

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТОНКИХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

Владан Д. Джорджевич

(Сообщено 25. мая 1966)

Обзор использованных обозначений:

x, y — обычные координаты пограничного слоя,
 u, v — составляющие скорости в x и y направлениях,
 $r_0(x)$ — радиус поперечного сечения тела,
 L — характерная длина тела,
 $U(x)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя,
 ρ, ν, μ — обычные обозначения для известных физических характеристик жидкости,
 p — давление,
 $\tau_w = \mu (U_y)_{y=0}$ — напряжение трения на поверхности тела,
 $\delta(x)$ — толщина пограничного слоя,
 $A_1(x)$ — площадь вытеснения и
 $A_2(x)$ — площадь потери импульса.

Объяснение остальных обозначений дано в тексте.

1. Введение

Осесимметричные проблемы ламинарного пограничного слоя, у которых соотношение толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела значительно меньше единицы во всех точках контура тела, решены Сальниковым [1] расширением общего метода Гертлера [2] и использованием известных преобразований Манглер-Степанова, сводящих упомянутые проблемы к соответствующим плоским задачам. Однако, практическое значение имеют и те осесимметричные проблемы у которых в отдельных точках контура тела соотношение толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела приблизительно равно единице, или даже больше ее. Например, при обтекании полубесконечного круглого цилиндра с градиентом давления равным нулю, толщина пограничного слоя возрастает вниз по течению пропорционально \sqrt{x} , тогда как радиус поперечного сечения остается неизменным и, так как пограничный слой вообще не отрывается, на поверхности цилиндра будет существовать место на котором будет $\delta(x) = r_0(x)$, а вниз по течению будет $\delta(x) > r_0(x)$. Это явление существует и в случае других осесимметричных проблем с градиентами давления отклоняющимися возможность отрыва пограничного слоя, и даже

в проблемах в которых пограничный слой отрывается, но тела весьма тонкие и удлиненные, а точка отрыва очень сдвинута вниз по течению, так что пограничный слой, особенно в ее окрестности, утолщается настолько что становится сравнимым с соответствующим радиусом поперечного сечения.

Цель этой работы — определить так называемые автомодельные решения основных уравнений пограничного слоя для случая когда соотношение толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела совсем произвольно и также определить некоторые другие, простые, но для практического использования важные решения.

В соответствии с литературой существующей из этой области теории пограничного слоя, проблемы у которых можно считать что $\delta(x) \ll r_0(x)$ будут впредь обозначаться проблемами у которых пренебрегается поперечной кривизной тела, тогда как остальные проблемы будут рассматриваться задачами учитывающими влияние поперечной кривизны тела.

2. Основные уравнения и некоторые их особенности

Основные уравнения осесимметричного пограничного слоя при произвольном соотношении толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела имеют вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} u u_x + v u_y &= U U' + \nu \left(u_{yy} + \frac{1}{r_0 + y} u_y \right) \\ [(r_0 + y) u]_x + [(r_0 + y) v]_y &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\text{для } y=0 \quad u = v = 0$$

$$\text{для } y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow U(x).$$

В случае пренебрежения влиянием поперечной кривизны тела, основные уравнения получаются из уравнений (1) выпущением подчеркнутых членов. Как это уже было упомянуто, таким образом полученные уравнения решены [1] почти во всех практически важных случаях: при обтекании сплошных тел вращения с притупленной передней частью, кольцеобразных крыльев и кольцеобразных тел вращения с острой передней кромкой при произвольном распределении скорости на внешней границе пограничного слоя. Прежде чем перейти к определению отдельных решений уравнений (1), будут произведены некоторые общие заключения на основании которых можно судить о влиянии поперечной кривизны тела на некоторые характерные величины пограничного слоя.

Если учесть что $U U' = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$, тогда из первого от уравнений (1)

при $y=0$ можно получит:

$$(2) \quad \mu(u_{yy})_{y=0} = p'(x) - \tau_w(x)/r_0(x)$$

тогда как соответствующее выражение в случае пренебрежения влиянием поперечной кривизны будет:

$$(3) \quad \mu (\quad) = p'(x)$$

Член $\mu (u_{yy})_{y=0}$, выделенный в уравнениях (2) и (3) с левой стороны, определяет кривизну профиля скорости на теле. Известно ([3] стр. 114) что отрыв пограничного слоя может произойти только в точках у которых $(u_{yy})_{y=0} > 0$. Из уравнения (3) происходит что знак кривизны профиля скорости на теле всегда равен знаку градиента давления, а это значит что в случае $\delta(x) \ll r_0(x)$ отрыв пограничного слоя может произойти только в области в которой давление возрастает вниз по течению, то есть в области замедленного течения. Также известно ([3] стр. 142) что пограничный слой в состоянии преодолеть без отрыва весьма малые положительные градиенты давления.

