PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21) 1967, p. 93–98

EINE CHARAKTERISIERUNG DER S-KOMPONENTEN DER IDEALE UND DER HALBGRUPPE (IR_S, $\cap$)

Veselin Perić

(Vorgelegt am 27. Mai 1966)

Der von Herrn B.L. van der Waerden in [2] eingeführte Begriff der S-Kompenenten der Ideale spielt bekanntlich in der Noetherschen Idealtheorie eine bedeutende Rolle. Dieser Begriff tritt besonders bei der Betrachtung der Beziehungen zwischen den Idealen des Ringes R und deren des Quotientenringes R_S hervor.[1]

Hier wird zunächst gezeigt, wie sich die Abbildung

$$A \to A_S \text{ (S-Komponente des Ideals } A) \tag{1}$$

als ein bestimmter Endomorphismus der Halbgruppe (IR, $\cap$) aller Ideale eines Noetherschen Ringes R vollkommen charakterisieren lässt.

Dannach werden für gegebene Ringe R und R' die Abbildungen

$$\begin{aligned} e&: \ (IR, \ \cap) \to (IR', \ \cap) \\ c&: \ (IR', \ \cap) \to (IR, \ \cap) \end{aligned} \tag{2}$$

betrachtet. Ihre Bezeichnungen sollen an die Erweiterung ("extension") und die Verengung ("contraction") der Ideale erinnern. An diese Abbildungen werden die Bedingungen gestellt, die notwendig und hinreichend dafür sind, dass es ein passendes multiplikatives System S des Noetherschen Ringes R und für dieses System S einen bestimmten Isomorphismus

$$h: \ (IR', \ \cap) \to (IR_S, \ \cap) \tag{3}$$

gibt.

Es ist wohl bekannt, dass für jedes Ideal A und für jede endliche Familie $\{P_\alpha\}$ der echten Primideale P_α von R die Bedingung

$$A \subseteq \bigcup P_\alpha \Rightarrow \exists\, \alpha : A \subseteq P_\alpha \tag{4}$$

erfüllt ist (S. z. B. [1], p. 12, Prop. 6). Im Zusammenhang mit einer der die Abbildung (1) charakterisierenden Bedingungen zeigen wir zum Schluss, dass die Bedingung (4) für ein Primideal A und für jede Familie $\{P_\alpha\}$ der echten Primideale P_α von R dann und nur dann erfüllt ist, wenn A ein einziges isolierte Primideal P eines echten Hauptideals (a) von R ist.

---

[1]) S. z. B. [1] u. [3]. Wir werden weiterhin von den einfachen Tatsachen, die man in [1] u. [3] findet, auch ohne Verweis Gebrauch machen.

Es werden dabei nur (assoziative und) kommutative Ringe mit Einselement betrachtet.

Satz 1. Sei f ein idempotenter Endomorphismus der Halbgruppe $(IR, \cap)$ aller Ideale eines Ringes R und besitze f noch die folgenden Eigenschaften:

1. $f(A)$ enthält A für jedes Ideal A von R, aber es gibt mindestens ein echtes Primideal P von R, in dem das Ideal $f(P)$ enthalten ist, d. h. $f(P)=P$;

2. Wenn Q zu P primär ist, dann ist auch $f(Q)$ primär zu $f(P)$;

3. Falls ein Primärideal Q in der Vereinigung einer Familie $\{P_\alpha \mid f(P_\alpha) \subseteq P_\alpha\}$ der echten Primideale von R enthalten ist, so gilt $f(Q) \subseteq Q$.

Dann ist

$$S = R \setminus \cup P \, (P \text{ echtes Primideal von } R \text{ und } f(P) \subseteq P) \tag{5}$$

ein multiplikatives System von R und für jedes Ideal A von R, das eine Primärzerlegung zulässt, stimmt $f(A)$ mit A_S überein. Insbesondere, wenn der Ring R Noethersch ist, dann stimmt die Abbildung f mit der Abbildung (1) überein.

Umgekehrt ist für jedes multiplikative System S von R die Abbildung (1) ein idempotenter Endomorphysmus der Halbgruppe $(IR, \cap)$ und hat ausserdem noch die Eigenschaften 1., 2. und 3.

Beweis. Die letzte Behauptung ist beinahe trivial und mehr oder weniger bekannt. Es ist nämlich bekannt[1], dass die Abbildung (1) einen idempotenten Endomorphismus der Halbgruppe $(IR, \cap)$ darstellt und die Eigenschaft 2. besitzt; ausserdem enthält $f(A)=A_S$ das Ideal A.

