dass $P_1^e \subseteq P'^e$. Dann ist aber P' ein Primideal von (0) in R mit $P_1 \subseteq P'$ und $P' \cap S = \varnothing$.

Damit ist der Satz bewiesen.

2.5. Beispiel. Aus dem Polynomring in $n (n \geqslant r+1 > 4)$ Unbestimmten lässt sich leicht ein Noetherscher Ring R mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. Es gibt echte reguläre Primideale von R;

2. Das Nullideal von R hat nur zwei Primideale P und P_{r-1}, wobei Ring $P = r-1 > 2$ ist.

Wegen 2. ist P_{r-1} das einzige isolierte Primideal von (0). Mann kann sogar den Ring R so wählen, dass P_{r-1} die isolierte Primärkomponente vom Nullideal wird.

Da es echte reguläre Primideale von R gibt, so gibt es mindestens ein minimales reguläres Primideal P' von R. Man kann zu dem Ring R_S mit $S = R \setminus (P \cup P')$ übergehen, ohne dass die Eigenschaften 1. und 2. verloren werden, so dass wir gleich noch annehmen können, dass P und P' die einzigen maximalen Primideale von P sind.

Nach dieser Annahme gibt es eine Kette $P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_{r-1}$ der Primideale von R, die mit P anfängt und, da P_{r-1} das einzige isolierte Primideal von (0) ist mit P_{r-1} endet. Setzen wir nun $S = R \setminus P_1$. Dann ist $P_1 \cap S = \varnothing$, und P_2 ist echt in P_1 enthalten. Das Ideal P_2 ist aber in einem einzigen Primideal von (0) enthalten, nämlich in P. Weil $P \cap S \neq \varnothing$, so ist die Bedingung 1. aus dem vorigen Satz nicht erfüllt, also ist R_S keine Dedekindsche Ordnung.

2.6. Definition. Einen Ring (Integritätsbereich) R werden wir Dedekindscher Ring (Integritätsbereich) nennen, wenn:

1. R Noethersch ist;
2. Jedes reguläre echte Primideal P von R invertierbar ist.

Weil in einem Noetherschen Ring R jedes echte invertierbare Primideal P ein minimales reguläres Primideal von R ist (S. [9], Satz 1.7), ist jeder Dedekindsche Ring (Integritätsbereich) R auch eine Dedekindsche Ordnung (ohne Nullteiler).

2.7. Satz. Jedes reguläre (jedes eigentliche) Ideal A eines Dedekindschen Ringes (Integritätsbereiches) R lässt sich, und zwar eindeutig, als Potenzprodukt der echten regulären (der eigentlichen) Primideale darstellen.

Beweis. Wie eben festgestellt wurde, ist R eine Dedekindsche Ordnung (ohne Nullteiler). Deswegen sind für jedes echte reguläre (jedes eigentliche) Ideal A die Primärkomponenten Q_i $(i=1,\ldots,n)$ von A als echte reguläre (als eigentliche) Primärideale von R eindeutig bestimmte Potenzen ihrer Radikalen P_i $(i=1,\ldots,n)$, die ihrerseits echte reguläre (eigentliche) Primideale von R sind (S. Satz 2.2).

Die Primideale P_i sind maximal, also paarweise teilerfremd, und somit sind auch die zugehörigen Primärideale Q_i paarweise teilerfremd. Deswegen ist die Durchschnittsmenge A der Ideale Q_i gleich dem Produkt dieser Ideale. Infolgedessen ist A als Potenzprodukt der echten regulären (eigentlichen) Primideale P_i darstellbar. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung folgt aus der Eindeutigkeit der Primärkomponenten Q_i von A, die alle isoliert sind (S. [8], p. 18, Sh. 3).

Ein Dedekindscher Integritätsbereich R wird üblich anders definiert (Vgl. z. B. [10], p. 270). Diese Definition stimmt bekanntlich mit der Definition 2.6. überein (S. [10], p. 275, Th. 12 u. [2], p. 33, Th. 7), so dass in diesem Falle auch die Umkehrung von Satz 2.7. gilt.

