PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Neurelle serie, tome 6 (20), 1966, p. 57–63.

RATIONALE TRIGONOMETRISCHE TSCHEBYSCHEFF-APPROXIMATION IN ZWEI VARIABLEN

L. Collatz

(Vogelegt am 5 Oktober 1965)

Es werden Einschl'eßungssätze für d:e Minimalabweichung bei der Tschebyscheff-Approximation mit trigonometrischen oder mit rational gebrochenen trigonometrischen Funktionen bei zwei unabhängigen Veränderlichen angegeben, wobei die Existenz einer Minimallösung nicht vorausgesetzt wird. Als wesentliches Hilfsmittel werden die "H-Mengen" herangezogen, deren Theorie ausführlich an anderer Stelle (z. B. Collatz [5]) gegeben ist und die hier vorausgesetzt wird. Es werden für verschiedene Fälle Beispiele von H-Mengen aufgestellt.

1. Zusammenstellung der benutzten Sätze aus der allgemeinen Theorie

Aus der weit entwickelten Theorie, vgl. z. B. Meinardus [2], [3] sollen hier nur einige Sätze genannt werden und auch diese nicht in der allgemeinsten bisher bekannten Gestalt, sondern nur in der Spezialisierung, die für das Folgende gebraucht wird. $C<B>$ sei der Banachraum, der in einem abgeschlossenen beschränkten Bereich B des n-dimensionalen Punktraumes R^n definierten stetigen Funktion $\varphi(x)$ der Variablen $x=\{x_1, \ldots, x_n\}$ bei der Norm $\|\varphi\| = \underset{x\in B}{\text{Max}} \; (p(x) \; |\varphi(x)|)$ und dem Abstand zweier Funktionen $\rho(\varphi, \psi)=\|\varphi-\psi\|$; dabei ist $p(x)$ eine fest gegebene stetige positive Funktion in B, z. B. $p(\mathrm{x})\equiv 1$.

Es sei $f(x)$ ein gegebenes Element aus $C<B>$ und $\mathrm{W}(\mathrm{a}, x)$ eine gegebene Klasse von Funktionen aus $C<B>$ mit a als Parameter oder a als Vektor von Parametern $a_1, \ldots, a_p$. Es gehöre $f(x)$ nicht zur Klasse $W(a, x)$.

Das stets existierende Infimum

$$\rho_w = \inf_{\varphi\in W} \quad \rho(f, \varphi) \tag{1}$$

wird "Minimalabstand" und ein Element $g\in W$ mit

$$\rho(f, g) = \rho_w \tag{2}$$

wird Minimallösung genannt. Es braucht keine Minimallösung zu geben (vgl. z. B. Meinardus [3]), aber man kann in vielen Fällen bei Vorliegen einer Näherung $h(x)$ für $f(x)$ mit $h \in W$ Einschließungssätze für ρ_w, d. h. untere und obere Schranke ρ_u bzw. ρ_o für ρ_w, aufstellen, die auch in Fällen gelten, in denen gar keine Minimallösung existiert; das reicht für numerische Zwecke oft völlig aus, da man damit die Güte der Näherung $h(x)$ beurteilen kann. Wenn $\rho_u = \rho_o$ ausfällt, hat man in $h(x)$ sogar eine Minimallösung und in solchen Fällen zugleich den Beweis der Existenz einer Minimallösung in dem betreffenden Fall erbracht. Nun wird folgender Begriff benötigt:

Definition einer H-Menge: Es seien M_1 und M_2 zwei feste Punktmengen in B mit der Eigenschaft: es gibt kein Paar w_1, w_2 von Elementen aus W mit

(3) $$w_1 - w_2 > 0 \text{ in } M_1, \quad w_1 - w_2 < 0 \text{ in } M_2.$$

Die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ heißt "H-Menge", wobei angegeben wird, welche Punkte von H zu M_1 und welche zu M_2 gehören. Dann gilt der **Satz** (vgl. z. B. Collatz [4], [5], [7]: es sei w ein festes Element aus W mit dem Fehler $\varepsilon = w - f$. Wenn es eine H-Menge gibt mit

$$\varepsilon > 0 \text{ in } M_1 \text{ und } \varepsilon < 0 \text{ in } M_2 \text{ (oder } \varepsilon > 0 \text{ in } M_2,\ \varepsilon < 0 \text{ in } M_1),$$

so gilt die Einschließung

(4) $$\inf_{x \in M_1 \cup M_2} p(x) \cdot |\varepsilon(x)| \leq \rho_w \leq \|\varepsilon\|.$$

