PUBLICATIONS DE L' INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 7 (21), 1967, p. 5—24

TRANSFORMATIONS CANONIQUES DANS LA THEORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

Đorđe Mušicki

(Communiqué le 20 octobre 1965)

Les transformations canoniques dans la théorie des champs sont étudiées pour le cas classique à la base du calcul des fonctionnelles. De cette façon les relations générales correspondantes, l'équation d'Hamilton-Jacobi, les crochets de Lagrange et de Poisson et tous les invariants intégraux sont obtenus, d'où suit le théprème généralisé de Liouville aussi.

Introduction. — L'application des méthodes analytiques à la théorie des champs représente, comme on le sait, une extension de celles usuelles en mécanique analytique et se base sur le principe variationnel d'Hamilton [1]. De cette façon, à la base du calcul des fonctionnelles [2], les transformations canoniques dans la théorie des champs sont intorduites par *P. Weiss* [3], étudiées dans la formulation covariante à la base du formalisme paramétrique par *S. Watanabe* [4] et *K. Roberts* [5] et à la base du formalisme direct par *R. Good* [6], *R. Liotta* [7] et *H. Freistadt* [8]. Le premier groupe des auteurs a considéré le cas habituel ($c=1$) à partir des invariants intégraux, mais sans exprimer les conditions nécessaires sous la forme des crochets de Lagrange et en laissant à côté les invariants intégraux d'ordre supérieur. Pour la surface $t=\text{const}$ ces résultats se réduisent aux ceux-ci du cas classique, qui représentent la généralisation directe des résultats de mécanique analytique.

Le but du présent travail est de développer sur la base du calcul des fonctionnelles une extension de la théorie des transformations canoniques à la théorie classique des champs. Après une introduction mathématique au calcul des fonctionnelles, les transformations canoniques seront introduites et déterminées d'une manière la plus générale à l'aide des fonctionnelles. En nous appuyant sur le principe de Pfaff-Bilimović [9], généralisé aux champs [10], ou sur „formule aux limites", donnant la variation générale d'action, nous étudierons les propriétés de ces transformations et leur application à la théorie d'Hamilton-Jacobi, en continuant nos études sur ce problème [11]. Les conditions des transformations canoniques peuvent être formulées à l'aide des crochets de Lagrange et de Poisson, convenablement définis et l'invariance de ceux-ci est démontrée. Ensuite, le concept d'espace de phase sera étendu aux champs en tant qu'un espace fonctionnel ou un espace euclidien étendu. A cette base on introduira et étudiera des invariants intégraux, qui généralisent ceux de Poincaré-Caran du premier ordre et d'ordre supérieur, d'où suit le théorème généralisé de Liouville.

A la fin, je voudrais ici remercier M. A. Mercier, professeur à la Faculté des Sciences à Berne de sa généreuse hospitalité et de l'intérêt qu'il a porté à mon travail, ainsi que MM. H. Leutwyler et M. Zulauf pour les discussions fructueuses et stimulantes. Je voudrais remercier l'UNESCO aussi pour l'octroi d'une bourse, qui a rendu possible mon séjour à Berne pendant l'année scolaire 1964—65.

1. Quelques formules du calcul des fonctionnelles. — Pour une fonctionnelle de la forme

$$F[\varphi_i(\vec{r},\tau)] = \int \mathfrak{F}(\varphi_i, \varphi_{ij}, x_j)\, dV, \qquad \varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

la dérivée fonctionnelle par rapport à φ_i est définie par

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi_i} = \lim_{\overline{\Delta\varphi_i}, \Delta V \to 0} \frac{F[\ldots, \varphi_i + \Delta\varphi_i, \ldots] - F[\ldots, \varphi_i, \ldots]}{\overline{\Delta\varphi_i}\, \Delta V} \tag{1.2}$$

où $\Delta\varphi_i$ est la variation de la fonction $\varphi_i(\vec{r},\tau)$ au voisinage d'un point M, définition qui donne après intégration par parties

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi_i} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varphi_i} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varphi_{ij}}. \tag{1.3}$$

Bien entendu, F est aussi une fonction ordinaire de τ, donc il existe encore un deuxième type de la dérivée

$$\frac{dF}{d\tau} = \int \sum_i \frac{\delta F}{\delta \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{d\tau}\, dV. \tag{1.4}$$

D'autre part, la différentielle fonctionnelle peut être définie en posant

$$\delta F = \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} \{F[\varphi_i + \Delta\varphi_i] - F[\varphi_i]\}_l \tag{1.5}$$

qui est équivalent à

$$\delta F = \int \sum_i \frac{\delta F}{\delta \varphi_i(\vec{r})} \delta\varphi_i(\vec{r})\, dV. \tag{1.6}$$

D'une manière semblable, on a aussi

$$dF = \int \sum_i \frac{\delta F}{\delta \varphi_i(\vec{r})} d\varphi_i(\vec{r})\, dV \tag{1.7}$$

Pour les applications qui suivent, ce ne seront que le premier type de dérivée et le second de différentielle qui auront de l'importance.

Si la fonctionnelle F est une fonction de la forme

$$F = f(\vec{r}) = \int K(\vec{r}, \vec{r}')\, \varphi(\vec{r}')\, dV' \tag{1.8}$$

utilisant un noyau $K(\vec{r},\vec{r}')$, la dérivée fonctionnelle (1.2) se réduit au noyau lui-même

$$\frac{\delta f(\vec{r})}{\delta\varphi(\vec{r}')}=\frac{\partial}{\partial\varphi(\vec{r}')}[K(\vec{r},\vec{r}')\varphi(\vec{r}')]=K(\vec{r},\vec{r}'). \tag{1.9}$$

Dans le cas $\varphi(\vec{r}),=f(\vec{r})$, on a

$$f(\vec{r})=\int\delta(\vec{r}-\vec{r}')f(\vec{r}')\,dV' \tag{1.10}$$

où $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ est la fonction de Dirac, donc $K(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ et

$$\frac{\delta f(\vec{r})}{\delta f(\vec{r}')}=\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{1.11}$$

Supposons encore que F dépend de $\varphi(\vec{r})$ par l'intermédiaire de fonctions $\psi_i(\vec{r})$. Dans ce cas d'un calcul direct on peut démontrer que la dérivée fonctionnelle est donnée par

$$\frac{\delta F}{\delta\varphi(\vec{r})}=\int\sum_i\frac{\delta F}{\delta\psi_i(\vec{r}')}\frac{\delta\psi_i(\vec{r}')}{\delta\varphi(\vec{r})}dV'. \tag{1.12}$$

2. Transformations canoniques générales. — Considérons maintenant un champ physique déterminé par certaines fonctions du champ

$$\psi_i=\psi_i(\vec{r},t)\qquad(i=1,2,\ldots,n), \tag{2.1}$$

où t est le temps et admettons seulement que ce champ rentre seul dans la construction d'une fonction de Lagrange

$$L[\psi_i,\dot{\psi}_i;\;t]=\int\mathscr{L}(\psi_i,\psi_{ij},\dot{\psi}_i,x_j,t)\,dV. \tag{2.2}$$

Cette quantité est une fonctionnelle du type (1.1) dépendant de tous les $\psi_i(\vec{r},t)$, $\dot{\psi}_i(\vec{r},t)$ et t. Par la fonction de Lagrange il faut entendre une fonction soumise à un principe de variation.

