PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966., p. 77—82

L'EQUATION DIFFERENTIELLE VECTORIELLE

Bogoljub Stanković

(Communiqué le 29. Octobre 1965)

Dans cet article sont données des conditions pour qu'un système d'équations différentielles dans le corps des opérateurs de J. Mikusiński [2] ait des solutions. On utilise le même procédé comme dans [3].

Le système:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x'_k(\lambda) &= x_{k+1}(\lambda), \qquad k=1,2,\ldots, n-1 \\ x'_n(\lambda) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(\lambda)\, x_{\nu+1}(\lambda) \end{aligned}$$

et l'équation différentielle:

$$(2)\qquad x^{(n)}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(\lambda)\, x^{(\nu)}(\lambda)$$

sont équivalentes comme pour les équations numériques. C'est pourquoi avec es systèmes, les équations d'ordre fini sont aussi comprises.

1. Les espaces C_s, $\overline{C}_s$, $C_s(\lambda)$ et $\overline{C}_s(\lambda)$

Dans un article publié déjà [4], les espaces C_s, $\overline{C}_s$, $C_s(\lambda)$ et $\overline{C}_s(\lambda)$ sont définis et on a montré quelques propriétés importantes pour la théorie des équations différentielles. Comme nous allons nous servir de ces espaces, il ne sera pas inutile de citer les définitions et deux théorèmes les plus intéressants pour le problème qui nous occupe ici.

L'espace C_s, c'est un sous-ensemble du corps K des opérateurs de J. Mikusiński dont les éléments sont de la forme $s^\beta f$, $\beta \geqslant 0$, $f \in C$ (l'espace des fonctions continues sur $[0, \infty)$; s est l'opérateur différentiel dans K, $s^\circ = I$, I est l'élément neutre pour l'opération multiplicative dans K.

C_s a une structure d'algèbre commutative et il contient aussi les opérations les plus fréquentes: dérivée, intégrale, translation et composition avec un élément de C.

Avec une famille de semi-normes N_k et la norme nonhomogène, C_s est un espace du type B^*_0 de Mazur et Orlicz [1]. Il n'est pas isomorphe à un espace vectoriel normé et n'est pas complet. Le plus petit espace du type B_0 qui contient C_s est $\overline{C}_s$. La famille de semi-normes dans $\overline{C}_s$ est définie de la même manière comme celle dans C_s.

L'ensemble des fonctions qui appliquent l'intervalle $[0, \Lambda]$ dans C_s, $\lambda \to s^\beta\, \omega(\lambda)$, où $\omega(\lambda, t)$ est une fonction continue sur D: $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$, $0 \leqslant t < \infty$, on note par $C_s(\lambda)$. Si au contraire, on a la fonction $\lambda \to \frac{g(\lambda)}{F}$, $g(\lambda, t)$ est continue sur D et $F = t^{-p-1}\, \phi(-p, -\sigma; -t^{-\sigma})$, où ϕ est la fonction connue de M. Wright [6], cette fonction appartient à l'ensemble $\overline{C_s}(\lambda)$. On sait que $s^\beta = \frac{F_\beta}{F}$ ce qui montre que $C_s(\lambda) \subset \overline{C_s}(\lambda)$.

L'espace $\overline{C_s}(\lambda)$ est muni d'une famille de semi-normes N_k:

$$N_k\left(\frac{g(\lambda)}{F}\right) = \underset{(\lambda,\, t) \in Dk}{\operatorname{Max}} |g(\lambda, t)|, \quad D_k\text{: } 0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda,\ 0 \leqslant t \leqslant k.$$

Les deux théorèmes suivants seront utiles pour ce qui suit:

Théorème A. *Supposons que la suite* $(\eta_n(\lambda)) \subset \overline{C_s}(\lambda)$ *converge vers* $\eta(\lambda) \in \overline{C_s}(\lambda)$, *alors on a dans* $\overline{C_s}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\Lambda \omega(u)\, \eta_n(u)\, \mathrm{du} = \int_0^\Lambda \omega(u)\, \eta(u)\, \mathrm{du}$$

pour tout $\omega(\lambda) = \{\omega(\lambda, t)\}$, *où* $\omega(\lambda, t)$ *est une fonction continue sur D.*

Théorème B. *Soit M un sous-ensemble de* $\overline{C_s}(\lambda)$ *borné par rapport à chaque semi-norme* N_k *et soient les éléments de M également continus, alors l'ensemble lM est compact.*

2. L'espace $\prod^m C_s(\lambda)$ et $\prod^m \overline{C_s}(\lambda)$

L'espace produit de m espaces $C_s(\lambda)$ on notera par $\prod^m C_s(\lambda)$; ses éléments par les lettres gothiques. Par analogie on a aussi $\prod^m \overline{C_s}(\lambda)$, et les éléments de cet ensemble auront encore un trait par dessus.