Иначе обстоит дело у пограничных слоев на тонких телах у которых нужно учитывать влияние поперечной кривизны тела. Из уравнения (2), так как для любого $x, \tau_w(x) > 0$, следует что при

$$0 < p'(x) \leq \tau_w(x)/r_0(x)$$

$(u_{yy})_{y=0} \leq 0$, а это в свою очередь значит что, вопреки положительному градиенту давления, отрыв пограничного слоя произойти не может. Отрыв может оказаться только в области в которой $p'(x) > \tau_w(x)/r_0(x)$. Следовательно, о пограничных слоях на тонких телах вращения можно сказать что они отпорнее к действию возрастания давления вниз по течению и поэтому можно ожидать что и точка отрыва будет сдвинута вниз. Влияние поперечной кривизны тела на местонахождение точки отрыва, следовательно, весьма благоприятно.

Из основных уравнений (1) можно также сделать и некоторые общие выводы в связи с величиной напряжении трения на поверхности тела. Правую сторону первого от уравнений (1) можно написать в виде:

$$-\frac{1}{\rho} \left[p'(x) - \frac{\mu}{r_0 + y} u_y \right] + \nu u_{yy},$$

тогда как в случае пренебрежения влиянием поперечной кривизны тела получается:

$$-\frac{1}{\rho} p'(x) + \nu u_{yy}.$$

Так как член $\frac{\mu}{r_0 + y} u_y$ всегда положительный, очевидно что течение при произвольном соотношении толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела ведет себя как течение у которого упомянутое соотношение много меньше единицы, но с меньшим градиентом давления. Учитывая что при уменьшении градиента давления напряжение трения на поверхности тела увеличивается, можно сделать вывод что уравнения (1) дадут значение напряжения трения и также сопротивления трения больше значения полученного [1] в случае пренебрежения влиянием поперечной кривизны тела.

3. Преобразование основных уравнений и определение автомоделных решений

Для того чтобы получить некоторые конкретные решения уравнений (1), производится следующее преобразование переменных. Вместо переменных

x и y вводятся переменные ξ и η , причем переменная ξ , введенная Сальниковым [1], задерживается в той же форме, тогда как другая переменная Сальникова дополняется фактором $\left(1 + \frac{y}{2r_0}\right)$:

$$\xi = \frac{1}{\nu L^2} \int_0^x U r_0^2 dx \quad \eta = \frac{U r_0 y}{\nu L \sqrt{2\xi}} \left(1 + \frac{y}{2r_0}\right).$$

Кроме того, вместо функции тока $\psi(x, y)$ определенной выражениями:

$$(r_0 + y)u = \psi_\nu \quad (r_0 + y)v = -\psi_x$$

вводится безразмерная функция тока $F(\xi, \eta)$:

$$\psi(x, y) = \nu L \sqrt{2\xi} F(\xi, \eta)$$

удовлетворяющая уравнение:

$$(4) \quad F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_\eta^2) = 2\xi(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}) - \Delta(\xi)(\eta F_{\eta\eta\eta} + F_{\eta\eta})$$

с граничными условиями:

$$\text{для } \eta = 0 \quad F = F_\eta = 0$$

$$\text{для } \eta \rightarrow \infty \quad F_\eta \rightarrow 1$$

В уравнении (4) $\beta(\xi)$ представляет известную [1] так называемую главную функцию определенную выражением:

$$(5) \quad \beta(\xi) = \frac{2\xi\nu L^2 U'}{U^2 r_0^2}$$

тогда как $\Delta(\xi)$ имеет вид:

$$(6) \quad \Delta(\xi) = \frac{2\nu L \sqrt{2\xi}}{U r_0^2}.$$

Если (6) сравнить с выражениями Сальникова [1] для характерных толщин пограничного слоя, можно заметить что $\Delta(\xi)$ представляет в самом деле величину пропорциональную соотношению толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела. Так как эта работа относится именно к проблемам у которых упомянутое соотношение произвольно, назовем эту величину характерным параметром.