Les équations du „mouvement“ correspondantes peuvent être obtenues à l'aide du principe variationnel d'Hamilton, ou encore et de préférance au moyen du principe généralisé de Pfaff-Bilimović [10]. De cette manière, on obtient les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_i}-\frac{\delta L}{\delta\psi_i}=0, \tag{2.3}$$

et en introduisant les densités d'impulsion par

$$\pi_i=\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_i}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_i}, \tag{2.4}$$

les équations d'Hamilton

$$\frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\delta H}{\delta\pi_i}, \tag{2.5}$$

où la fonction d'Hamilton est définie par

$$H[\psi_i, \pi_i;\ t] \equiv \int \mathcal{H}\, dV = \int (\sum_i \pi_i \dot{\psi}_i - \mathcal{L})\, dV. \tag{2.6}$$

Dans le deuxième cas, les équations d'Hamilton sont les équations généralisées de Pfaff correspondant à un élément d'action mis sous la forme canonique

$$\Phi = L\, dt = \int (\sum_i \pi_i\, d\psi_i - \mathcal{H}\, dt)\, dV \tag{2.7}$$

Exécutons sur les variables canoniques des transformations sous la forme des fonctionnelles

$$\bar{\psi}_i = F_i[\psi_k, \pi_k;\ t], \qquad \bar{\pi}_i = G_i[\psi_k, \pi_k;\ t]. \tag{2.8}$$

Ce seraient par exemple les transformations

$$\bar{\psi}(\vec{r}, t) = \int \{A(\vec{r}, \vec{r}')\, \psi(\vec{r}', t) + B(\vec{r}, \vec{r}')\, \pi(\vec{r}', t)\}\, dV'$$

$$\bar{\pi}(\vec{r}, t) = \int \{C(\vec{r}, \vec{r}')\, \psi(\vec{r}', t) + D(\vec{r}, \vec{r}')\, \pi(\vec{r}', t)\}\, dV',$$

qui, comme un cas spécial, peuvent se réduire aux fonctions ordinaires. S'il existe une fonctionnelle $\bar{H}[\bar{\psi}_k, \bar{\pi}_k;\ t]$ telle que pour les variables nouvelles les équations d'Hamilton (2.5) conservent leur forme

$$\frac{d\bar{\pi}_i}{dt} = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta\bar{\psi}_i}, \qquad \frac{d\bar{\psi}_i}{dt} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta\bar{\pi}_i}, \tag{2.9}$$

nous dirons que ce sont des transformations canoniques.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une tranformation du type considéré soit canonique est suivante. Puisque les équations d'Hamilton s'obtiennent à partir de la forme (2.7) et toutes les formes de Pfaff qui ne diffèrent que par un multiplicateur $c(\vec{r})$ ou par la différentielle d'une fonctionnelle G sont équivalentes, on obtient

$$\int (\sum_i \pi_i\, d\psi_i - \mathcal{H}\, dt)\, dV = \int c(\vec{r})(\sum_i \bar{\pi}_i\, d\bar{\psi}_i - \bar{\mathcal{H}}\, dt)\, dV + dG. \tag{2.10}$$

On peut nommer cette fonctionnelle G génératrice de transformation canonique.

Notons encore qu'on peut arriver au même résultat à partir de „formule aux limites", donnant la variation générale d'action [3]

$$\delta W = \left| \int (\sum_i \pi_i\, \delta\psi_i - \mathcal{H}\, \delta t)\, dV \right|_{t_1}^{t_2},$$

qui est équivalent à la validité des équations du mouvement, mais dans ce cas au lieu des différentielles nous aurions les variations correspondantes.

Prenons d'abord une génératrice du type $G_1[\psi_i, \overline{\psi}_i;\ t]$. Dans ce cas la condition (2.10) prend la forme

$$\int \Big(\sum_i \pi_i\, d\psi_i - c\sum_i \overline{\pi}_i\, d\overline{\psi}_i\Big)\, dV + (\tilde{c}\overline{H} - H)\, dt =$$

$$= \int\Big(\sum_i \frac{\delta G_1}{\delta \psi_i}\, d\psi_i + \sum_i \frac{\delta G_1}{\delta \overline{\psi}_i}\, d\overline{\psi}_i\Big)\, dV + \frac{\partial G_1}{\partial t}\, dt,$$

où $\tilde{c}$ représente la valeur moyenne de $c(\vec{r})$ dans le volume V, d'où suit, en vertu de l'indépendance des $d\psi_i$, $d\overline{\psi}_i$ et dt, que

$$\pi_i = \frac{\delta G_1}{\delta \psi_i}, \qquad c\,\overline{\pi}_i = -\frac{\delta G_1}{\delta \overline{\psi}_i}, \qquad \tilde{c}\overline{H} = H + \frac{\partial G_1}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Si la génératrice G_1 ne contient pas les dérivées par rapport aux coordonnées, c'est un système des équations ordinaires et en général ce sera un système des équations différentielles. En résolvant le premier groupe de ces équations par rapport aux $\overline{\psi}_i$ et en substituant dans le deuxième, on obtient les $\overline{\psi}_i$ et $\overline{\pi}_i$ comme les fonctions respectivement les fonctionnelles des anciennes variables.

Si on écrit la condition (2.10) sous la forme

$$\int \Big\{\sum_i \pi_i\, d\psi_i + c\sum_i \overline{\psi}_i\, d\overline{\pi}_i + (c\overline{\mathcal{H}} - \mathcal{H})\, dt\Big\}\, dV = d\Big(G_1 + \tilde{c}\int \sum_i \overline{\pi}_i\, \overline{\psi}_i\, dV\Big)$$

on voit qu'on peut introduire une génératrice de la forme

$$G_2[\psi_i, \overline{\pi}_i;\ t] = G_1 + \tilde{c}\int \sum_i \overline{\pi}_i\, \overline{\psi}_i\, dV \tag{2.12}$$

d'où il suit

$$\pi_i = \frac{\delta G_2}{\delta \psi_i}, \qquad c\,\overline{\psi}_i = \frac{\delta G_2}{\delta \overline{\pi}_i}, \qquad \tilde{c}\overline{H} = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}. \tag{2.13}$$

D'une manière semblable, pour une génératrice de la forme

$$G_3[\pi_i, \overline{\psi}_i;\ t] = G_1 - \int \sum_i \pi_i\, \psi_i\, dV \tag{2.14}$$

on obtient

$$\psi_i = -\frac{\delta G_3}{\delta \pi_i}, \qquad c\,\overline{\pi}_i = -\frac{\delta G_3}{\delta \overline{\psi}_i}, \qquad \tilde{c}\overline{H} = H + \frac{\partial G_3}{\partial t}. \tag{2.15}$$

Enfin, pour

$$G_4[\pi_i, \overline{\pi}_i;\ t] = G_1 + \tilde{c}\int \sum_i \overline{\pi}_i\, \overline{\psi}_i\, dV - \int \sum_i \pi_i\, \psi_i\, dV \tag{2.16}$$

on a

$$\psi_i = -\frac{\delta G_4}{\delta \pi_i}, \qquad c\,\overline{\psi}_i = \frac{\delta G_4}{\delta \overline{\pi}_i}, \qquad \tilde{c}\overline{H} = H + \frac{\partial G_4}{\partial t}. \tag{2.17}$$

3. Transformations canoniques infinitésimales. — Considérons maintenant les transformations canoniques de la forme

$$\overline{\psi}_i = \psi_i + \delta\psi_i, \qquad \overline{\pi}_i = \pi_i + \delta\psi_i. \tag{3.1}$$

Pour étudier ces transformations, définissons une première génératrice

$$G_2^0 = \int \sum_k \psi_k \overline{\pi}_k \, dV. \tag{3.2}$$

Elle engendre d'après (2.13) avec $c=1$

$$\pi_i = \frac{\delta G_2^0}{\delta \psi_i} = \overline{\pi}_i, \qquad \overline{\psi}_i = \frac{\delta G_2^0}{\delta \overline{\pi}_i} = \psi_i,$$

qui est la transformation identique. En formant alors

$$G_2 = \int \sum_k \psi_k \overline{\pi}_k \, dV + \varepsilon G[\psi_i, \overline{\pi}_i;\ t] \tag{3.3}$$

où ε est paramètre arbitrairement petit, nous avons la génératrice d'une transformation canonique infinitésimale et G peut être nommé la partie principale de la génératrice. Dans ce cas, on a

$$\pi_i = \overline{\pi}_i + \varepsilon \frac{\delta G}{\delta \psi_i}, \qquad \overline{\psi}_i = \psi_i + \varepsilon \frac{\delta G}{\delta \overline{\pi}_i}$$

et puisque $\delta G/\delta \overline{\pi}_i \approx \delta G/\delta \pi_i$ on obtient

$$\delta \psi_i = \varepsilon \frac{\delta G}{\delta \pi_i}, \qquad \delta \pi_i = -\varepsilon \frac{\delta G}{\delta \psi_i}, \tag{3.4}$$

G et ε étant donnés, ces formules déterminent les transformations canoniques infinitésimales d'une manière univoque.