2. Trigonometrische Tschebyscheff-Approximation in zwei Veränderlichen bei Symmetrie.

Diese Theorie soll zunächst an dem Beispiel der Tschebyschff-Approximation periodischer Funktionen (vgl. de la Vallée Poussin [1]) in zwei Variablen erläutert werden, wobei x, y statt x_1, x_2 geschieben werden. B sei der Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$. Es werden entweder nur Funktionen betrachtet, deren Werteverteilung zu den Geraden $x = \pi$, $y = \pi$ symmetrisch ist oder nur Funktionen, die in $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ definiert sind, deren Werte zu den Geraden $x = \pi$, $y = \pi$ symmetrisch ergänzt werden, so daß es sinnvoll ist, sie durch Funktionen der folgenden Klasse W (mit den Parametern a, b_j, c_{jk})

(5) $$w = a + b_1 \cos x + b_2 \cos y + c_{11} \cos 2x + c_{12}\, x \cos y + c_{22} \cos 2y$$

anzunähern.

Für diesen Fall soll eine Mannigfaltigkeit von H-Mengen angegeben werden; dazu werden Zahlen x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, vgl. Abb. 1, mit

$$0 \leq y_j < \frac{\pi}{2} \quad (j = 0, 1, 2)$$

$$0 \leq y_0 < \left(y_1 \text{ und } \frac{\pi}{2}\right) < y_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

gewählt; durch Spiegelung der Punkte x_j, y_j an der Geraden $x = \dfrac{\pi}{2}$ entstehen 6 Punkte, von denen man wie in Abb. 1 die drei durch leere Kreise gekennzeichneten Punkte zur Menge M_1 und die drei durch Vollkreise gekennzeichneten Punkte zu M_2 zählt. Natürlich kann man x-und y-Richtung miteinander vertauschen, Abb. 2. Es ist nun nachzuweisen, daß keine

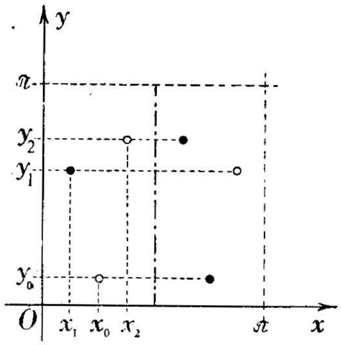

Abb. 1

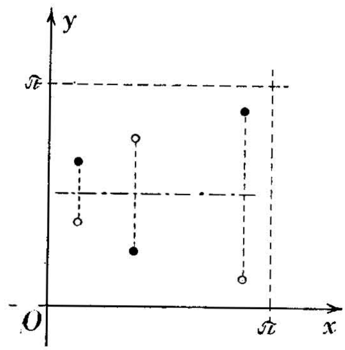

Abb. 2

Differenz $w = w_1 - w_2$ zweier Funktionen aus W in M_1 positiv und in M_2 negativ sein kann. Für solche Zwecke ist ein bestimmter Algorithmus entwickelt worden, der auf der Behandlung von Systemen von Ugleichungen beruht und der in Collatz [5] S. 329—336, [6] S. 47—53 ausführlich beschrieben ist, so daß es hier genügen möge, den Algorithmus an Hand des an sich leicht verständlichen Schemas durchzurechnen:

Nr.	Operation	1	$\cos x$	$\cos y$	$\cos 2x$	$\cos x \cos y$	$\cos 2y$
(1)	Punkt $x = x_0,\ y = y_0$	1	$\cos x_0$	$\cos y_0$	$\cos 2x_0$	$\cos x_0 \cos y_0$	$\cos 2y_0$
(2)	Punkt $x = \pi - x_0,\ y = y_0$	-1	$+\cos x_0$	$-\cos y_0$	$-\cos 2x_0$	$+\cos x_0 \cos y_0$	$-\cos 2y_0$
(3)	$\frac{1}{2}[(1)+(2)]$	0	$\cos x_0$	0	0	$\cos x_0 \cos y_0$	0
(4)	dasselbe mit $x_1,\ y_1$	0	$-\cos x_1$	0	0	$-\cos x_1 \cos y_1$	0
(5)	,, ,, $x_2,\ y_2$	0	$\cos x_2$	0	0	$\cos x_2 \cos y_2$	0
(6)	$\frac{(5)\cos x_0 \cos y_0 - (3)\cos x_2 \cos y_2}{\cos y_0 - \cos y_2}$	0	$\cos x_0 \cos x_2$	0	0	0	0
(7)	falls $\cos y_1 \geq 0$: $\frac{(3)\cos x_1 \cos y_1 + (4)\cos x_0 \cos y_0}{\cos y_0 - \cos y_1}$	0	$-\cos x_0 \cos x_1$	0	0	0	0
(8)	falls $\cos y_1 \leq 0$: $\frac{(4)\cos x_2 \cos y_2 + (5)\cos x_1 \cos y_1}{\cos y_2 - \cos y_1}$	0	$-\cos x_1 \cos x_2$	0	0	0	0