Известно что автомодельные решения преобразованного уравнения пограничного слоя будут существовать в случае когда безразмерная функция тока, функция только переменной η . В случае уравнения (4) это осуществится если одновременно:

$$\beta(\xi) = \beta_0 = \text{const. и } \Delta(\xi) = \Delta_0 = \text{const.}$$

то есть если:

$$(7) \quad \frac{2\xi\nu L^2 U'}{U^2 r_0^2} = \beta_0 \quad \text{и} \quad \frac{2\nu L \sqrt{2\xi}}{U r_0^2} = \Delta_0.$$

Из этих двух выражений можно теперь определить ту форму тела $r_0(x)$ и то распределение скорости на внешней границе пограничного слоя $U(x)$ при которых существуют автомодельные решения уравнений (1).

Если из уравнений (7) исключить переменную ξ , тогда, при $\beta_0 \neq 0$, получается:

$$(8) \quad U' r_0^2 = \frac{4 \nu \beta_0}{\Delta_0^2}.$$

С другой стороны, из второго от уравнений (7), подставляя выражение для ξ , получится:

$$\int_0^x U r_0^2 dx = \frac{\Delta_0^2}{8 \nu} (U r_0^2)^2$$

или, после дифференцирования и некоторых преобразований:

$$U' r_0^2 \left(1 + 2 \frac{U r_0'}{U' r_0} \right) = \frac{4 \nu}{\Delta_0^2}.$$

Учитывая выражение (8), из второго от уравнений (7) окончательно получится:

$$(9) \quad 1 + 2 \frac{U r_0'}{U' r_0} = \frac{1}{\beta_0}.$$

Первое от уравнений (7) можно написать в виде:

$$\int_0^x U r_0^2 dx = \frac{\beta_0}{2} \frac{(U r_0)^2}{U'}$$

После дифференцирования и некоторого преобразования получится:

$$\frac{U U''}{U'^2} = 2 \frac{U r_0'}{U' r_0} + 2 \left(1 - \frac{1}{\beta_0} \right).$$

Если в это уравнение теперь внести $2 U r_0' / U' r_0$ определенное выражением (9), получится дифференциальное уравнение содержащее только скорость на внешней границе пограничного слоя:

$$\frac{U U''}{U'^2} = 1 - \frac{1}{\beta_0}$$

интегрированием которого получится:

$$U(x) = \left(\frac{B}{\beta_0} \right)^{\beta_0} x^{\beta_0},$$

где B — постоянная интегрирования имеющая всегда тот-же знак как и постоянная β_0 .

Если $U(x)$ известно, то тогда из (8) можно определить и радиус поперечного сечения тела:

$$r_0(x) = \frac{2}{\Delta_0} \sqrt{\nu \left(\frac{\beta_0}{B} \right)^{\beta_0}} x^{(1-\beta_0)/2}.$$

При $\beta_0 = 0$, из первого от уравнений (7) получается $U(x) = U_\infty = \text{const.}$ и тогда второе от уравнений (7) приводит к:

$$\int_0^x r_0^2 dx = \frac{U_\infty \Delta_0^2}{8\nu} r_0^4.$$

Решение этого уравнения:

$$r_0(x) = \frac{2}{\Delta_0} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}} x^{1/2}.$$

Короче можно написать что, несмотря на значение постоянной β_0 , при осесимметричном обтекании тонких тел вращения профили скорости будут подобными если:

$$U(x) = cx^m \text{ и } r_0(x) = ax^n$$

причем должно быть выполнено условие: $m + 2n = 1$, тогда как постоянные a и c могут быть произвольными.

К тому же результату пришли и Пробштейн и Эллиотт [4], но другим образом.

Следовательно, на круглом цилиндре ($n = 0$) профили скорости будут подобными в случае линейного распределения скорости на внешней границе пограничного слоя: $U(x) = cx$; на теле приблизительно имеющем форму параболоида вращения ($n = 1/2$) подобные профили скорости осуществляются при его обтекании с градиентом давления равным нулю: $U(x) = c = \text{const.}$, тогда как на конусе ($n = 1$) профили скорости будут подобными если распределение внешней скорости гиперболическое: $U(x) = c/x$ ($m = -1$). Позднее покажется (4) что, из-за очень большого возрастания давления вниз по течению, в этом последнем случае отрыв пограничного слоя произойдет наверно по целой поверхности конуса. Из этого следует что на конусе практически невозможно осуществить подобные профили скорости.