Pour le cas spécial où

$$G = H, \qquad \varepsilon = dt \tag{3.5}$$

on obtient à cause des équations d'Hamilton

$$\delta \psi_i = dt \frac{\delta H}{\delta \pi_i} = d\psi_i, \qquad \delta \pi_i = -dt \frac{\delta H}{\delta \psi_i} = d\pi_i,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \delta \psi_i &= \psi_i(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \psi_i(\vec{r}, t) \\ \delta \pi_i &= \pi_i(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \pi_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc, l'évolution du champ au cours du temps peut être considérée comme une suite des transformations canoniques infinitésimales engendrées par $G=H$.

Formons pour une fonctionnelle des variables canoniques la variation dans le sens

$$\delta F = F[\overline{\psi}_i, \overline{\pi}_i;\ t] - F[\psi_i, \pi_i;\ t] \tag{3.7}$$

et appliquons d'autre part la formule de Taylor généralisée aux fonctionnelles ([2], p. 25)

$$F[\varphi_i(\vec{r}) + h_i(\vec{r})] = F[\varphi_i(\vec{r})] + \int \sum_i h_i(\vec{r}') \frac{\delta F}{\delta \varphi_i(\vec{r}')} dV' + \cdots$$

En se bornant aux petites quantités du premier ordre

$$F[\psi_i+\delta\psi_i,\pi_i+\delta\pi_i;\ t]=F[\psi_i,\pi_i;\ t]+\int\left(\sum_k \delta\psi_k(\vec{r}')\frac{\delta F}{\delta\psi_k(\vec{r}')}+\right.$$

$$\left.+\sum_k \delta\pi_k(\vec{r}')\frac{\delta F}{\delta\pi_k(\vec{r}')}\right)dV'$$

la formule (3.4) nous permet d'écrire

$$\delta F=\varepsilon\int\sum_k\left(\frac{\delta F}{\delta\psi_k}\frac{\delta G}{\delta\pi_k}-\frac{\delta F}{\delta\pi_k}\frac{\delta G}{\delta\psi_k}\right)dV,$$

c'est-à-dire, d'après la définition du crochet de Poisson

(3.8) $$\delta F=\varepsilon[F,G].$$

A la base de cette formule on peut étudier les constantes du mouvement. Si une fonctionnelle ne change pas au cours du temps, $\frac{dF}{dt}=0$, on dira qu'elle est une constante du mouvement. D'après la relation

$$\frac{dF}{dt}=[F,H]+\frac{\partial F}{\partial t},$$

obtenue en vertu des équations d'Hamilton, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour une constante du mouvement indépendante du temps est

(3.9) $$[F,H]=0.$$

Ce résultat est valable aussi pour les fonctions considérées comme fonctionnelles.

A la suite de (3.8) on peut obtenir un critère pour les constantes du mouvement. Pour $F=H$ on a

(3.10) $$\delta H=\varepsilon[H,G]$$

et si G est une constante du mouvement qui ne dépend pas explicitement du temps, $[G,H]=0$ et par suite

(3.11) $$\delta H=0.$$

Donc, toutes les parties principales de génératrice indépendantes du temps pour lesquelles la fonction d'Hamilton reste invariante fournissent des constantes du mouvement.

4. Méthode d'Hamilton-Jacobi. — Considérons maintenant une transformation canonique qui annule identiquement la nouvelle fonction d'Hamilton

(4.1) $$\overline{H}=\int\overline{\mathcal{H}}\,dV\equiv 0$$

et choisissons en qualité de génératrice $G_2[\psi_i,\overline{\pi}_i;\ t]$, désignée par S. Dans ce cas le système (2.13) se réduise à

(4.2) $$\pi_i=\frac{\delta S}{\delta\psi_i},\qquad c\,\overline{\psi}_i=\frac{\delta S}{\delta\overline{\pi}_i},\qquad c\overline{H}=H+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

et les équations d'Hamilton dans les variables nouvelles s'écriront

$$\frac{d\bar{\pi}_i}{dt} = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta \bar{\psi}_i} \equiv 0, \qquad \frac{d\bar{\psi}_i}{dt} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta \bar{\pi}_i} \equiv 0,$$

donc les $\bar{\pi}_i$ et $\bar{\psi}_i$ sont des constantes du mouvement. Puisque d'ailleurs

$$\frac{d\bar{\pi}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial t}, \qquad \frac{d\bar{\psi}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial t},$$

les variables nouvelles ne dépendent pas explicitement du temps, mais elles peuvent être des fonctions arbitraires d'espace

$$\bar{\pi}_i = \alpha_i(\vec{r}), \qquad \bar{\psi}_i = \beta_i(\vec{r}). \tag{4.3}$$

Si, d'après le premier groupe (4.2) on remplace tous les π_i dans la fonctionnelle $H[\psi_i, \pi_i;\ t]$ par $\frac{\delta S}{\delta \psi_i}$, la dernière équation prend la forme

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left[\psi_i, \frac{\delta S}{\delta \psi_i};\ t\right] = 0. \tag{4.4}$$

C'est l'équation d'Hamilton-Jacobi dans la théorie classique des champs, mais sous la forme d'une équation fonctionnelle, satisfaite par la génératrice considérée.

Pour faire ressortir la signification de S, formons

$$dS = \int\left(\sum_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} d\psi_i + \sum_i \frac{\delta S}{\delta \bar{\pi}_i} d\bar{\pi}_i\right) dV + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

qui est équivalent à

$$dS = \int \left(\sum_i \pi_i d\psi_i - \mathcal{H} dt\right) dV + \bar{c} \int \beta_i d\alpha_i dV. \tag{4.5}$$

Le premier terme est égal à l'élément d'action et le second ne dépend pas du temps, d'où il suit par intégration

$$S = \int_{t_0}^{t} L dt. \tag{4.6}$$

Donc, la fonctionnelle S coïncide avec l'action à limite supérieure indéfinie.

Supposons que nous ayons trouvé une solution de l'équation d'Hamilton--Jacobi de la forme

$$S = S[\psi_i(\vec{r}, t),\ \gamma_i(\vec{r});\ t], \tag{4.7}$$

où $\gamma_i(\vec{r})$ sont des fonctions arbitraires de position. Cette solution peut être nommée intégrale complète de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Si on prend pour nouvelles densités d'impulsion justement les fonctions $\gamma_i(\vec{r})$, c'est-à-dire si on pose $\alpha_i(\vec{r}) = \gamma_i(\vec{r})$, le système (4.2) prend la forme

$$\frac{\delta S[\psi_i, \alpha_i;\ t]}{\delta \psi_i} = \pi_i, \qquad \frac{\delta S[\psi_i, \alpha_i;\ t]}{\delta \alpha_i} = c\,\beta_i. \tag{4.8}$$

Si la fonctionnelle S ne contient pas les dérivées par rapport aux coordonnées, c'est un système des équations ordinaires et dans le cas général nous avons un système ~~des~~ équations différentielles. En résolvant le deuxième groupe par rapport aux ψ_i et en remplacant dans le premier, on obtient les ψ_i et π_i sous la forme

$$\psi_i = F_i[\alpha_k, \beta_k;\ t], \qquad \pi_i = G_i[\alpha_k, \beta_k;\ t], \tag{4.9}$$

qui dans le premier cas se réduisent aux fonctions ordinaires. En déterminant les fonctions arbitiaires $\alpha_k(\vec{r})$ et $\beta_k(\vec{r})$ à l'aide des conditions initiales, les fonctionnelles en question deviennent les fonctions ordinaires de $\vec{r}$ et de t.

Par conséquent, si on trouve une intégrale complète de l'équation d'Hamilton-Jacobi, le système (4.8) donne les solutions des équations d'Hamilton. C'est le théorème généralisé de Jacobi.