Falls R Noethersch ist, so gilt nach 2.2 die Umkehrung von Satz 2.6, unabhängig davon, ob R ein Integritätsbereich ist oder nicht. Es scheint mir, dass sich diese Umkehrung nicht ohne Noethersche Bedingung beweisen lässt, falls R auch echte Nullteiler enthält.

Da jeder Dedekindsche Ring R eine Dedekindsche Ordnung ist, so sind nach 2.2 in jedem Dedekindschen Ring R die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1. Jedes echte reguläre (jedes eigentliche) Primideal P von R ist maximal;
2. Jedes echte reguläre (jedes eigentliche) Primärideal Q von R ist eine Potenz seines Radikals P.

In [3] hat Herr R.W. Gilmer, Jr. bewiesen, dass ein Integritätsbereich R genau dann die obigen zwei Bedingungen erfüllt, wenn für jedes eigentliche Primideal P von R der Quotientenring R_P ein Dedekindscher Integritätsbereich ist. Solche Ringe nannte Gilmer fast Dedekindsche Integritätsbereiche. Es gibt fast Dedekindsche Integritätsbereiche, die keine Noetherschen Ringe sind (S. [3], p. 814). Es kann also vorkommen, dass für ein echtes Primideal P eines nicht Noetherschen Integritätsbereiches R das Ideal P^e von R_P invertierbar ist, ohne dass P fast invertierbar ist. So haben wir gesehen, dass man Endlichkeitsbedingung in Satz 1.1. nicht vermeiden kann.

3. Fast invertierbare Primideale

3.1. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und P ein echtes Primideal von R. Das Ideal P ist dann und nur dann fast invertierbar, wenn P ein minimales reguläres Primideal von R und jedes zu P gehörige Primärideal Q eine symbolische Potenz von P ist.

Beweis. P sei fast invertierbar. Zunächst ist P ein minimales reguläres Primideal von R ([9], Satz 1.7). Deswegen ist nach Satz 2.3 der Quotientenring R_P eine Dedekindsche Ordnung. Das Ideal P^e ist sogar das einzige echte reguläre Primideal von R_P. Ausserdem ist P^e nach Satz 1.2 invertierbar. Infolgedessen ist jedes zu P^e primäre Ideal Q von R_P eine Potenz seines Radikals $\bar{P} = P^e$ (S. Satz 2.2). Insbesondere ist für jedes zu P primäre Ideal Q von R

$$Q = Q^{ec} = ((P^e)^n)^c = (P^n)^{ec} = P^{(n)}.$$

Sei umgekehrt P ein minimales reguläres Primideal von R und jedes zu P primäre Ideal Q von R sei eine symbolische Potenz von P. Insbesondere ist dann für jedes reguläre Element $a \in P$ das Ideal P ein isoliertes Primideal von (a) und die zu P gehörige Primärkomponente Q von (a) symbolische Potenz von P, $Q = P^{(n)}$. Nach Satz 1.3 ist aber Q fast invertierbar, und somit ist auch P fast invertierbar (S. Satz 3.2).

3.2. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und P sei ein Primideal von R. Ist P fast invertierbar, so ist jedes zu P primäre Ideal Q von R (gleich einer symbolischen Potenz von P und) fast invertierbar. Falls mindestens eine symbolische Potenz $P^{(n)}$ von P fast invertierbar ist, so ist auch P fast invertierbar.

Beweis. Für $P = R$ ist die Behauptung trivial; denn dann ist jedes zu P primäre Ideal Q ebenfalls gleich R. Nun sei P ein echtes Primideal von R.

Ist P fast invertierbar, so ist nach vorigem Satz jedes zu P primäre Ideal Q eine symbolische Potenz $P^{(n)}$ von P. Deswegen ist das Ideal $Q^e = (P^e)^n$ von R_P invertierbar; denn P^e ist nach Satz 1.2 invertierbar. Da P, und somit auch Q regulär ist, so ist Q nach Satz 1.2 fast invertierbar.