Линейное распределение внешней скорости $U(x)$ на круглом цилиндре можно приблизительно осуществить если цилиндр поставить в конфузоре (рис. 1а) с формой определенной выражением:

$$R(x) = \sqrt{a^2 + \frac{Q}{\pi cx}}$$

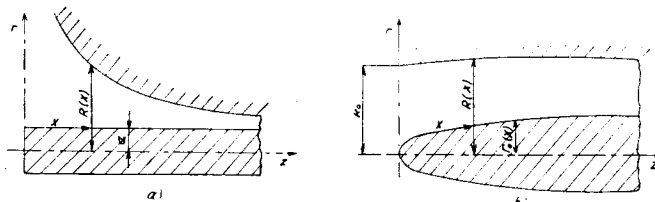


Рис. 1.

где Q — расход жидкости через конфузор. Это выражение получено применением уравнения неразрывности и учитывая что при течении идеальной жидкости средняя скорость в произвольном сечении конфузора и скорость на поверхности цилиндра приблизительно равны.

Таким же образом можно получить и форму диффузора (рис. 1 в) создающего на поверхности параболоида вращения ($n = 1/2$) постоянное распределение скорости на внешней границе пограничного слоя:

$$R(x) = R_0 \sqrt{1 + \frac{a^2}{R_0^2} x}$$

где $R_0 = R(0)$ — радиус входного сечения диффузора.

4. Некоторые другие решения основных уравнений

Предположим что характерный параметр $\Delta(\xi)$ меньше единицы для всех, или по крайней мере для некоторых величин x , то есть ξ , из интервала между передней критической точкой, или передней кромкой тела и точкой отрыва. Для этих значений переменной ξ решение уравнения (4) потребуем в виде степенного ряда разложенного по параметру $\Delta(\xi)$:

$$(10) \quad F(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta) + \Delta(\xi) F_1(\xi, \eta) + \Delta^2(\xi) F_2(\xi, \eta) + \dots$$

Определением необходимых производных и сравнением членов при одинаковых степенях параметра $\Delta(\xi)$ в уравнении (4), получаются следующие уравнения для первых двух коэффициентов $F_0(\xi, \eta)$ и $F_1(\xi, \eta)$ разложения (10):

$$(11) \quad F_{0\eta\eta\eta} + F_0 F_{0\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_0^2) = 2\xi(F_{0\eta} F_{0\xi\eta} - F_{0\xi} F_{0\eta\eta})$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{для } \eta = 0 & \quad F_0 = F_{0\eta} = 0 \\ \text{для } \eta \rightarrow \infty & \quad F_{0\eta} \rightarrow 1 \text{ и} \end{aligned}$$

$$(12) \quad F_{1\eta\eta\eta} + (F_0 + 2\xi F_{0\xi}) F_{1\eta\eta} - 2\xi F_{0\eta} F_{1\xi\eta} - \{2\xi F_{0\xi\eta} + [2\beta(\xi) + \gamma(\xi)] F_{0\eta}\} F_{1\eta} + \\ + 2\xi F_{0\eta\eta} F_{1\xi} + [1 + \gamma(\xi)] F_{0\eta\eta} F_1 = -(\eta F_{0\eta\eta\eta} + F_{0\eta\eta})$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{для } \eta = 0 & \quad F_1 = F_{1\eta} = 0 \\ \text{для } \eta \rightarrow \infty & \quad F_{1\eta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Уравнение для первого члена ряда F_0 тождественно уравнению полученному Сальниковым [1], что и надо было ожидать, так как остальные члены разложения оказывают постольку меньшее влияние поскольку характерный параметр $\Delta(\xi)$ меньше, то есть поскольку влияние поперечной кривизны тела меньше. В уравнении (12) для второго члена F_1 ряда (10), кроме главной функции $\beta(\xi)$, появляется еще одна новая главная функция $\gamma(\xi)$ определяемая выражением:

$$\gamma(\xi) = \frac{2\xi\Delta'(\xi)}{\Delta(\xi)}$$

или, если учесть (6):

$$(13) \quad \gamma(\xi) = 1 - \alpha(\xi)\beta(\xi)$$

причем $\alpha(\xi)$ можно назвать вспомогательной главной функцией:

$$\alpha(\xi) = 1 + 2 \frac{Ur'_0}{U'r_0}$$

Очевидно что в случае существования автомодельных решений новая главная функция будет тождественно равна нулю.