Da S mit (0) disjunkt ist, gibt es ein Primideal P von R, das (das Ideal (0) enthält und) mit S leeren Durchschnitt hat. Deswegen ist P ein echtes Primideal von R mit der Eigenschaft $f(P) \subseteq P$. Somit hat die Abbildung (1) auch die Eigenschaft 1.

Die Bedingung 3. besagt in diesem Falle offensichtlich, dass, falls ein Primideal Q von R leeren Durchschnitt mit S hat, $Q_S = Q$ ist und kann somit als bekannt aufgefasst werden, obwohl sie in der Form vielleicht nicht vorher formuliert war.

Die letzte Behauptung von Satz 1. ist also bewiesen, und wir gehen nun zum Beweis der direkten Behauptung über. Diesen Beweis führen wir in einigen Schritten durch.

Zunächst zeigen wir, dass für jedes Primideal P die Disjunktion

$$f(P) = P \vee f(P) = R, \tag{6}$$

für jedes zu P primäre Ideal Q die Disjunktion

$$f(Q) = Q \vee f(Q) = R \tag{7}$$

und dabei

$$f(Q) = Q \Leftrightarrow f(P) = P \tag{8}$$

gilt.

Wenn $f(P) \neq R$, dann folgt aus $f(P) \supseteq P$ (Eigenschaft 1.) und aus $f/f(P)/ = f(P)$ (f ist idempotent!), wegen 3.

$$f(P) \subseteq P, \text{ d.h. } f(P) = P,$$

weil $f(P)$ nach 2. ein Primideal ist. Somit ist (6) bewiesen.

Falls $P=R$, so sind (7) und (8) trivial; denn dann ist auch $Q=R$. Nehmen wir nun an, dass $P \neq R$.

Aus $f(P) \subseteq P$ folgt $f(Q) \subseteq Q$ wegen $Q \subseteq P$ (Eigenschaft 3.), und aus $f(Q) \subseteq Q$ folgt $f(P) \subseteq P$ wegen 2. und (6). So gilt auch (8).

Wenn $f(Q) \subseteq Q$ dann, ist $f(P)=R$ auf Grund von (8) und (6). Wegen Eigenschaft 2. folgt daraus $f(Q)=R$ und so gilt auch (7).

Nun ist es leicht zu sehen, dass für jedes Ideal A mit der Primärzerlegung

(9) $$A=\bigcap_1^r Q_i, \text{ wobei } Q_i \text{ zu } P_i \text{ primär ist,}$$

das Ideal $f(A)$ die folgende Primärzerlegung hat:

(10) $$f(A)=\bigcap Q_i \quad (f(P_i)=P_i);$$

denn die Abbildung f ist ein Endomorphismus von $(IR, \cap)$ und es gelten die Relationen (7) und (8).

Da nach 1. für wenigsten ein echtes Primideal P von R $f(P) \subseteq P$, ist es nicht schwer zu sehen, dass die Menge S aus (5) ein multiplikatives System von R ist. Ausserdem, wenn für ein echtes Primideal P von R $f(P) \subseteq P$ ist, dann ist $P \cap S=\varnothing$, so dass für P und für jedes zu P primäre Ideal Q

$$P_S=P=f(P), \quad Q_S=Q=f(P)$$

sein muss.

Wenn aber für ein Primideal P' von R $f(P') \nsubseteq P'$, dann ist wegen 3. $P' \cap S \neq \varnothing$, und für P', sowie für jedes zu P' primäre Ideal Q' gilt

$$P'_S=R=f(P'), \quad Q'_S=R=f(Q').$$

Deswegen kann man anstatt (10) die Relation

(11) $$f(A)=\bigcap Q_i \quad (P_i \cap S=\varnothing)$$

schreiben.

Anderseits für dasselbe Ideal A mit der Primärzerlegung (9) gilt bekanntlich

(12) $$A_S=\bigcap Q_j \quad (P_j \cap S=\varnothing).$$

Für jedes Ideal A von R, das eine Primärzerlegung zulässt folgt aus (11) und (12) $f(A)=A_S$. Da in einem Noetherschen Ring R jedes Ideal A von R eine Primärzerlegung besitzt, ist damit Satz 1. vollkommen bewiesen.