Falls mindestens eine symbolische Potenz $P^{(n)} = Q$ fast invertierbar ist, so ist Q regulär ([9], Satz 1.5), und das Ideal $Q^e = (P^e)^n$ von R_P ist nach Satz 1.2 invertierbar. Somit ist das Ideal P^e von R_P invertierbar, also das Ideal P von R fast invertierbar.

3.3. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und P ein echtes reguläres Primideal von R. Das Ideal P ist dann und nur dann fast invertierbar, wenn R_P ein Dedekindscher Integritätsbereich (und P^e das einzige eigentliche Primideal von R_P) ist.

Beweis. P sei fast invertierbar. Dann ist nach dem Beweis von Satz 2.1 R_P ein Dedekindscher Ring und P^e das einzige echte reguläre Primideal von R_P. Deswegen ist $R_P = (R_P)_{P^e}$ und somit ist R_P nach Satz 2.3 ein Integritätsbereich.

Ist R_P ein Dedekindscher Ring, so ist das echte reguläre Primideal P^e von R_P invertierbar. Da P regulär ist, folgt daraus, dass P fast invertierbar ist (S. Satz 1.2).

Es wäre interessant nachzuprüfen, ob man die obige Voraussetzung, dass P regulär ist, entbehren kann. Wenn man den Ring R aus dem Beispiel 2.5 derart wählt, dass P_{r-1} (die einzige) isolierte Primärkomponente von Nullideal wird, so sieht man leicht, dass P_{r-2} ein singuläres echtes Primideal von R ist, $R_{P_{r-2}}$ eine Dedekindsche Ordnung ohne Nullteiler und P^e_{r-2}. das einzige eigentliche Primideal von $R_{P_{r-2}}$. Falls sich herausstellen sollte, dass P^e_{r-2} trotzdem invertierbar, d.h. $R_{P_{r-2}}$ ein Dedekindscher Integritätsbereich ist, so hätte man ein Beispiel dafür, dass die obige Voraussetzung wesentlich ist. Gleichzeitig wäre damit die Unentbehrlichkeit der Regularität von A im Satz 1.1. nachgewiesen.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar das folgende Ergebnis von Herrn W. Krull:

3.4. Satz. Ist R ein Noetherscher Ring und P ein echtes fast invertierbares Primideal von R, so enthält P echt genau ein Primideal P_1, und P_1 ist eine isolierte Primärkomponente des Nullideals (0) von R (Vgl. [5], Satz 1.).

Beweis. Nach Satz 3.3 ist in dem Ideal P^e von R_P nur ein einziges Primideal von R_P echt enthalten, nämlich das Primideal $(0)^e$. Deswegen ist $P_1=(0)^{ec}=(0)_S(S=R\setminus P)$ das einzige in P echt enthaltene Primideal von R und gleichzeitig eine isolierte Primärkomponente des Nullideals (0) von R. *Q. E. D.*

Falls R ein Noetherscher Ring und P ein minimales reguläres Primideal von R ist, so ist R_P eine Dedekindsche Ordnung mit einem einzigen regulären Primideal P^e, so dass R_P dann und nur dann ein Dedekindscher Integritätsbereich ist, wenn $R_P=(R_P)_{P^e}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist. Da ausserdem jedes fast invertierbare echte Primideal P von R ein minimales reguläres Primideal von R ist, ergibt sich aus 3.4:

3.5. Satz. Ein echtes Primideal P eines Noetherschen Ringes R ist dann und nur dann fast invertierbar, wenn:

1. P ein minimales reguläres Primideal von R und
2. R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist.

Wegen 3.1. ergibt sich aus 3.5. der folgende Satz:

3.6. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und P ein minimales reguläres Primideal von P. Ist R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich so gibt es ausser den symbolischen Pontenzen von P keine zu P primären Ideale von R, und umgekehrt. (Vgl. Sätze 3.7. u. 3.8).