Soit $a_i(\lambda) \in \overline{C_s}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, alors $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda) \overset{\text{def}}{=} (a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_m(\lambda))$ et la famille de semi-normes:

$$\mathfrak{N}_k(\mathfrak{a}) \overset{\text{def}}{=} \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\operatorname{Max}} N_k(a_i(\lambda)).$$

Avec cette famille de semi-normes $\prod^m \overline{C_s}(\lambda)$ est un espace topologique où la convergence est d'après les coordonnées. La structure algébrique de $\prod^m \overline{C_s}(\lambda)$ $\left(\prod^m C_s(\lambda)\right)$ est définie comme d'habitude, d'après celle de $\overline{C_s}(\lambda)$ $(C_s(\lambda))$.

3. L'équation différentielle

Considérons le système d'équations différentielles sous la forme vectorielle:

$$\mathfrak{y}'(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))\, \mathfrak{y}(\lambda), \quad \mathfrak{y}(0) = J \tag{3}$$

où $a_{ij}(\lambda) \in C_s(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$; $(a_{ij}(\lambda))$ est une matrice carrée avec m lignes et m colonnes, et $J = (I, I, \ldots, I)$ l'élément neutre pour la multiplication.

Les éléments de la matrice $(a_{ij}(\lambda))$ appartenant à $C_s(\lambda)$ ont la forme $a_{ij}(\lambda) = s^{\beta_{ij}}\, \omega_{ij}(\lambda)$. Soit β le nombre maximal de β_{ij}, c'est-à-dire $\beta \geqslant \beta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, nous dirons que β est l'exposant maximal de la matrice $(a_{ij}(\lambda))$.

Théorème 1. *L'équation (3) avec la condition initiale $\mathfrak{y}(0) = J$, où $a_{ij}(\lambda) \in C_s(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$ et $(a_{ij}(\lambda))$ est une matrice du type (m, m), a une solution s'il existe un k_0 tel que $\beta_k < 2\varepsilon k$, $0 < \varepsilon 1 k \geqslant k_0$, où β_k est l'exposant maximal de la matrice $A^k = (a_{ij}(\lambda_1))\, (a_{ij}(\lambda_2)) \ldots (a_{ij}(\lambda_k))$.*

Démonstration. — L'équation (3) et l'équation intégrale:

$$\mathfrak{y}(\lambda) = \int_0^\lambda \left(a_{ij}(u)\right) \mathfrak{y}(u)\, du + J$$

sont équivalentes.

Construirons la suite $(\mathfrak{y}_n(\lambda))$ de manière suivant:

$$\mathfrak{y}_n(\lambda) = \begin{cases} J, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda/n \\ J + \int_0^{\lambda - \Lambda/n} (a_{ij}(u))\, \mathfrak{y}_n(u)\, \mathrm{du}, & \Lambda/n < \lambda \leqslant \Lambda. \end{cases}$$

L'expression analytique pour le terme général de cette suite sur l'intervalle $\frac{k}{n}\Lambda < \lambda \leqslant \frac{k+1}{n}\Lambda$, $\Lambda \leqslant k \leqslant n-1$ on obtient successivement

$$\mathfrak{y}_n(\lambda) = J + \int_0^{\lambda-\Lambda/n} (a_{ij}(u))J\, \mathrm{du} +$$

$$+ \int_{\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n} (a_{ij}(u))\, \mathrm{du} \int_0^{u-\Lambda/n} (a_{ij}(u_1))\, J\, du_1 +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + $$

$$+ \int_{\frac{k-1}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} (a_{ij}(u))\, du \int_{\frac{k-2}{n}\Lambda}^{u-\Lambda/n} (a_{ij}(u_1))\, du_1 \cdots \int_0^{u_{k-2}-\Lambda/n} (a_{ij}(u_{k-1}))\, J du_{k-1}$$

Soit β_k l'exposant maximal de la matrice:

$$A^k = (a_{ij}(\lambda_1))\, (a_{ij}(\lambda_2)) \cdots (a_{ij}(\lambda_k));$$

l'élément général de cette matrice peut être écrit:

$$\begin{aligned} a_{ij}^k\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) &= s^{\beta_{ij}^k}\, \omega_{ij}^k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \\ &= s^{\beta_k}\, l^{\beta_k - \beta_{ij}^k}\, \omega_{ij}^k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \end{aligned}$$

La fonction $l^{\beta_k - \beta_{ij}^k}\, \omega_{ij}^k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ est définie par une fonction continue pour $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \leqslant \Lambda$.