Hier hat in Zeile (6) der einzige von Null verschiedene Koeffizient $\cos x_0 \cos x_2$ ein positives Vorzeichen, während der entsprechende Koeffizient in (7) bzw. (8) (je nach dem Vorzeichen von $\cos y_1$) ein negatives Vorzeichen hat; der Algorithmus hat damit die betrachtete Konfiguration der 6 Punkte als H-Menge erwiesen.

Läßt man das Punktepaar $x=x_2$, $y=y_2$ und $x=\pi-x_2$, $y=y_2$ fort und nimmt anstelle von (5) die Klasse der Funktionen.

$$w=a+b_1\cos x+b_2\cos y \tag{6}$$

so bilden die verbliebenen 4 Punkte, Abb. 3, für diese Funktionenklasse eine H-Menge, wie sich aus dem obigen Schema ergibt, wenn man nur die durch Einrahmung hervorgehobenen Zeilen (1) bis (4) und die Spalten für 1, $\cos x$, $\cos y$ betrachtet; denn hier haben die Koeffizienten bei $\cos x$ in Zeile (3) und (4) verschiendenes Vorzeichen, da $\cos x_0>0$ und $-\cos x_1<0$ ist.

Ein weiteres Beispiel einer H-Menge bilden die 4 Punkte auf einer zur $x-$(oder $y-$) Achse parallelen Geraden:

$$M_1=\{(x_1,y_1),\ (\pi-x_2,y_1)\}\ \text{und}\ M_2=\{(x_2,y_1),\ (\pi-x_1,y_1)\},$$

Abb. 4., mit $0\leqslant x_j<\frac{\pi}{2}$ $(j=1,2)$. Hier erhält man nämlich entsprechend obigem Schema

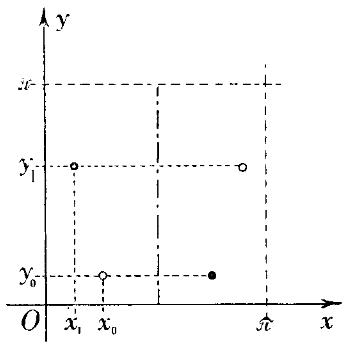

Abb. 3

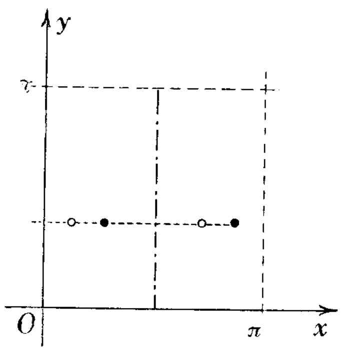

Abb. 4

(3)	Punkt $(x_1 y_1)$ $(\pi-x_1, y_1)$	0	$\cos x_1$	0	0	$\cos x_1\ \cos y_1$	0
(4)	Punkt $(x_2 y_1)$, $(\pi-x_2, y_1)$	0	$-\cos x_2$	0	0	$-\cos x_2\ \cos y_1$	0
(5)	$(3)\cdot\cos x_2+(4)\cos x_1$	0	0	0	0	0	0

Zahlenbeispiele:

I. Für die Funktion $f(x,y)=(1+\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\cos y\right)$ wird in der Klasse (6) die Näherung

$$w=1+\frac{1}{2}\cos y+\cos x$$

betrachtet, die aus f bei Ausmultiplizieren und Fortlassen des Gliedes $\cos x$ $\cos y$ entsteht; hier wird die maximale Abweichung in den 4 Punkten (0, 0), (0, π), (π, π), (π, 0) angenommen, und zwar hat der Fehler $\varepsilon=w-f$ dort wechselndes Vorzeichen, so daß man die 4 Punkte als Punkte einer

H-Menge auffassen kann. Da überdies in diesen 4 Punkten $|\varepsilon|$ den gleichen Wert, nämlich $\frac{1}{2}$ hat, fallen in (4) untere und obere Schranke für den Minimalabstand gleich aus und w ist daher Minimallösung.