3.7. Satz. R sei ein ganz abgeschlossner Noetherscher Ring. Dann ist jedes Primideal P eines echten regulären Hauptideals (a) von R fast invertierbar, und das Ideal (a) ist eindeutig als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten darstellbar, welche die symbolischen Potenzen ihrer Radikale sind. (Vgl. [10], p. 277, Th. 14, Corr.; [4], p. 1; u. [5], § 2).

Beweis. P sei ein beliebiges Primideal eines echten regulären Hauptideals (a) von R. Dann ist $(a):P\supset(a)$ (S. [10], p. 214, Th. 11). Es gibt also $r\in R$ mit

$$rP\subseteq(a),\ r \text{ non } \in(a), \text{ d.h. } (r/a)\cdot P\subseteq R,\ r/a\in Q(R)\setminus R.$$

Das besagt aber, dass P^{-1} non $\subseteq R$, woraus man auf Grund der ganzen Abgeschlossenheit von R leicht die Fast-Invertierterkeit von P feststellt.

Deswegen ist P ein minimales reguläres Primideal von R, also ein isoliertes Primideal von (a). Infolgedessen ist (a) eindeutig als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponten darstellbar. Jede dieser Primärkomponenten ist als ein zu einem fast invertierbaren Primideal von R primäres Ideal nach Satz 3.1 eine symbolische Potenz dieses Primideals. *Q. E. D.*

3.8. Satz. R sei ein Noetherscher Ring. R ist genau dann ganz abgeschlossen, wenn für jedes echte reguläre Hauptideal (a) von R und für jedes Primideal P von (a) der Quotientenring R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbreich ist.

Beweis. Die Behauptung ist trivial, falls es überhaupt keine echten reguläre Hauptideale von R gibt. Wir schliessen nun diesen Spezialfall aus.

Ist R ganz abgeschlossen, so ist für jedes echte reguläre Hauptideal (a) von R und für jedes Primideal P von (a) das Ideal P nach 3.7. fast invertierbar, also nach 3.5. der Ring R_P ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich.

Sei umgekehrt für jedes echte reguläre Hauptideal (a) von R und für jedes Primideal P von (a) der Quotientenring R_P ganz abgeschlossen. Dann ist nach 3.7. das einzige maximale Ideal P^e von R_P als ein Primideal des echten regulären Hauptideals $(a)^e$ von R_P fast invertierbar, also invertierbar. Infolgedessen ist P fast invertierbar, und somit ist P ein isoliertes Primideal von (a). Jedes echte reguläre Hauptideal (a) ist also gleich dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten.

Auf Grund dessen folgt die ganze Abgeschlossenheit von R aus dem

3.9. Satz. R sei ein Noetherscher Ring und für jedes minimale reguläre Primideal P von R sei der Quotientenring R_P ganz abgeschlossen. Dann ist entweder auch der Ring R ganz abgeschlossen, oder es gibt mindestens ein echtes reguläres Hauptideal (a) von R, das sich nicht als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten darstellen lässt.

Beweis. Ist R ganz abgeschlessen, so ist nach 3.7 jedes echte reguläre Hauptideal (a) von R als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten darstellbar.

Wir nehmen nun an, jedes echte reguläre Hauptideal (a) von R sei als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten darstellbar, und werden zeigen, dass dann der Ring R ganz abgeschlossen ist.

Sei $x = r/a \in Q(R)$ ein beliebiges über R ganzes Element. Wir können annehmen, dass das reguläre Ideal (a) ein echtes Ideal von R ist; denn sonst wäre $x \in R$, und es gäbe nichts zu zeigen.