B e m e r k u n g. Wenn es in der Menge $\{P_\alpha\}$ aller echten Primideale P_α von R mit $f(P_\alpha) \subseteq P_\alpha$ eine endliche Teilmenge $\{P_{\alpha_i}\}$ mit der Eigenschaft

(13) $$\bigcup P_\alpha \subseteq \bigcup P_{\alpha_i}$$

gibt, dann lässt sich die Bedingung 3. ersetzen durch die etwas schwächere Bedingung

3'. Falls ein Primärideal Q in einem echten Primideal P von R mit $f(P) \subseteq P$ enthalten ist, so gilt auch $f(Q) \subseteq Q$;

Unter Voraussetzung (13) aus 3'. folgt 3; denn jedes Ideal von R, das in der Vereinigung aller P_α enthalten ist, muss in einem der Ideale P_{α_i} enthalten sein (S. z. B. [1], p. 12, prop. 6). Anderseits folgt 3'. aus 3. ohne irgendeine weitere Voraussetzung.

Im allgemeinen braucht die Bedingung 3'. nicht mit der Bedingung 3. gleichbedeutend zu sein. Es gibt nämlich Ringe R und Familien $\{P_\alpha\}$ der echten Primideale P_α von R, so dass mindestens ein echtes Primideal P von R in der Vereinigung aller Ideale P_α, aber in keinem dieser Ideale enthalten ist (S. Satz 3.). Bei diesen Bezeichnungen bleibend, definieren wir die Abbildung

$$\text{(14)} \qquad \text{f:} \quad A \to \bigcap A_{S_\alpha} \; (S_\alpha = R \setminus P_\alpha).$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Abbildung die Bedingung 3'. und alle Bedingungen von Satz 1. ausser der Bedingung 3. erfüllt. Die Bedingung 3. ist für kein zu P primäres Ideal Q erfüllt; denn offensichtlich gilt für jedes Primärideal Q von R

$$f(Q) \subseteq Q \Leftrightarrow \exists\, \alpha : Q \subseteq P_\alpha.$$

Falls Q aber zu P primär ist, so gilt $Q \subseteq P \subseteq \bigcup P_\alpha$. Trotzdem gibt es kein α mit $Q \subseteq P_\alpha$; denn sonst wäre $P \subseteq P_\alpha$.

Satz 2. R und R' seien zwei gegebene Noethersche Ringe und es gäbe zwei Homomorphismen (2) mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Abbildung ce: $(IR', \cap) \to (IR', \cap)$ ist die Identität;

b) Falls Q ein zu P primäres Ideal von R ist, so ist Q^e ein zu P^e primäres Ideal von R';[2)]

c) Falls Q' ein zu P' primäres Ideal von R' ist, so ist auch Q'^c ein zu P'^c primäres Ideal von R;

d) Falls ein Primärideal Q von R in der Vereinigungsmenge einer Familie der echten Primideale P_α mit $P_\alpha^{ec} \subseteq P_\alpha$ enthalten ist, so ist $Q^{ec} \subseteq Q$;

e) Für jedes Ideal A von R ist $A \subseteq A^{ec}$.

Dann ist

$$\text{(15)} \qquad S = R \setminus \bigcup P \quad (P \text{ echtes Primideal von } R \text{ mit } P^{ec} \subseteq P)$$

ein multiplikatives System von R, und für dieses System S gibt es einen Isomorphismus (3) mit der Eigenschaft

$$\text{(16)} \qquad (Q'^h \text{ ist zu } P'^h \text{ primär}) \Leftrightarrow (Q' \text{ ist zu } P' \text{ primär}).$$

Wenn es umgekehrt einen Isomorphismus (3) mit der Eigenschaft (16) gibt, denn gibt es auch zwei Homomorphismen (2) mit den Eigenschaften a) bis e). Dabei kann man für S die Menge (15) wählen.

Beweis. Zuerst beweisen wir die letzte Behauptung, die fast evident ist. S sei ein multiplikatives System von R und für dieses System S gäbe es einen Isomorphismus (3) mit der Eigenschaft (16).

Für ein Ideal A von R bedeute $A^{e'}$ das Erweiterungsideal von A in R_S, und für ein Ideal $\bar{A}$ von R_S bezeichne $\bar{A}^{c'}$ das Verengungsideal von $\bar{A}$ in R. Dann sind die Abbildungen:

$$e'\colon \quad (IR, \cap) \to (IR_S, \cap)$$

$$c'\colon \quad (IR_S, \cap) \to (IR, \cap)$$

homomorph und haben bei passender Bezeichnung die Eigenschaften a) bis e).

---

2) Wir schreiben A^e, A^c anstatt $e(A)$, $c(A)$.