Supposons que c'est la constante M_q pour laquelle on a:

$$|\omega_{ij}(\lambda, t)| \leqslant M_q, \quad (\lambda, t) \in D_q: \ 0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda, \ 0 \leqslant t \leqslant q,$$

alors

$$|\omega^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_k, t)| \leqslant \frac{n^{k-1}M_q}{k!}, \quad \lambda_1\ \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in [0, \Lambda],$$

$0 \leqslant t \leqslant q$ et

$$\left| l^{\beta_k - \beta^k_{ij}} * \omega^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, t)\right| \leqslant \frac{n^{k-1}M_q}{k!} \int_0^t \frac{u^{\beta_k - \beta^k_{ij} - 1}}{\Gamma(\beta_k - \beta^k_{ij})} du$$

$$\leqslant \frac{n^{k-1}M_q}{k!} \frac{t^{\beta_k - \beta^k_{ij}}}{\Gamma(\beta_k - \beta^k_{ij} + 1)}$$

Maintenant on peut majorer:

$$\max_{\substack{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in [0,\Lambda] \\ 0 \leqslant t \leqslant q}} |a^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) * F| \leqslant$$

$$\leqslant |F_{\beta k}|\, |l^{\beta_k - \beta^k_{ij}} * \omega^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots_2 \lambda_k, t)|$$

$$\leqslant \frac{2}{\sigma} \Gamma\left(\frac{\beta_k + p + 1}{\sigma}\right) \left(\cos\frac{\pi\sigma}{2}\right)^{-\frac{p + \beta_k + 1}{\sigma}} \frac{n^{k-1}M_q}{k!} \frac{q^{\beta_k - \beta^k_{ij}}}{\Gamma(\beta_k - \beta^k_{ij} + 1}$$

$$\leqslant \frac{C_1^{\beta_k} C_2^k}{k!} \Gamma\left(\frac{\beta_k}{\sigma}\right)$$

et par suite:

$$\mathfrak{N}_q \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\lambda - \Lambda/n} (a_{ij}(u_1))\, du_1 \int_{\frac{k-2}{n}\Lambda}^{u_1 - \Lambda/n} (a_{ij}(u_2)) du_2 \cdots \int_0^{u_{k-1} - \Lambda/n} (a_{ij}(u_k))\, J\, du_k\right) =$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant m} N_q \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\lambda - \Lambda/n} du_1 \int_{\frac{k-2}{n}\Lambda}^{u_1 - \Lambda/n} du_2 \ldots \int_0^{u_{k-1} - \Lambda/n} \sum_{j=1}^m a^k_{ij}(u_1, u_2, \ldots u_k)\, du_k \right.$$

$$\leqslant \frac{C_1{}^{\beta_k} C^k{}_2}{k!} \Gamma\left(\frac{\beta_k}{\sigma}\right) \frac{\Lambda^k}{k!}$$

En supposant que $\beta_k < 2 k \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ pour tout $k \geqslant k_0$ et pour σ convenablement choisi, la suite $(\mathfrak{y}_n(\lambda))$ reste bornée par rapport à tout norme $\mathfrak{N}_k$. Pour l'exposant maximal β_k, voir [5].

Dans cette partie de démonstration nous avons utilisée la majoration connue pour la fonction F [6]:

$$|F_\beta(t)| \leqslant \frac{2}{\sigma} \left(\frac{\beta + p + 1}{\sigma}\right) \cos \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^{-\frac{\beta + p + 1}{\sigma}}$$

Nous montrons encore que les éléments de la suite $(\mathfrak{y}_n(\lambda))$ sont également continus, et le théorème B peut être utilisé.

Pour $\lambda_0>0$ on prend n assez grand pour que on ait $\Lambda/n<\lambda\leqslant\Lambda$. Alors,

$$\mathfrak{y}_n(\lambda)-\mathfrak{y}_n(\lambda_0)=\int_{\lambda_0-\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n}(a_{ij}(u))\,\mathfrak{y}_n(u)\,du$$

La coordonnée i-ème de ce vecteur est:

$$\int_{\lambda_0-\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(u)\,y_n^j(u),\quad \mathfrak{y}_n=(y_n^1,y_n^2,\ldots,y_n^m)$$

et elle appartient à $C_s(\lambda)$. C'est pourquoi on a:

$$N_k\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(\lambda)\,y_n^j(\lambda)\right)=$$

$$=\underset{(\lambda,t)\in Dk}{\mathrm{Max}}\left|F_\beta(t)*\sum_{j=1}^{m}l^{\beta-\beta_{ij}}\omega_{ij}(\lambda,t)*y_n^j(\lambda,t)\right|$$

$$\leqslant k\underset{0\leqslant t\leqslant k}{\mathrm{Max}}|F_\beta(t)|\sum_{j=1}^{m}\underset{(\lambda,t)\in Dk}{\mathrm{Max}}\left|l^{\beta-\beta_{ij}}\omega_{ij}(\lambda,t)*y_n^j(\lambda,t)\right|$$