Ist P ein minimales reguläres Primideal von R und $h_P: R \to R_P$ der natürliche Homomorphysmus, so ist

$$h_P(x) = h_P(r)/h_P(a) \in Q(R_P)$$

ein ganzes Element über R_P. Da R_P nach der Voraussetzung ganz abgeschlossen ist, so ist $h_P(x) \in R_P$, d.h.

$$h_P(r)/h_P(a) = h_P(r'_P)/h_P(s'_P) \quad (r'_P \in R, \ s'_P \in R \setminus P).$$

Infolgedessen ist $h_P(r \cdot s'_P) = h_P(a \cdot r'_P)$, also

$$r \cdot s'_P = a \cdot r'_P + k_p \quad (k_P \in h_P^{-1}(0)).$$

Für ein passendes Element $s''_P \in R \setminus P$ und für $s_P = s'_P \cdot s''_P$, $r_P = s''_P \cdot r'_P$ gilt somit

$$r \cdot s_P = a \cdot r_P \quad (r_P \in R, \ s_P \in R \setminus P). \tag{3.1}$$

Die Relation (3.1) haben wir für jedes minimale reguläre Primideal P von R bewiesen. Sie gilt insbesondere für jedes isolierte Primideal P von (a), und für die zu P gehörige Primärkomponente Q von (a) ergibt sich daraus

$$r \cdot s_P \in Q \quad (r \in R, \ s_P \in R \setminus P), \text{ d.h. } r \in Q.$$

Dann ist aber $r \in (a)$, also $x = r/a \in R$; denn (a) ist als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten Q darstellbar.

Aus Satz 3.7 und Satz 3.5 b.z.w. Satz 3.4 ergeben sich direkt die beiden folgenden Sätze:

3.10. Satz. In einem ganz abgeschlossenen Noetherschen Ring R ist ein echtes Primideal P dann und nur dann fast invertierbar, wenn P ein minimales reguläres Primideal von R ist (Vgl. [8], p. 415).

3.11. Satz. In einem ganz abgeschlossenen Noetherschen Ring R ist entweder jedes reguläre Element eine Einheit oder ist mindestens eine isolierte Primärkomponte des Nullideals ein Primideal von R (S. [5], Satz 2).

Zum Schluss führen wir die folgende Charakterisierug der Dedekindschen Integritätsbereiche an:

3.12. Satz. Ein Noetherrscher Ring R ist dann und nur dann ein Dedekindscher Integritätsbereich, wenn jedes eigentliche Primideal P von R fast invertierbar ist (Vgl. [1], Theorem).

Beweis. Ist R ein Dedekindscher Integritätsbereich, so ist jedes eigentliche Primideal P von R sogar invertierbar. Falls umgekehrt jedes eigentliche Primideal P von R fast invertierbar ist, so ist jedes eigentliche Primideal P von R regulär und sogar ein minimales reguläres Primideal von R. Deswegen ist R ein Integritätsbereich und jedes eigentliche Primideal P von R ist nicht nur fast invertierbar, sondern auch invertierbar ([9], Satz 1.5). Infolgedessen ist R ein Dedekindscher Integritätsbereich.

Wir erinnern daran, dass in [1] der letzte Schluss ohne Noethersche Bedingung gezogen wurde.

LITERATUR

[1] H. S. Butts, *Quasi-invertible prime ideals.* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 291-292,

[2] I.S. Cohen, *Commutative rings with restricted minimum condition.* Duke Math. J. 17 (1950), 27-42,

[3] R. W. Gilmer, Jr. *Integral domains which are almost Dedekind.* Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 813-818,

[4] W. Krull, *Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen.* Math. Ann. 105 (1931), 1-14,

[5] W. Krull, *Über den Aufbau des Nullideals in ganz abgeschlossenen Ringen mit Teilerkettensatz.* Math. Ann. 102 (1930), 363-369,

[6] D. G. Northcott, *Prime Ideals and Dedekind Order.* Proc. London Math. Soc. 10 (1960), 480-496,

[7] D. G. Northcott, *Ideal Theory.* Cambridge, 1960.

[8] V. Perić, *Eine Bemerkung zu den invertierbaren und fast inverterbaren Idealen.* Arch. Math. 15 (1964), 415-417,

[9] V. Perić, *Zu den fast invertierbaren Idealen der kommutativen Ringe.* Im Druck,

[10] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra,* Vol. I. Princeton, 1959.