II. Für die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{(2+\cos x)\,(2+\cos y)}$ und die Näherung

$$w = \frac{2}{9}\,[2 - \cos x - \cos y]$$

wird bei der gleichen Funktionenklasse (6) und der gleichen H-Menge wie im vorigen Beispiel nach dem Einschließungssatz (4).

$$\frac{1}{9} = 0{,}11.. \leqslant \rho_w \leqslant 0{,}23$$

3. Rationale trigonometrische Tschebyscheff-Approximation.

Das Schema der vorigen Nummer ist auch für rationale trigonometrische Approximation verwendbar, genau so wie die Schemata für Polynome auch für rationale Funktionen H-Mengen liefern (ausführliche Begründung bei Collatz [6]. Legt man hier z. B. die Klasse der Funktionen

$$w = \frac{a + b_1 \cos x + b_2 \cos y}{c + d_1 \cos x + d_2 \cos y} \tag{7}$$

mit Nennern, die nirgends verschwinden, zugrunde, so ist die Frage, ob die Differenz $w_1 - w_2$ zweier solcher Funktionen die Bedingungen (3) erfüllen kann, gleichbedeutend mit der Frage, ob bei den betrachteten Mengen $M_1\, M_2$ ein Ausdruck der Form (5) in allen Punkten von M_1 positiv und in allen Punkten von M_2 negativ sein kann; daher ergibt die Anordnung von Abb. 1 zugleich eine H-Menge für die Funktionenklasse (7).

4. Trigonometrische Tschebyscheff-Approximation bei 2 Variablen im allgemeinen Fall.

Wenn nicht die Symmetrie wie in Nr. 2 vorliegt, steigt natürlich der Aufwand, weil man dann mehr Terme berücksichtigen muß. Hier werde die Klasse der Funktionen

$$\begin{aligned} w = a + b_1 \cos x + b_2 \sin x +\\ + b_3 \cos y + b_4 \sin y + c_1 \cos y \cos x +\\ + c_2 \cos y \sin x + c_3 \sin y \cos x + c_4 \sin y \sin x \end{aligned} \tag{8}$$

gewählt. Es werde der Hilfsbegriff eines "Doppelpaares" eingeführt als Menge der 4 Punkte (x_1, y) $(x_1 + \pi, y)$, $(x_2, y + \pi)$, $(x_2 + \pi, y + \pi)$, Abb. 5, oder der 4 Punkte (x, y_1) $(x, y_1 + \pi)$, $(x + \pi, y_2)$ $(x + \pi, y_2 + \pi)$; nimmt man als Menge M_1 und M_2 je ein Doppelpaar, so erhält man eine H-Menge. Zum Nachweis, daß wirklich eine H-Menge vorliegt, dient der Algorithmus