Comme $(\mathfrak{y}_j(\lambda))$ est une suite bornée et on a vu aussi que $N_k\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(\lambda)\,y_n^j(\lambda)\right)$ est borné, soit une telle borne C_k, indépendant de i, nous pouvons maintenant écrire:

$$\mathfrak{N}_k(\mathfrak{y}_n(\lambda)-\mathfrak{y}_n(\lambda_0))=\underset{1\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{Max}}\;N_k\left(\int_{\lambda_0-\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(u)\;y_n^j(u)\,du\right)$$
$$=C_k\,|\lambda-\lambda_0|;$$

de même on a pour $\lambda_0=0$:

$$\mathfrak{N}_k(\mathfrak{y}_n(\lambda)-\mathfrak{y}_n(\lambda_0))\leqslant C_k\,|\lambda|.$$

En utilisant les deux théorèmes cités A et B on peut achever la démonstration.

Théorème 2. *La solution de l'équation*

$$\zeta'(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))\;\zeta(\lambda)+\mathfrak{g}(\lambda)\tag{4}$$

ù $\mathfrak{g}(\lambda)\in\prod^{m}\overline{C}_s(\lambda)$ *sous les conditions du théorème 1 et avec la condition initiale* $\zeta(0)$ *est*

$$\zeta(\lambda)=\mathfrak{y}(\lambda)\,\zeta(0)+\int_0^\lambda\mathfrak{y}(\lambda,u)\;\mathfrak{g}(u)\;du$$

où $\mathfrak{y}(\lambda,u)$ *est la solution de l'équation* (3) *pour laquelle on a* $\mathfrak{y}=(u,u)=J$. En supposant $\zeta(0)\in\prod^{m}\overline{C}_s$, cette solution est unique dans l'espace $\prod^{m}\overline{C}_s(\lambda)$.

Démonstration. — Il n'est pas triviale seulement la démonstration de l'unicité.

Supposons qu'ils existent deux solutions de l'équation (4) sous la même condition initiale. Alors la différence de ces deux solutions satisfait à l'équation homogène:

$$\zeta'(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))\,\zeta(\lambda)$$

et à la condition initiale $\zeta(0)=0$, c'est-à-dire à l'équation intégrale

$$\zeta(\lambda)=\int_0^{\lambda}(a_{ij}(u))\,\zeta(u)\,du$$

où $\zeta(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}\{w_i(\lambda,t)\}$.

Après n- applications de cette équation on obtient

$$\zeta(\lambda)=\int_0^{\lambda}(a_{ij}(u_1))\,du_1\int_0^{u_1}(a_{ij}(u_2))\,du_2\ldots\int_0^{u_{n-1}}(a_{ij}(u_n))\;\zeta(u_n)\,du_n$$

D'après ce que nous avons vu on a:

$$\mathfrak{N}_q\,(\zeta(\lambda))=0\left(C^n\,n^{-\left(2-\frac{\beta k}{n\sigma}\right)n}\right)$$

pour tout $q\in N$. D'où $\zeta(\lambda)\equiv 0$.

L'unicité de la solution dans le théorème 1 on démontre de la même manière.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires I, II*, Studia Math. T.X (1948), 184—208 et T. XIII (1953), 137—179.

[2] J. Mikusiński, *Sur les fondaments du calcul opératoire*, Studia Math. T. XI (1950), 41—70.

[3] B. Stanković, *Solution de l'équation différentielle dans un sous-ensemble des opérateurs de J. Mikusiński*, Publications l'Inst. Math. Beograd, Nouvelle série, T. 5 (19) (1965), 89—95.

[4] B. Stanković, *L'espace* C_S, *le sous-espace des opérateurs de J. Mikusiński*, Bull. de l'Ac. serbe des Sc. et des Arts, classe sc. math. et nat., Sc. math., nouvelle série, Beograd, No 5, sous presse.

[5] B. Stanković, *L'élément maximal d'une matrice*, Publications de l'Inst. Math. Beograd, Nouvelle série T.b (20) (1966) pp. 23

[6] E. M. Wright, *The generalized Bessel function of order greater than one*, Quart. J. Math. Oxford Series, V. 11 (1940), 36—48