5. Condition nécessaire et suffisante de la forme différentielle. — Exprimons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour une transformation canonique (2.10) en y expliquant les variables anciennes et nouvelles. Si l'on pose

$$d\bar{\psi}_i = \int\left\{\sum_k \frac{\delta\bar{\psi}_i}{\delta\psi_k(\vec{r}'')}\, d\,\psi_k(\vec{r}'') + \sum_k \frac{\delta\bar{\psi}_i}{\delta\pi_k(\vec{r}'')}\, d\,\pi_k(\vec{r}'')\right\} dV'' + \frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial t}\, dt$$

et en considérant la génératrice G comme une fonctionnelle de ψ_i, π_i et t, on obtient

$$\int\left\{\sum_i\left(\pi_i(\vec{r}) - \tilde{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r}'')\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta\psi_i(\vec{r})}\, dV''\right) d\,\psi_i + \sum_i\left(-\tilde{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r}'')\,\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta\pi_i(\vec{r})}\, dV''\right) d\,\pi_i + \left(c\bar{\mathcal{H}} - \mathcal{H} - c\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r})\frac{\partial\bar{\psi}_k(\vec{r})}{\partial t}\right) dt\right\} dV = \tag{5.1}$$

$$= \int\left\{\sum_i \frac{\delta G}{\delta\psi_i}\, d\,\psi_i + \sum_i \frac{\delta G}{\delta\pi_i}\, d\,\pi_i\right\} dV + \frac{\partial G}{\partial t}\, dt.$$

A cause de l'indépendance entre $d\psi_i$, $d\pi_i$ et dt les coefficients correspondants doivent être égaux, d'où

$$\begin{gathered}
\frac{\delta}{\delta\psi_j(\vec{r}')}\left(\pi_i(\vec{r}) - \tilde{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r}'')\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta\psi_i(\vec{r})}\, dV''\right) = \\
= \frac{\delta}{\delta\psi_i(\vec{r})}\left(\pi_j(\vec{r}') - \tilde{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r}'')\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta\psi_j(\vec{r}')}\, dV''\right) \\
\frac{\delta}{\delta\pi_j(\vec{r}')}\left(-\tilde{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r}'')\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta\pi_i(\vec{r})}\, dV''\right) = \\
= \frac{\delta}{\delta\pi_i(\vec{r})}\left(-\tilde{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r}'')\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta\pi_j(\vec{r}')}\, dV''\right)
\end{gathered} \tag{5.2}$$

$$\frac{\delta}{\delta\pi_j(\vec{r'})}\left(\pi_i(\vec{r})-\bar{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r''})\,\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r''})}{\delta\psi_i(\vec{r})}\,dV''\right)=$$

$$=\frac{\delta}{\delta\psi_i(\vec{r})}\left(-\bar{c}\int\sum_k \bar{\pi}_k(\vec{r''})\,\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r''})}{\delta\pi_j(\vec{r'})}\,dV''\right).$$

En développant la troisième de ces conditions, on a d'après la formule (1.11)

$$\int\sum_k\left\{\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r''})}{\delta\psi_i(\vec{r})}\,\frac{\delta\bar{\pi}_k(\vec{r''})}{\delta\pi_j(\vec{r'})}-\frac{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r''})}{\delta\pi_j(\vec{r'})}\,\frac{\delta\bar{\pi}_k(\vec{r''})}{\delta\psi_i(\vec{r})}\right\}dV''=\frac{1}{\bar{c}}\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r'})$$

et si on définit le crochet de Lagrange par

$$\left\{u(\vec{r}),\,v(\vec{r'})\right\}=\int\sum_k\left\{\frac{\delta\psi_k(\vec{r''})}{\delta u(\vec{r})}\,\frac{\delta\pi_k(\vec{r''})}{\delta v(\vec{r'})}-\frac{\delta\psi_k(\vec{r''})}{\delta v(\vec{r'})}\,\frac{\delta\pi_k(\vec{r''})}{\delta u(\vec{r})}\right\}dV'', \tag{5.3}$$

cela s'écrit encore

$$\{\psi_i(\vec{r}),\ \pi_j(\vec{r'})\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}}=\frac{1}{\bar{c}}\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{5.4}$$

D'une manière semblable, à partir des autres conditions (5.2), on obtient

$$\{\psi_i(\vec{r}),\ \psi_j(\vec{r'})\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}}=0,\qquad \{\pi_i(\vec{r}),\ \pi_j(\vec{r'})\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}}=0. \tag{5.5}$$

Les relations (5.4) et (5.5) représentent les conditions nécessaires et suffisantes d'une transformation canonique sous la forme différentielle.

6. Crochets de Lagrange et de Poisson. — Introduisons encore l'expression „inverse", le crochet de Poisson

$$[u(\vec{r}),\ v(\vec{r'})]=\int\sum_k\left\{\frac{\delta u(\vec{r})}{\delta\psi_k(\vec{r''})}\,\frac{\delta v(\vec{r'})}{\delta\pi_k(\vec{r''})}-\frac{\delta u(\vec{r})}{\delta\pi_k(\vec{r''})}\,\frac{\delta v(\vec{r'})}{\delta\psi_k(\vec{r''})}\right\}dV''. \tag{6.1}$$

En prenant pour $u_l\,(l=1,\,2,\ldots,\,2n)$ des fonctions quelconques de ψ_i et π_i, calculons la somme suivante

$$S\equiv\int\sum_l\{u_l(\vec{r''}),\ u_i(\vec{r})\}\,[u_l(\vec{r''}),\ u_j(\vec{r'})]\,dV''.$$

Après avoir remplacé les expressions correspondantes, cette somme peut être décomposée en quatre termes, dont le premier vaut

$$S_1=\int\!\!\int\!\!\int\sum_l\sum_k\sum_m\frac{\delta\psi_k(\vec{r'''})}{\delta u_l(\vec{r''})}\,\frac{\delta\pi_k(\vec{r'''})}{\delta u_i(\vec{r})}\,\frac{\delta u_l(\vec{r''})}{\delta\psi_m(\vec{r''''})}\,\frac{\delta u_j(\vec{r'})}{\delta\pi_m(\vec{r''''})}\,dV''''\,dV'''\,dV''$$

et le calcul direct en vertu des formules citées donne

$$S_1=\int\sum_k\frac{\delta u_j(\vec{r'})}{\delta\pi_k(\vec{r'''})}\,\frac{\delta\pi_k(\vec{r'''})}{\delta u_i(\vec{r})}\,dV'''. \tag{6.2}$$

D'une manière analogue, les autres termes deviennent

$$(6.3) \qquad S_2 = S_3 = 0, \qquad S_4 = \int \sum_k \frac{\delta u_j(\vec{r}')}{\delta \psi_k(\vec{r}''')} \frac{\delta \psi_k(\vec{r}''')}{\delta u_i(\vec{r})} dV'''$$

et puisque

$$\int \sum_k \left\{ \frac{\delta u_j(\vec{r}')}{\delta \pi_k(\vec{r}''')} \frac{\delta \pi_k(\vec{r}''')}{\delta u_i(\vec{r})} + \frac{\delta u_j(\vec{r}')}{\delta \psi_k(\vec{r}''')} \frac{\delta \psi_k(\vec{r}''')}{\delta u_i(\vec{r})} \right\} dV''' = \frac{\delta u_j(\vec{r}')}{\delta u_i(\vec{r})},$$

la somme étudiée se réduit à

$$(6.4) \qquad \int \sum_l \{u_l(\vec{r}''), u_i(\vec{r})\} [u_l(\vec{r}''), u_j(\vec{r}')] \, dV'' = \delta_{ij} \delta(\vec{r} - r')$$

Cette relation exprime la liaison entre les crochets de Lagrange et de Poisson, pour un système quelconque des variables canoniques.

Si l' on pose en particulier

$$u_l = \psi_1, \ldots, \psi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n; \qquad u_i = \psi_i, \; u_j = \psi_j,$$

on a

$$\int \sum_l \{\psi_l(\vec{r}'') \psi_i(\vec{r})\} [\psi_l(\vec{r}''), \psi_j(\vec{r}')] \, dV'' - \int \sum_l \{\pi_l(\vec{r}''), \psi_i(\vec{r})\} \times$$

$$\times \int \pi_l(\vec{r}''), \psi_j(\vec{r}')] \, dV'' = \delta_{ij} \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

d'où il suit, en vertu de (5.4) et (5.5), que

$$(6.5) \qquad [\psi_i(\vec{r}), \; \pi_j(\vec{r}')]_{\bar{\psi}, \bar{\pi}} = \bar{c} \, \delta_{ij} \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

De même, on trouverait à la base de (6.4)

$$(6.6) \qquad [\psi_i(\vec{r}), \psi_j(\vec{r}')]_{\bar{\psi}, \bar{\pi}} = 0, \qquad [\pi_i(\vec{r}), \pi_j(\vec{r}')]_{\bar{\psi}, \bar{\pi}} = 0,$$

et ce sont les relations fondamentales pour les crochets de Poisson.