Уравнение (11) уже решено [1] и уравнение (12) можно было бы вероятно решить таким же образом, если бы новую главную функцию (13) можно было разложить в ряд той же формы какую имеет ряд для главной функции $\beta(\xi)$ [1]. В рамках этой работы не будем останавливаться на нахождении общего решения уравнения (12)*, а только потребуем некоторые отдельные решения у которых трудности численного характера наименьшие. Это во всяком случае будут решения у которых коэффициенты ряда (10) функции только переменной η , то есть у которых главные функции $\beta(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ постоянные. Теперь определим те скорости на внешней границе пограничного слоя $U(x)$ и те радиуси поперечного сечения тела $r_0(x)$ при которых будет:

$$(14) \quad \beta(\xi) = \frac{2\xi\gamma L^2 U'}{U^2 r_0^2} = \beta_0 = \text{const. и}$$

$$(15) \quad \gamma(\xi) = 1 - \alpha(\xi)\beta(\xi) = \gamma_0 = \text{const.}$$

то есть:

$$(16) \quad \alpha(\xi) = 1 + 2 \frac{U r_0'}{U' r_0} = \frac{1 - \gamma_0}{\beta_0} = \text{const. } (\beta_0 \neq 0).$$

Из (14) при $\beta_0 \neq 0$ уже раньше получено:

$$\frac{UU''}{U'^2} = 2 \frac{U r_0'}{U' r_0} + 2 \left(1 - \frac{1}{\beta_0}\right).$$

Если учесть (16), получится:

$$\frac{UU''}{U'^2} = 1 - \frac{1 + \gamma_0}{\beta_0}.$$

Отсюда для $\gamma_0 \neq -1$ получается:

$$U(x) = cx^m$$

где $m = \frac{\beta_0}{1 + \gamma_0}$ и c — произвольная постоянная, а для $\gamma_0 = -1$:

$$U(x) = M \exp Nx$$

где M и N — произвольные постоянные.

Если $U(x)$ известно, тогда из (16) можно определить $r_0(x)$. Для $\gamma_0 \neq -1$ будет:

$$r_0(x) = ax^n$$

а для $\gamma_0 = -1$:

$$r_0(x) = M_1 \exp N_1 x$$

причем a , M_1 и N_1 — произвольные постоянные и $n = \frac{1 - \gamma_0 - \beta_0}{2(1 + \gamma_0)}$.

*) Получение общего решения уравнения (12) а также и основных уравнений (1) в случае характерного параметра большего единицы, будет предметом отдельной работы.

Если $\beta_0 = 0$, тогда из (14) получается что $U(x) = c$, тогда как из (15) следует что при $\gamma_0 \neq -1$, $r_0(x) = ax^n$ и при $\gamma_0 = -1$, $r_0(x) = M_1 \exp N_1 x$. Очевидно что случай $\beta_0 = 0$ можно охватить предыдущим (при $m = 0$, или $N = 0$) и потому короче можно писать что главные функции $\beta(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ будут постоянными если:

$$(17) \quad U(x) = cx^m \text{ и } r_0(x) = ax^n$$

или:

$$(18) \quad U(x) = M \exp Nx \text{ и } r_0(x) = M_1 \exp N_1 x.$$

Случай (17) при $n < 0$ и (18) практически не имеют значения и потому в будущем будут рассматриваться только проблемы у которых $U(x) = cx^m$ и $r_0(x) = ax^n$ ($a, c > 0$) при $n \geq 0$, и то прежде всего проблемы обтекания круглого цилиндра ($n = 0$), тела имеющего приблизительно форму параболоида вращения ($n = 1/2$) и конуса ($n = 1$). Замечается еще что в выражениях (17) постоянные m и n , в отличие от автомодельных решений, взаимно независимые.

Так как в рассматриваемых проблемах переменная ξ имеет вид:

$$\xi = \frac{ca^2}{\nu L^2} \int_0^x x^{m+2n} dx,$$

очевидно что преобразование переменных будет иметь смысл только если:

$$(19) \quad m + 2n > -1.$$

Хотя это условие представляет некоторое ограничение для возможных скоростей на внешней границе пограничного слоя, позже покажется что оно не имеет значение.