Daher ist es leicht nachzuprüfen, dass die Abbildungen:

$$e = e' \cdot h^{-1} : (IR, \ \cap) \rightarrow (IR', \ \cap)$$

$$c = h \cdot c' : (IR', \ \cap) \rightarrow (IR, \ \cap)$$

Homomorphismen mit den Eigenschaften a) bis e) darstellen.|

Um die direkte Behauptung des Satzes zu bewiesen, betrachten wir zunächst die Abbildung:

$$f = ec : (IR, \ \cap) \rightarrow (IR, \ \cap).$$

Diese Abbildung erfüllt die Bedingungen von Satz 1. Offensichtlich ist sie homomorph. Sie ist aber auch idempotent; denn nach a) ist

$$A^{ff} = A^{ecec} = /(A^e)^{ce}/^c = (A^e)^c = A^f$$

für jedes A von R.

Da R' ein Ring mit Einselement ist, gibt es ein echtes Primideal P' von R'. Nach a) ist

$$(P'^c)^e = P'^{ce} = P' \neq R',$$

so dass $P = P'^c$ ein echtes Primideal von R ist; P ist ein Primideal nach c), und $P \neq R$, weil e als ein Homomorphismus in Bezug auf die Duchschnittbildung sicherlich eine steigende Abbildung ist und somit $R^e = R'$, während $P^e = P' \neq R'$.

Ausserdem

$$P^{ec} = (P'^c)^{ec} = (P'^{ce})^c = P'^c = P, \text{ d.h. } P^f = P,$$

was zusammen mit e) besagt, dass die Abbildung f die Eigenschaft 1. hat.

Wegen b) und c), bzw. wegen d), hat diese Abbildung auch die Eigenschaften 2. und 3. von Satz 1.

Infolgedessen ist nach Satz 1.

$$A^f = A^{ec} = A_S \, (A \in IR), \tag{17}$$

wobei S das multiplikative System (15) darstellt.

Jetzt ist es leicht zu zeigen, dass c eine eineindeutige Abbildung der Menge IR' auf die Menge aller S-Komponenten der Ideale von R darstellt.

Zunächst ist nach a) und (17)

$$A'^c = (A'^{ce})^c = (A'^c)^{ec} = (A'^c)_S.$$

Ausserdem ist

$$A_S = (A_S)_S = (A_S)^{ec} = ((A_S)^e)^c,$$

d.h. jede S-Komponente A_S ist das Bild in Bezug auf c eines Ideals von R'.

Schliesslich folgt $A' = B'$ aus $A'^c = B'^c$; denn nach a) ist

$$A' = A'^{ce} = (A'^c)^e = (B'^c)^e = B'^{ce} = B'.$$

Weil die Erweiterung e' der Ideale von R in R_S eine eineindeutige Abbildung der Gesamtheit aller S-Komponenten der Ideale von R auf die Menge IR_S aller Ideale von R_S darstellt (S. [3], p. 223, Th. 15), ist die Abbildung

(3) mit $h = ce'$ ein Isomorphismus; denn die beiden Abbildungen e, c' sind homomorph in Bezug auf die Durchschnittbildung.

Es ist klar, dass ausserdem die Abbildung $h = ec'$ noch die Eigenschaft (16) hat.

Somit ist Satz 2. bewiesen.

Im Zusammenhang mit der Bemerkung beweisen wir nun den folgenden Satz.

Satz 3. A sei ein Primideal von R. Die Relation (4) gilt für jede Familie $\{P_\alpha\}$ der echten Primideale P_α von R dann und nur dann, wenn A ein einziges isoliertes Primideal eines echten Hauptideals (a) von R ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass die Bedingung notwendig ist. Wenn A für kein echtes Hauptideal (a) von R das einzige isolierte Primideal von (a) wäre, dann gäbe es für jedes Element a von A ein isoliertes Primideal P_a von (a), das nicht A enthält. Alle Ideale P_a sind echte Primideale von R; ausserdem ist offensichtlich $A \subseteq \bigcup P_a$. So haben wir schon eine Familie $\{P_a\}$ der echten Primideale P_a von R, für die die Relation (4) nicht erfüllt ist.

Nun beweisen wir, dass die Bedingung auch hinreichend ist. A sei ein einziges isoliertes Primideal eines echten Hauptideals (a) von R. Falls A in einer Familie $\{P_\alpha\}$ der echten Primideale P_α von R enthalten ist, so ist $(a) \subseteq P_\alpha$ für mindestens ein Index α. Dasselbe Ideal P_α enthält dann mindestens ein isoliertes Primideal von (a), also das Ideal A; denn A ist nach Voraussetzung das einzige isolierte Primideal von (a).

LITERATUR

[1] D. G. Northcott, *Ideal Theory*. Cambridge, 1960.

[2] B. L. van der Waerden, *Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems*. Math. Ann. 99 (1928), 497—541.

[3] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. I. Princeton, 1959.