Examinons maintenant comment se transforment les crochets de Lagrange et de Poisson lors d'une transformation canonique. Si on effectue une transformation canonique, le crochet de Poisson pour deux fonctions quelconques $u(\vec{r})$ et $v(\vec{r}')$ devient

$$(6.7) \qquad \{u(\vec{r}), v(\vec{r}')\}_{\bar{\psi}, \bar{\pi}} = \int \sum_k \left\{ \frac{\delta \bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta u(\vec{r})} \frac{\delta \bar{\pi}_k(\vec{r}'')}{\delta v(\vec{r}')} - \frac{\delta \bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta v(\vec{r}')} \frac{\delta \bar{\pi}_k(\vec{r}'')}{\delta u(\vec{r})} \right\} dV''$$

En exprimant les dérivées fonctionnelles de $\bar{\psi}_i$ et $\bar{\pi}_i$ par rapport à $u(\vec{r})$ et $v(\vec{r}')$

$$\frac{\delta \bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta u(\vec{r})} = \int \sum_i \left\{ \frac{\delta \bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta \psi_i(\vec{r}''')} \frac{\delta \psi_i(\vec{r}''')}{\delta u(\vec{r})} + \frac{\delta \bar{\psi}_k(\vec{r}'')}{\delta \pi_i(\vec{r}''')} \frac{\delta \pi_i(\vec{r}''')}{\delta u(\vec{r})} \right\} dV'''$$

$$\frac{\delta \bar{\pi}_k(\vec{r}'')}{\delta v(\vec{r}')} = \int \sum_j \left\{ \frac{\delta \bar{\pi}_k(\vec{r}'')}{\delta \psi_j(\vec{r}'''')} \frac{\delta \psi_j(\vec{r}'''')}{\delta v(\vec{r}')} + \frac{\delta \bar{\pi}_k(\vec{r}'')}{\delta \pi_j(\vec{r}'''')} \frac{\delta \pi_j(\vec{r}'''')}{\delta v(\vec{r}')} \right\} dV''''$$

etc., on obtient

$$\{u(\vec{r}), v(\vec{r}')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \int\int \sum_i \sum_j \left(\frac{\delta\psi_i(\vec{r}''')}{\delta u(\vec{r})} \frac{\delta\psi_j(\vec{r}'''')}{\delta v(\vec{r}')} \{\psi_i(\vec{r}'''), \psi_j(\vec{r}'''')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \right.$$

$$(6.8) \qquad + \frac{\delta\psi_i(\vec{r}''')}{\delta u(\vec{r})} \frac{\delta\pi_j(\vec{r}'''')}{\delta v(\vec{r}')} \{\psi_i(\vec{r}'''), \pi_j(\vec{r}'''')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \frac{\delta\pi_i(\vec{r}''')}{\delta u(\vec{r})} \frac{\delta\psi_j(\vec{r}'''')}{\delta v(\vec{r}')} \times$$

$$\left. \times \{\pi_i(\vec{r}'''), \psi_j(\vec{r}'''')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \frac{\delta\pi_i(\vec{r}''')}{\delta u(\vec{r})} \frac{\delta\pi_j(\vec{r}'''')}{\delta v(\vec{r}')} \{\pi_i(\vec{r}'''), \pi_j(\vec{r}'''')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} \right) dV'''\, dV''''.$$

De cette façon l'expression (6.7) est réduite aux crochets de Lagrange fondamentals, d'où il suit

$$(6.9) \qquad \{u(\vec{r}), v(\vec{r}')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \frac{1}{\tilde{c}} \{u(\vec{r}), v(\vec{r}')\}_{\psi,\pi}.$$

Donc, le crochet de Lagrange est invariant par rapport aux transformations canoniques au facteur $\frac{1}{\tilde{c}}$ près.

D'une manière semblable, pour le crochet de Poisson de deux fonctionnelles F et G on a

$$(6.10) \qquad [F, G]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \int \sum_k \left\{ \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')} \frac{\delta G}{\delta\bar{\pi}_k(\vec{r}'')} - \frac{\delta F}{\delta\bar{\pi}_k(\vec{r}'')} \frac{\delta G}{\delta\bar{\psi}_k(\vec{r}'')} \right\} dV''$$

et en transformant les dérivées fonctionnelles, on obtient

$$[F, G]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \int\int \sum_i \sum_j \frac{\delta F}{\delta\psi_i(\vec{r}''')} \frac{\delta G}{\delta\psi_j(\vec{r}'''')} [\psi_i(\vec{r}'''), \psi_j(\vec{r}'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} +$$

$$(6.11) \qquad + \frac{\delta F}{\delta\psi_i(\vec{r}''')} \frac{\delta G}{\delta\pi_j(\vec{r}'''')} [\psi_i(\vec{r}'''), \pi_j(\vec{r}'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \frac{\delta F}{\delta\pi_i(\vec{r}''')} \frac{\delta G}{\delta\psi_j(\vec{r}'''')} \times$$

$$\left. \times [\pi_i(\vec{r}'''), \psi_j(\vec{r}'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \frac{\delta F}{\delta\pi_i(\vec{r}''')} \frac{\delta G}{\delta\pi_j(\vec{r}'''')} [\pi_i(\vec{r}'''), \pi_j(\vec{r}'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} \right) dV'''\, dV''''.$$

En vertu de (6.5) et (6.6), il s'ensuit que

$$(6.12) \qquad [F, G]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \tilde{c}\, [F, G]_{\psi,\pi},$$

qui est valable aussi bien dans le cas où les fonctionnelles se réduisent aux fonctions. Par conséquent, le crochet de Poisson est invariant lors des transformations canoniques au facteur $\tilde{c}$ près.

Si les transformations canoniques (2.8) ont la forme des fonctions, toutes les intégrales ainsi que les crochets de Lagrange et de Poisson se réduisent aux sommes ordinaires.

7. Espace de phase. — Pour représenter géométriquement les états du champ, on doit introduire le concept d'espace de phase dans la théorie des champs. En qualité d'élément de cet espace prenons un des ensembles suivants:

$$\text{(7.1)}\qquad \begin{array}{ll} \text{a)}\ (\psi_i(\vec{r},t),\pi_i(\vec{r},t)), & \text{b)}\ (\psi_i(\vec{r},t),\pi_i(\vec{r},t);\ t) \\ & \text{c)}\ (\psi_i(\vec{r},t),\pi_i(\vec{r},t);\ x_j,t) \end{array}$$

avec les axes ordinaires pour t et x_j. Parce que les éléments de deux premiers types sont des fonctions, le premier et deuxième type sont des espaces fonctionnels, mais dans le deuxième cas à cause de valeur de t c'est un espace mixte. Ceux deux types donnent une analogie plus étroite à la mécanipue analytique, cependant au point de vue mathématique ils sont beaucoup plus compliqués. Le dernier type, qui était seul utilisé par les auteurs cités, à cause des valeurs de x_j et t est un espace euclidien étendu et c'est la raison pourquoi il est le plus pratique pour les calculs. Dans la théorie des champs on peut considérér tous les trois types équivalents et présentons chacun de ces espaces symboliquement par un système de coordonnées, où un „point" représente l'état du champ considéré.

A la base de ces définitions on peut introduire les concepts géométriques nécessaires, que la ligne, la surface etc., à l'aide des paramètres α_k, qui sont de même nature que les éléments d'espace. Dans le premier type une „ligne" sera définie comme tel ensemble des éléments (7.1) qu'à chaque élément d'entre eux on peut faire correspondre une fonction de position et de temps $\alpha(\vec{r},t)$. Dans le deuxième cas à chaque élément on fait correspondre une fonctions de position $\alpha(\vec{r})$ et dans le troisième une valeur α. D'une manière similaire, on peut définir une „surface" à l'aide de deux paramètres et des „hypersurfaces" à l'aide de 4, 6, 8 . . . paramètres; il y a un nombre infini dénombrable de ces variétés.