Главные функции будут:

$$\beta(\xi) = \beta_0 = \frac{2m}{m + 2n + 1}$$

$$\gamma(\xi) = \gamma_0 = -\frac{m + 2n - 1}{m + 2n + 1}$$

а уравнения (11) и (12) перейдут в:

$$(20) \quad F_0''' + F_0 F_0'' + \beta_0(1 - F_0'^2) = 0$$

с граничным условиями:

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0 \text{ и } F_0'(\infty) = 1 \text{ и:}$$

$$(21) \quad F_1''' + F_0 F_1'' - (2\beta_0 + \gamma_0) F_0' F_1' + (1 + \gamma_0) F_0'' F_1 = -(\gamma F_0''' + F_0'')$$

с граничными условиями:

$$F_1(0) = F_1'(0) = F_1'(\infty) = 0.$$

Уравнение (20) представляет известное уравнение Фокнер-Скэн [5] определяющее автомодельные решения плоских пограничных слоев с внешней скоростью $U(x) = cx^m$, причем $\beta_0 = 2m/(m+1)$. Его численно решил Хартри [6] и сделал вывод что отрыв пограничного слоя происходит при $\beta_0 = -0.1988$, то есть $m = -0.0904$. В рассматриваемом случае, уравнение (20) дает решение проблемы в так называемом „первом приближении“, причем:

$$\beta_0 = \frac{2m}{m+2n+1} < \frac{2m}{m+1} \quad (n > 0).$$

Очевидно что при $n > 0$ и $\beta_0 = -0.1988$ будет $m < -0.0904$. Так как постоянная m связана с градиентом давления, следует заключение что в случае $n > 0$ пограничный слой будет в состоянии преодолеть без отрыва большие возрастания давления вниз по течению, чем в случае автомодельных решений плоской проблемы. Например, соответствующие значения m при $n = 1/2$ и $n = 1$ будут соответственно: $m = -0.1816$ и $m = -0.2724$. Таким образом уже в „первом приближении“ подтверждается общее заключение в веденное раньше (2).

Хотя пограничный слой на тонком теле вращения, по сравнению с случаем когда влиянием поперечной кривизны тела пренебрегается, к действию возрастания давления вниз по течению без всякого сомнения отпорнее, все-таки нельзя ожидать что такой пограничный слой будет в состоянии преодолеть без отрыва даже очень большие градиенты давления. Конкретно, в рассматриваемой проблеме трудно поверить чтобы пограничный слой был в состоянии преодолеть такие большие возрастания давления вниз по течению, соответствующие например значениям постоянной $m < -0.5$! Поэтому впредь считается что практический интерес имеют только значения $m > -0.5$. При этих значениях постоянной m неравенство (19) удовлетворено и оно больше не учитывается.

При интегрировании уравнения (21) использованы таблицы функции $\beta(\xi)$ [6] для четырех значений параметра β_0 : $\beta_0 = 0.5$; 0 ; -0.14 и -0.18 . Первое отвечает ускоренному течению, второе течению с градиентом давления равным нулю и задние два течению с положительным градиентом давления, однако не таким большим чтобы вызвать отрыв пограничного слоя. Для каждого из приведенных значений параметра β_0 интегрирование проведено при $n = 0$; 0.5 и 1 на электронной вычислительной машине дискретного счета Национал Эллиотт 803 Б*. При этом использован метод Рунге-Кутта-Мерсон [7] при точных пяти десятичных местах, причем для редукции граничных условий на одну точку использована формула Гелкеа [8]. Некоторые результаты интегрирования даны на рис. 2, а также и в таблице 1. Когда они известны, можно сформировать выражения для вычисления всех характерных величин пограничного слоя:

$$\frac{r_0(x) \tau_w(x)}{2 \mu U(x)} = \frac{1}{\Delta(\xi)} F_0''(0, \beta_0) + F_0'''(0; \beta_0, n)$$

$$\frac{A_1}{\pi r_0^2} = \Delta(\xi) [\tau_0 - \Delta(\xi) \tau_1]$$

* Интегрирование на вычислительной машине осуществлено благодаря большому труду вложенному В. Симоновичем, Г. Црниловичем и Д. Живковичем, которым автор приносит свою глубокую благодарность.