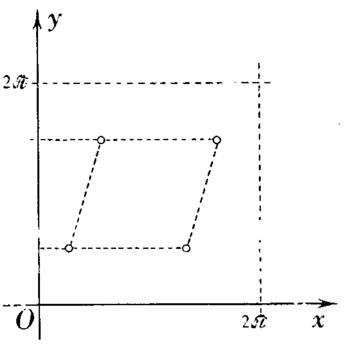

Abb. 5

	1	$\cos x$	$\sin x$	$\cos y$	$\sin y$	$\cos y \cos x$	$\cos y \sin x$	$\sin y \cos x$	$\sin y \sin x$
(1) $x=x_1,\ y=y_1$	1	$\cos x_1$	$\sin x_1$	$\cos y_1$	$\sin y_1$	$\cos y_1 \cos x_1$	$\cos y_1 \sin x_1$	$\mathrm{sis}\, y_1 \cos x_1$	$\sin y_1 \sin x_1$
(2) $x=x_1+\pi,\ y=y_1$	1	$-\cos x_1$	$-\sin x_1$	$\cos y_1$	$\sin y_1$	$-\cos y_1 \cos x_1$	$-\cos y_1 \sin x_1$	$-\sin y_1 \cos x_1$	$-\sin y_1 \sin x_1$
(3) $\frac{1}{2}((1)+(2))$	1	0	0	$\cos y_1$	$\sin y_1$	0	0	0	0
(4) dasselbe mit $y_1+\pi$ statt y_1	1	0	0	$-\cos y_1$	$-\sin y$	0	0	0	0
(5) $\frac{1}{2}((3)+(4))$	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Ein Doppelpaar, welches zu M_1 gehört, führt somit zu einer Zeile, die an erster Stelle eine 1 und sonst nur Nullen enthält, und entsprechend führt ein Doppelpaar der Menge M_2 zu einer Zeile, die mit -1 beginnt und sonst

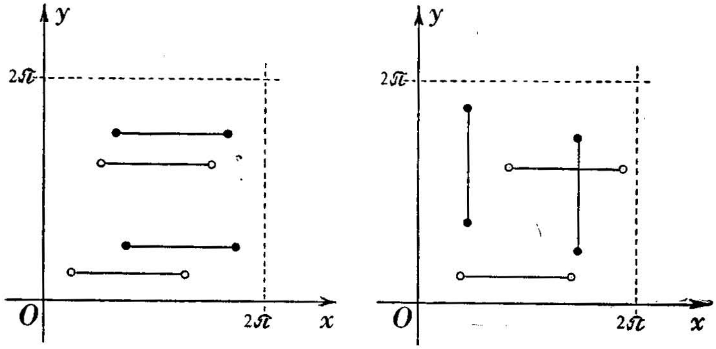

Abb. 6

nur Nullen enthält. Für die H-Menge ist es gleichgültig, ob die parallelen Seiten der Doppelpaare der x-Achse oder der y-Achse parallel sind; es bilden also alle Mengen in Abb. 6 H-Mengen.

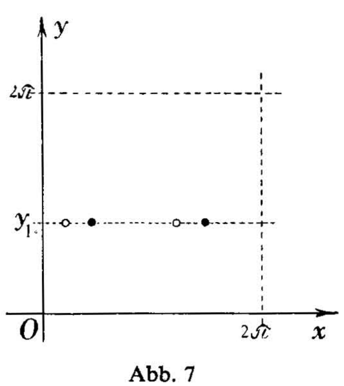

Abb. 7

Auch die 4 Punkte: $M_1 = \{(x_1, y_1)\,(x_1+\pi, y_1)\}$, $M_2 = \{(x_2\, y_1),\ (x_2+\pi, y_1)\}$, Abb. 7 bilden eine H-Menge, weil man dann zu der Zeile (3) des letzten Schemas noch die Zeile mit den Koeffizienten -1, 0, 0, $-\cos y_1$, $-\sin y_1$, 0, 0, 0, 0 hinzu bekommt, die, zu der Zeile (3) addiert, eine neue Zeile mit nur Nullen ergibt. Man kann leicht auf diese Weise weitere H-Mengen aufstellen, auch für kompliziertere Fälle und mit mehr als 2 unabhängigen Veränderlichen; doch sollte hier nur grundsätzlich auf Methoden zur Gewinnung von Einschließungssätzen hingewiesen werden.

LITERATUR

[1] De la Vallée-Poussin [19], *Leçon sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Collection de Monographies sur la théorie des fonctions, Paris 1919, 150, S.

[2] G. Meinardus [62], *Tschebyscheffsche Approximationen*, Arch. Rat. Mech. Anal. 9 (1962), 329-351

[3] G. Meinardus [64], *Approximation von Funktionen und ihre Numerische Behandlung*, Springer Tracts in Natural Philosophy 4 (1964) 180 S.

[4] L. Collatz [56], *Approximation von Funktionen bei einer und bei mehreren unabhängigen Veränderlichen*, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956) 198-211.

[5] L. Collatz [64] *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer 1964. 371 S.

[6] L. Collatz [64a], *Inclusion theorems for the minimal distance in Rational Tschebyscheff Approximation with several variables*, Proc. Symp. Approximation of Functions, Detroit,1964, editor L. Garabedian, Amsterdam 1965, S. 43-56.

[7] L. Collatz [65], *Einschließungssätze für die Minimalabweichung bei der Segmentapproximation*, Simposio Analisi e Applicazioni, Sardegna (Italia) Erscheint demnächst.