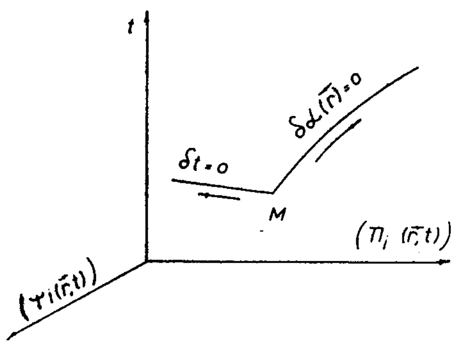
Prenons, par exemple, le deuxième type d'espace de phase. Dans ce cas les éléments $(\psi_i(\vec{r},t),\pi_i(\vec{r},t),\ t)$ le long d'une courbe sont certaines fonctionnelles d'un paramètre $\alpha(\vec{r})$ et les fonctions ordinaires de t

$$\text{(7.2)}\qquad \psi_i(\vec{r},t)=F_i[\alpha(\vec{r});\ t],\quad \pi_i(\vec{r},t)=G_i[\alpha(\vec{r});\ t],\quad t=H[\alpha(\vec{r})]$$

Ces formules représentent les équations paramétriques d'une ligne et les variations des éléments le long de cette courbe sont données par

$$\text{(7.3)}\qquad \begin{aligned} &\delta\psi_i=\int\frac{\delta\psi_i}{\delta\alpha(\vec{r}')}\,\delta\alpha(\vec{r}')\,dV'+\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\,\delta t,\quad \delta\pi_i=\int\frac{\delta\pi_i}{\delta\alpha(\vec{r}')}\,\delta\alpha(\vec{r}')\,dV'+\\ &\qquad+\frac{\partial\pi_i}{\partial t}\,\delta t,\qquad \delta t=\int\frac{\delta t}{\delta\alpha(\vec{r}')}\,\delta\alpha(\vec{r}')\,dV'. \end{aligned}$$

Si on fait varier toutes les formes de $\alpha(\vec{r})$ en posant $\delta t=0$, on obtient tous les états possibles du champ au même instant, alors que si on fait varier seulement t pour $\delta\alpha(\vec{r})=0$, on obtient le développemment du champ au cours du temps.



Si on fait une intégration dans l'espace de phase, la forme explicite des intégrales dépend du type utilisé (7.1). Prenons par exemple

$$J=\oint_L \int_V \sum_i \pi_i \delta\psi_i \, dV$$

le long d'un contour L dans l'espace de phase et sur le domaine V d'espace ordinaire. En employant le deuxième type, pour $\delta t=0$ d'après (7.3) on a

$$J=\oint_L \int_V \int_{V'} \sum_i \pi_i \frac{\delta\psi_i}{\delta\alpha(\vec{r}')} \delta\alpha(\vec{r}')\, dV'\, dV \tag{7.4}$$

et dans le troisième cas $\delta\psi_i=\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\delta\alpha$

$$J=\oint_L \int_V \sum_i \pi_i \frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha} \delta\alpha\, dV. \tag{7.5}$$

L'intégration par rapport à α dans la première intégrale contient deux opérations: l'intégration pour toutes les formes de $\alpha(\vec{r})$ correspondant aux points le long du contour et pour chaque forme l'intégration sur le domaine V, mais dans la deuxième intégrale seulement l'intégration pour toutes les valeurs de α le long du contour. Ces deux formes de l'intégrale sont équivalentes, cependant la seconde est évidement plus facile pour les calculs.

De cette façon, on voit qu'on peut généraliser le concept d'espace de phase à la théorie des champs et à cette base on peut étudier les invariants intégraux correspondants.

8. Invariants intégraux du premier ordre. — Considérons maintenant l'action avec des limites variables, l'action étant alors une fonctions de ces limites aussi. Dans ce cas, les instants ainsi que les fonctions du champ et les densités d'impulsion initiales et finales sont certaines fonctionnelles d'un paramètre

$$\begin{aligned} &t^0=t^0[\alpha(\vec{r})], &&\psi_i^0=\psi_i^0[\alpha(\vec{r});\ t^0], &&\pi_i^0=\pi_i^0[\alpha(\vec{r});\ t^0] \\ &t^1=t^1[\alpha(\vec{r})], &&\psi_i^1=\psi_i^1[\alpha(\vec{r});\ t^1], &&\pi_i^1=\pi_i^1[\alpha(\vec{r});\ t^1) \end{aligned} \tag{8.1}$$

A l'aide de ces quantités, on peut exprimer la variation d'action en généralisant la formule correspondante de mécanique analytique ([12], p. 115), où on doit étendre la sommation aux coordonnées aussi

$$\delta W=\Big| \int \big(\sum \pi_i \delta\psi_i - \mathcal{H}\,\delta t \big)\, dV \Big|_0^1 \tag{8.2}$$

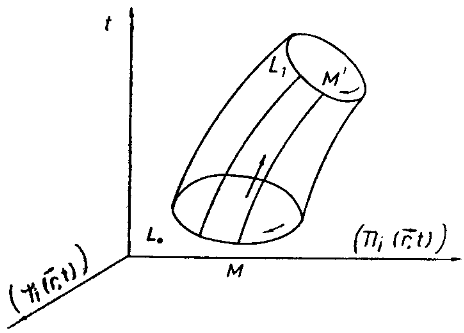
avec

$$(8.3)\qquad \delta\psi_i=\int\left(\frac{\delta\psi_i}{\delta\alpha(\vec{r'})}+\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\,\frac{\delta t}{\delta\alpha(\vec{r'})}\right)\delta\alpha(r')\,dV',\qquad \delta t=\int\frac{\delta t}{\delta\alpha(\vec{r'})}\,\delta\alpha(r')\,dV'.$$

Imaginons alors dans l'espace de phase du deuxième type une courbe arbitraire, mais fermée et les „trajectoires" qui traversent chaque „point" de cette courbe. Ces trajectoires sont définies comme les ensembles

$$(\psi_i(\vec{r},t),\quad \pi_i(\vec{r},t);\quad t)$$

que l'on obtient en y faisant varier le temps t à partir de sa valeur sur L_0. La courbe qui correspond aux valeurs finales soit désignée par L_1 et les équations de L_0 et L_1 ont la forme (8.1). A chaque forme de $\alpha(\vec{r})$ correspond un point M sur L_0 ainsi qu'une trajectoire qui passe à travers M; de cette façon on obient un point M' sur L_1.



Si on intègre l'équation (8.2) pour toutes les formes correspondantes du paramètre $\alpha(\vec{r})$ le long de L_0, on obtient

$$\oint\delta W=0=\oint_{L_1}\int\Big(\sum_i\pi_i\,\delta\psi_i-\mathcal{H}\,\delta t\Big)\,dV-\oint_{L_0}\int\Big(\sum_i\pi_i\,\delta\psi_i-\mathcal{H}\,\delta t\Big)\,dV,$$

c'est-à-dire

$$(8.4)\qquad J\equiv\oint_{L_0}\int_V\Big(\sum_i\pi_i\,\delta\psi_i-\mathcal{H}\,\delta t\Big)\,dV=\oint_{L_1}\int_V\Big(\sum_i\pi_i\,\delta\psi_i-\mathcal{H}\,\delta t\Big)\,dV.$$

Donc, cette intégrale, qui peut être nommée intégrale généralisée de Poincaré--Cartan, est un invariant le long du manteau des trajectoires dans l'espace de phase.

Introduisons encore au lieu du temps un paramètre μ par

$$(8.5)\qquad t=F[\mu;\ \alpha(\vec{r})]$$

tel que pour $\mu=\text{const}$ on obtient les courbes L_0, $L_1,\ldots$ Si on désigne la différentielle par rapport à μ par d, on a en vertu de l'invariance (8.4)

$$(8.6)\qquad dJ=0.$$

Cela s'écrit encore sous la forme

$$\oint_L\int\sum_i\,(d\pi_i\,\delta\psi_i+\pi_i\,d\delta\psi_i)\,dV-\oint_L(dH\,\delta t+H d\,\delta t)=0.$$

et après l'intégration par parties et représentation explicite de dH

$$(8.7)\qquad \oint_L\int\left\{\sum_i\left(d\pi_i+\frac{\delta H}{\delta\psi_i}\,dt\right)\delta\psi_i+\sum_i\left(-d\,\psi_i+\frac{\delta H}{\delta\pi_i}\,dt\right)\delta\pi_i\right\}dV=0.$$

Puisque la courbe L est arbitraire sur le manteau des trajectoires, il faut que les coefficients de $\delta\psi_i$ et $\delta\pi_i$ s'annulent séparément, d'où

$$(8.8) \qquad \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\delta H}{\delta\pi_i}.$$

De là, on peut conclure que l'invariance de l'intégrale de Poincaré-Cartan est équivalente aux équations d'Hamilton. D'autre part, cette invariance est équivalente au principe généralisé de Pfaff-Bilimović, comme en mécanique analytique, quand on laisse le nombre du degré de liberté tendre vers l'infini.