где:

$$\eta_0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F_0(\eta; \beta_0)] \text{ и } \eta_1 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F_1(\eta; \beta_0, n)$$

$$\frac{A_2}{\pi r_0^2} = \Delta(\xi) \left[\int_0^\infty F_0'(1 - F_0') d\eta - \Delta(\xi) \int_0^\infty F_1'(2F_0' - 1) d\eta \right]$$

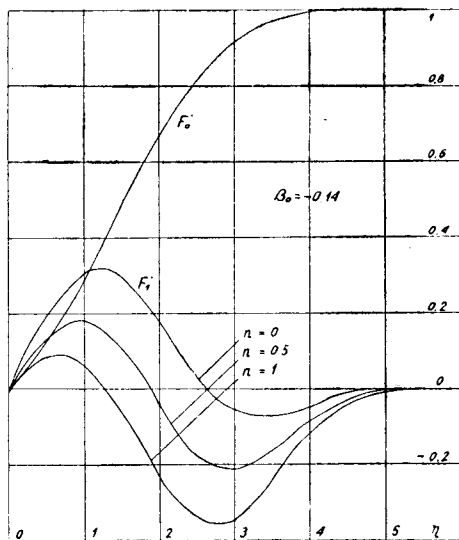


Рис. 2

	$\beta_0 = 0.5$			$\beta_0 = 0$		
	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
$F_1(\infty)$	-0.100	-0.154	-0.180	-0.022	-0.254	-0.411
$F_1''(0)$	0.285	0.266	0.256	0.346	0.283	0.234
	$\beta_0 = -0.14$			$\beta_0 = -0.18$		
$F_1(\infty)$	0.414	-0.131	-0.604	1.428	0.377	-0.688
$F_1''(0)$	0.484	0.358	0.231	0.728	0.504	0.247

Таблица 1

Из литературы которой мы располагали следует что решен только случай обтекания круглого цилиндра ($n = 0$) при градиенте давления равным нулю ($\beta_0 = 0$). Это известное решение Себан-Бонд-Кэлли [9, 10] у которого $F_1''(0) = 0.348$ и $F_1(\infty) = -0.018$. Для того же случая здесь получено $F_1''(0) = 0.346$ и $F_1(\infty) = -0.022$. Так как решение Себан-Бонд-Кэлли получено на аналогичной вычислительной машине и наверно применением некоторого другого численного метода, можно сказать что разница между полученными результатами небольшая.

Еще можно заметить что один из решенных случаев принадлежит классу автомодельных решений. Это случай обтекания тела имеющего

приблизительно форму параболоида вращения ($n=1/2$) при градиенте давления равным нулю ($m=0$) обеспечивающему удовлетворение условия: $m+2n=1$. Легко проверить что тогда $\Delta(\xi)=\text{const.}$ и все характерные величины пограничного слоя станут функциями только переменной η .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Saljnikov: *Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern* — DVL Bericht Nr. 133, 1960.
- [2] H. Görtler: *A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows* — Journ. of Math. and Mech. Vol. 6, No. 1, 1957.
- [3] H. Schlichting: *Grenzschicht-Theorie* — G. Braun, Karlsruhe 1965.
- [4] R. F. Probstein and D. Elliott: *The Transverse Curvature Effect in Compressible Axially Symmetric Laminar Boundary-Layer Flow* — J. Aeron. Sci., No. 3, 1956.
- [5] Falkner, V. M., and Skan, S. W.: *Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations* — Rep. Memor. Aero. Res. Coun., No. 1314, 1930.
- [6] D. R. Hartree: *On the Equation Occuring in Falkner and Skan's Approximate Treatment of the Equations of the Boundary Layer* — Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 1937.
- [7] 803 Library Subroutine I 5 (Runge-Kutta-Merson integration) — Bibliotheka „Energoprojekt“-a.
- [8] G. Helke: *Zahlentafeln universeller Funktionen zur Berechnung rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichten* — DVL Bericht Nr. 135, 1960.
- [9] R. A. Seban and R. Bond: *Skin-Friction and Heat-Transfer Characteristics of a Laminar Boundary Layer on a Cylinder in Axial Incompressible Flow* — J. Aeron. Sci., No. 10, 1951.
- [10] H. R. Kelly: *A Note on the Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder in Axial Incompressible Flow* — J. Aeron. Sci., No. 9, 1954.