Les états du champ au même instant s'obtiennent en posant $\delta t = 0$ et dans ce cas l'intégrale (8.4) se réduit à

$$(8.9) \qquad J_1 \equiv \oint_{L_0} \int_V \sum_i \pi_i \delta\psi_i \, dV = \oint_{L_1} \int_V \sum_i \pi_i \delta\psi_i \, dV.$$

Ces intégrales peuvent être représentées sous une autre forme aussi, en appliquant le théorème de Stokes étendu aux fonctionnelles ([2], p. 158)

$$\oint_L \int \sum_i A_i \delta\varphi_i \, dV = \int_S \int \int \sum_i \sum_k \left\{ \frac{\delta A_i}{\delta\varphi_k(\vec{r}')} - \frac{\delta A_k}{\delta\varphi_i(\vec{r})} \right\} \delta\varphi_i(r)\, \delta\varphi_k(r')\, dV\, dV'.$$

En posant

$$A_i = \begin{cases} \pi_i, & i \leqslant n \\ 0 & i > n \end{cases}, \qquad \varphi_i = \begin{cases} \psi_i, & i \leqslant n \\ \pi_i, & i > n \end{cases},$$

on obtient, après simplification

$$(8.10) \qquad \oint_L \int \sum_i \pi_i \delta\psi_i \, dV = \int_S \int \sum_i \delta\pi_i \delta\psi_i \, dV$$

et (8.9) peut s'écrire encore

$$(8.11) \qquad J_1 \equiv \int_{S_0} \int_V \sum_i \delta\pi_i \delta\psi_i \, dV = \int_{S_1} \int_V \sum_i \delta\pi_i \delta\psi_i \, dV.$$

Ce sont les invariants intégraux de Poincaré et l'on voit que leur invariance représente un cas spécial de l'invariance générale (8.4) de Poincaré-Cartan, mais ils peuvent être mis aussi sous la forme des intégrales de surface dans l'espace de phase.

Voyons maintenant comment se comportent les intégrales citées lors d'une transformation canonique. Partons de la condition nécessaire et suffisante pour une transformation canonique (2.10) sous la forme

$$(8.12) \qquad \int \Big(\sum_i \pi_i \delta\psi_i - \mathcal{H} \delta t \Big) dV = \tilde{c} \int \Big(\sum_i \bar{\pi}_i \delta\bar{\psi}_i - \bar{\mathcal{H}} \delta t \Big) dV + \delta G[\psi_k, \pi_k;\ t]$$

et intégrons cette équation le long d'une courbe L dans l'espace de phase. De cette façon, on obtient

$$\oint_L \int \Big(\sum_i \pi_i \delta\psi_i - \mathcal{H} \delta t \Big) dV = \tilde{c} \oint_{\bar{L}} \int \Big(\sum_i \bar{\pi}_i \delta\bar{\psi}_i - \bar{\mathcal{H}} \delta t \Big) dV + \oint_L \delta G,$$

où $\bar{L}$ est la courbe correspondante dans l'espace de phase transformé. Puisque en vertu de l'univalence de G le dernier terme est égal à zéro, l'intégrale transformée de Poincaré-Cartan a la valeur

$$\bar{J}=\frac{1}{\tilde{c}}J. \tag{8.13}$$

Dans le cas $\delta t=0$ cette relation se réduit à

$$\bar{J}_1=\frac{1}{\tilde{c}}J_1, \tag{8.14}$$

où les intégrales de Poincaré peuvent être représentées sous la forme des intégrales de surface.

Donc, les intégrales généralisées de Poincaré-Cartan, ainsi que celles de Cartan sont invariants au cours des transformations canoniques au facteur $\frac{1}{\tilde{c}}$ près, l'invariance (8.4) étant un cas spécial, qui correspond au mouvement.

9. Invariants intégraux d'ordre supérieur. — Considérons maintenant les intégrales qui correspondent aux invariants intégraux de Poincaré d'ordre supérieur en mécanique analytique et qui représentent la généralisation des intégrales citées. Pour éviter les difficultés liées à l'ensemble indénombrable des points dans le domaine V, où les fonctions $\psi_i(\vec{r}, t)$, sont définies, divisons ce domaine en un très grand nombre N de cellules, en considérant comme égales toutes les valeur des fonctions $\psi_i(\vec{r}, t)$ à l'intérieur d'une et même cellule, alors que leur valeur variera d'une cellule à l'autre. De cette façon, chaque fonction $\psi_i(\vec{r}, t)$ est remplacée par un ensemble énombrable $\psi_i(\vec{r}_1)$, $\psi_i(\vec{r}_2), \ldots,$ $\psi_i(\vec{r}_N)$, de même que pour les fonctions $\pi_i(\vec{r}, t)$ et le champ déterminé par n fonctions $\psi_i(\vec{r}, t)$ est remplacé par un système équivalent à nN degrés de liberté. Pour chaque valeur fixe de N on peut définir les concepts correspondants et faire tous les calculs, ensuite on fera tendre N vers l'infini.

A cette base introduisons les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
&J_1=\int_S \sum_i \int_V \delta\psi_i(\vec{r})\,\delta\pi_i(\vec{r})\,dV\\
&J_2=\int_{S'}\int_{S''}\sum_{i_1}\sum_{i_2}\int_{V'}\int_{V''} \delta\psi_{i_1}(\vec{r}')\,\delta\psi_{i_2}(\vec{r}'')\,\delta\pi_{i_1}(\vec{r}')\,\delta\pi_{i_2}(\vec{r}'')\,dV'\,dV''\\
&J_{nN}=\int_{S'}\cdots\int_{S^{(nN)}}\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_{nN}}\int_{V'}\cdots\int_{V^{(nN)}} \delta\psi_{i_1}(\vec{r}')\cdots\delta\psi_{i_{nN}}(\vec{r}^{(nN)})\,\delta\pi_{i_1}(\vec{r}')\times\\
&\qquad\times\cdots\delta\pi_{i_{nN}}(\vec{r}^{(nN)})\,dV'\cdots dV^{(nN)}
\end{aligned} \tag{9.1}$$

En définissant des hypersurfaces par les paramètres u_k, on a

$$\delta\psi_{i_1}(\vec{r'})\cdots\delta\psi_{i_k}(\vec{r^{(k)}})\,\delta\pi_{i_1}(\vec{r'})\cdots\delta\pi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}) =$$

$$= \frac{\partial(\psi_{i_1}(\vec{r'}),\cdots,\ \psi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}),\pi_{i_1}(\vec{r'})\cdots\pi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}))}{\partial(u_1,u_2,\cdots\cdots,\ u_{2k})}\,du_1\cdots du_{2k}$$

et les intégrales en question prennent la forme

$$J_1 = \int\limits_S du_1\,du_2\sum_i\int\limits_V \frac{\partial(\psi_i(\vec{r}),\pi_i(\vec{r}))}{\partial(u_1,u_2)}\,dV$$

$$J_2 = \int\limits_{S'}\int\limits_{S''} du_1\cdots du_4\sum_{i_1}\sum_{i_2}\int\limits_{V'}\int\limits_{V''}\frac{\partial(\psi_{i_1}(\vec{r'}),\psi_{i_2}(\vec{r''}),\pi_{i_1}(\vec{r'}),\pi_{i_2}(\vec{r''}))}{\partial(u_1,\cdots u_4)}\,dV'\,dV''$$

(9.2)

$$J_{nN} = \int\limits_{S'}\cdots\int\limits_{S^{(nN)}} du_1\cdots du_{2nN}\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_{nN}}\times$$

$$\times\int\limits_{V'}\cdots\int\limits_{V^{(nN)}}\frac{\partial(\psi_{i_1}(\vec{r'}),\cdots\psi_{i_{nN}}(\vec{r^{(rN)}}),\pi_{i_1}(\vec{r'}),\cdots\pi_{i_{nN}}(\vec{r^{(nN)}}))}{\partial(u_1,\cdots\cdots,\ u_{2nN})}\,dV'\cdots dV^{(nN)}.$$

Dans ces intégrales tous les termes avec deux indices égaux, ordinaires et à côté de $\vec{r}$, sont nuls de sorte que la dernière intégrale se réduit à

$$J_{nN} = \int\limits_{S'}\cdots\int\limits_{S^{(nN)}}\delta\psi_1(\vec{r_1})\cdots\delta\psi_1(\vec{r_N})\cdots\delta\psi_n(\vec{r_1})\cdots\delta\psi_n(\vec{r_N})\,\delta\pi_1(\vec{r_1})\times$$

(9.3)

$$\times\cdots\delta\pi_1(\vec{r_N})\cdots\delta\pi_n(\vec{r_1})\cdots\delta\pi_n(\vec{r_N})\equiv\int\prod\delta\psi_i\delta\pi_i.$$

A la limite $N\to\infty$ cette intégrale devient

$$\Delta\tau = \lim_{N\to\infty} J_{nN} = \lim_{N\to\infty}\int\prod\delta\psi_i\,\delta\pi_i, \tag{9.4}$$

qu'on peut appeler le „volume“ dans l'espace de phase, correspondant aux limites des paramètres u_k pour le cas considéré.

La quantité à intégrer quelconque de nos intégrales est de la forme

$$dJ_k = du_1\cdots du_{2k}\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_k}\times$$

$$\times\int\limits_{V'}\cdots\int\limits_{V^{(k)}}\frac{\partial(\psi_{i_1}(\vec{r'})\cdots\psi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}),\pi_{i_1}(\vec{r'}),\cdots,\pi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}))}{\partial(u_1,\cdots\cdots,\ u_{2k})}\,dV'\cdots dV^{(k)}.$$

Dans ce cas, on peut généraliser la formule correspondante de mécanique analytique ([13], p. 64), qui pour les champs prend la forme

$$\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_k}\int_{V'}\cdots\int_{V^{(k)}}\frac{\partial(\psi_{i_1}(\vec{r'}),\cdots,\psi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}),\pi_{i_1}(\vec{r'}),\cdots,\pi_{i_k}(\vec{r^{(k)}}))}{\partial(u_1,\cdots\cdots,u_{2k})}dV'\cdots dV^{(k)}=$$

(9.5)

$$=2^{-k}\sum\pm\{u_{\nu_1},u_{\nu_2}\}\{u_{\nu_3},u_{\nu_4}\}\cdots\{u_{\nu_{2k-1}},u_{\nu_{2k}}\}$$

où la somme est étendue à toutes les permutations $(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k)$ avec le signe $+$ ou $-$ selon que la permutation est paire ou impaire. De cette façon chaque intégrale peut être exprimée à l'aide des crochets de Lagrange et si on effectue une transformation canonique, d'après (6.9) on obtient

$$\bar{J}_k=\frac{1}{c^k}J_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant nN. \tag{9.6}$$

Par conséquent, toutes les intégrales généralisées de Poincaré J_1, $J_2,\ldots$, J_{nN} sont invariantes lors des transformations canoniques au facteur $\frac{1}{c^k}$ près. Pour chaque valeur de N on peut former une suite des intégrales de Poincaré et dans le cas limite $N\to\infty$ avec $c=1$ il s'ensuit l'invariance de volume correspondant

$$\overline{\Delta\tau}=\Delta\tau\qquad(c=1). \tag{9.7}$$

10. **Theorème de Liouville.** — Imaginons tous les états possibles du champ à un instant t_0, dont les „points" représentatifs dans l'espace de phase remplissent continûment un volume $\Delta\tau(t_0)$. Au cours du temps ces points se déplacent; à l'instant t ils rempliront un certain volume $\Delta\tau(t)$. Puisque d'après (3.6) l'évolution du champ peut être considérée comme une transformation canonique engendrée par $G=H$ avec $c=1$, et qu'en vertu de (9.7) $\Delta\tau$ reste invariant lors de ces transformations, on obtient

$$\Delta\tau(t)=\Delta\tau(t_0). \tag{10.1}$$

Donc, si les points représentatifs du champ considéré à un instant remplissent d'une manière continue un certain volume $\Delta\tau$ de l'espace de phase, à un autre instant quelconque ils remplissent un autre domaine de l'espace de phase du même volume $\Delta\tau$. C'est le théorème généralisé de Liouville.

Si on introduit la densité des points représentatifs

$$\rho=\frac{dN}{d\tau} \tag{10.2}$$

où dN est le nombre des points correspondants, pour le cas considéré $dN(t)=$ $=dN(t_0)$. En vertu de (10.1) il s'ensuit que $\rho(t)=\rho(t_0)$, c'est-à-dire

$$\frac{d\rho}{dt}=[\rho,\ H]+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{10.3}$$

La densité des points représentatifs dans l'espace de phase reste invariante au cours du temps.

On peut arriver à la même conclusion d'une manière différente, semblable à celle de mécanique analytique ([14], p. 111). Si on étend le concept de divergence d'un vecteur $\vec{A}$ aux champs, on a

$$\operatorname{div} \vec{A} = \int \sum_i \frac{\delta A_i}{\delta x_i(\vec{r})} dV, \tag{10.4}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ représente ici l'ensemble des fonctions $(\psi_i(\vec{r}, t), \pi_i(\vec{r}, t))$ et $(A_1, \ldots, A_n)$ le vecteur $\vec{A}$. Puisque l'ensemble (ψ_i, π_i) joue le rôle du „vecteur de position", l'ensemble

$$\vec{V} = (\dot{\psi}_i (\vec{r}, t), \; \dot{\pi}_i (\vec{r}, t)) \tag{10.5}$$

jouera le rôle de la „vitesse" dans l'espace de phase. Les n premières coordonnées correspondantes étant $\dot{\psi}_i$ et les autres $\dot{\pi}_i$, on a

$$\operatorname{div} \vec{V} = \int \left(\sum_i \frac{\delta \dot{\psi}_i}{\delta \psi_i} + \sum_i \frac{\delta \dot{\pi}_i}{\delta \pi_i} \right) dV$$

et en vertu des équations d'Hamilton

$$\frac{\delta \dot{\psi}_i}{\delta \psi_i} + \frac{\delta \dot{\pi}_i}{\delta \pi_i} = \frac{\delta}{\delta \psi_i} \left(\frac{\delta H}{\delta \pi_i} \right) + \frac{\delta}{\delta \pi_i} \left(- \frac{\delta H}{\delta \psi_i} \right) = 0,$$

d'où il suit

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \tag{10.6}$$

C'est une autre forme du théorème de Liouville: les points représentatifs dans l'espace de phase se comportent comme un fluide incompressible.

Notons à la fin qu'il est très probablement qu'à la base de ce théorème de Liouville on peut fonder la mécanique statistique des milieux continus.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. H. Goldstein: *Classical mechanics* (1953).

[2]. V. Volterra: *Theory of functionals and integral and integro-differential equations* (1959).

[3]. P. Weiss: *On the Hamilton-Jacobi theory and quantization of a dynamical continuum*, Proc. Roy. Soc. A, **169** (1938). 102—19.

[4]. S. Watanabe: *On Dirac's general transformation function I*, Prog. Theor. Phys., **2** (1947), 71—88.

[5]. K. Roberts: *On the quantum theory of the elementary particles I, Introduction and classical field dynamics*, Proc. Roy. Soc. A **204** (1950), 123—44.

[6]. R. Good: *Hamiltonian mechanics of fields*, Phys. Rev., **93** (1954), 239—43.

[7]. R. Liotta: *Covariant canonical equations for a classical field* I, Nuovo Cimento **3** (1956), 438—46.

[8]. H. Freistadt: *Poisson brackets in the field theory*, Can. J. Phys., **37** (1959) 5—9.

[9]. A. Bilimović: *Pfafov opšti princip mehanike*, Glas SAN, **95** (1946), 119—52.

[10] Dj. Mušicki: *Generalization of the Pfaff-Bilimović method in the field theory*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **2 (16)** (1962), 5—20.

[11]. D.j. Mušicki: *Canonical transformations and the Hamilton-Jacobi method in the field theory*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **2 (16)** (1962), 21—34.

[12]. Ф. Гантмахер: *Лекции по аналитической механике* (1966).

[13]. A. Mercier: *Principes de mécanique analytique* (1955).

[14]. A. Mercier: *Analytical and canonical formalism in physics* (1959).