PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966. p. 25—28.

EINE EIGENSCHAFT DER BRACHISTOCHRONEN IM WIRBELFREIEN FELDE

Stanimir Fempl

(Vorgelegt am 21 Mai 1965)

Die Brachistochrone ist — wie bekannt — eine Linie in der ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Punkte zum anderen gelangt, wenn er durch eine Kraft bewegt wird.

Wir setzen voraus dass der Körper auf einen Punkt reduziert ist, dass er ein Agensträger ist, so dass sich auf ihm eine Kraft manifestieren kann, die eine Bewegung hervorruft (z. B. ein materieller Punkt, eine punktförmige elektrische Ladung u. s. w.). Einfachheitshalber nennen wir einen solchen Körper „beweglicher Punkt". Weiterhin, setzen wir voraus dass die Linie unbeweglich ist und dass die Kraft $\vec{F}$, die die Bewegung verursacht, nur von der Lage des beweglichen Punktes abhängt. Solche Kräfte sind konservativ und es ist

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

Deshalb existiert die Kraftfunktion U und es ist

$$T = U + h \quad (h = \text{const.}),$$

wo T die lebendige Kraft bedeutet.

Sehr wichtig ist die Frage, ob die gesuchte Brachistochrone eine ebene Kurve ist, oder nicht. Denn, im Falle einer ebenen Kurve kann man z. B. die Koordinatenebene xoy in die Ebene der Kurve legen. Wenn nähmlich $\vec{r}(x, y, z)$ den Radiusvektor des beweglichen Punktes darstellt, so kann man wegen $T = mv^2/2$ und $v = ds/dt$ schreiben

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{AU + B} \quad (A, B \text{ Konstanten})$$

so dass man wegen $ds^2 = (1 + y'^2 + z'^2)\, dx^2$, für die Zeit t erhält

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{AU + B}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z',)\, dx,$$

wo x_0 u. x_1 Anfangs-und Endabscisse des beweglichen Punktes sind. Damit die Zeit ein Minimum, also auch das Integral

$$(1) \quad J=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z; y', z',)\, dx,\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,\ z(z_0)=z_0,\ z(x_1)=z_1$$

ein Minimum erreicht, müssen die Funktionen y und z das System der Eulerschen Gleichungen

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\equiv-\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{2\sqrt{(U+K)^3}}\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{(U+K)\,(1+y'^2+z'^2)}}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\equiv-\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{2\sqrt{(U+K)^3}}\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{(U+K)\,(1+y'^2+z'^2)}}=0,$$

$(K=B/A)$ befriedigen. Wäre die Brachistochrone eine ebene Kurve, so könnte man den Integrand in (1) auf $f(x, y, y')$, und das System (2) auf nur eine Differentialgleichung reduzieren.

In dieser Arbeit beweise ich den

Satz. *Wenn die auf den beweglichen Punkt wirkende Konservative Kraft die Form*

$$(3) \quad \vec{F}=\lambda(x, y, z)\vec{r}$$

hat, so muss die entsprechende Brachistochrone eine ebene Kurve sein und das Brachistochronenproblem wird auf eine Quadratur zurückgeführt.

Beweis. Bezeichnen wir der Kürze wegen

$$(4) \quad \sqrt{1+y'^2+z'^2}=\Phi(x), \quad \sqrt{U(x, y, z)+K}=\Psi(x).$$

Dann bekommt das System der Eulerschen Gleichungen die Form

$$\frac{\Phi}{2\Psi^3}\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y'(\Phi\Psi)'-y''\Phi\Psi}{\Phi^2\Psi^2}$$

$$\frac{\Phi}{2\Psi^3}\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{z'(\Phi\Psi)'-z''\Phi\Psi}{\Phi^2\Psi^2}.$$

Wegen

$$\Phi'=\frac{y'y''+z'z''}{\Phi}, \quad \Psi'=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}y'+\frac{\partial U}{\partial z}z'}{2\Psi}=\frac{U'}{2\Psi},$$

kann man das letzte System in der Form

$$\Phi^4\frac{\partial U}{\partial y}=y'\Phi^2U'+2\Psi^2y'\ (y'y''+z'z'')-2\Phi^2\Psi^2y''$$

$$\Phi^4\frac{\partial U}{\partial z}=z'\Phi^2U'+2\Psi^2z'\ (y'y''+z'z'')-2\Phi^2\Psi^2z''$$

schreiben. In den Ausdrücken für Φ, Ψ und U' kommen die Ableitungen y'' ... und z'' nicht vor. Deshalb kann man das letzte System als ein System von zwei linearen Gleichungen iz Bezug auf die erwähnten Ableitungen betrachten.

Löst man es nach diesen Ableitungen und beachtet die Werte von Φ und Ψ, so ergibt sich nach kürzerer Rechnung

$$y''=\frac{\Phi^2\left(y'\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{2\Psi^2},\quad z''=\frac{\Phi^2\left(z'\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{2\Psi^2},$$

woraus

$$\frac{y''}{\frac{\partial U}{\partial y}-y'\frac{\partial U}{\partial x}}=\frac{z''}{\frac{\partial U}{\partial z}-z'\frac{\partial U}{\partial x}} \tag{5}$$

folgt. Da $\vec{F}=\operatorname{grad} U$ ist, so erhält man auf Grund (3)

$$\operatorname{grad} U=\lambda(x,\ y,\ z)\,\vec{r},$$

und es ist

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lambda(x,\ y,\ z)\,x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\lambda(x,\ y,\ z)\,y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=\lambda(x,\ y,\ z)\,z, \tag{6}$$

so dass man zur Gleichung

$$\frac{y''}{(y-xy')\,\lambda(x,\ y,\ z)}=\frac{z''}{(z-xz')\,\lambda(x,\ y,\ z)}$$

gelangt. Nach Multiplikation mit $-x$ ergbit sich das erste Integral

$$y-xy'=c_1\,(z-xz')$$

d. h.

$$\frac{y'-c_1 z'}{y-c_1 z}=\frac{1}{x}.$$

Die abermalige Integration liefert die Gleichung

$$\alpha\,x+\beta\,y+z=0$$

einer Ebene.

Die Kräfte welche in der Form (3) erscheinen, wenn sie konservativ sind, können nur Zentralkräfte sein, die nur von Abstand abhängen. Wegen (6) nähmlich, wird der Ausdruck

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy+\frac{\partial U}{\partial z}\,dz\equiv\lambda\,(xdx+ydy+zdz)$$

nach Multiplikation mit $1/\lambda$ ein vollständiges Differential und dieses besitzt ein Integral

$$x^2+y^2+z^2=r^2=\text{const.}$$

Auf Grund dessen ist — ausser $U=\text{const.}$ — die Lösung der Gleichung (6) — wie bekannt — [2]

$$U=\varphi\,(r),$$

wo φ eine willkürliche Funktion ist, so dass auch $\vec{F}$ die Form $\varphi\,(r)\,\vec{r}$ hat.

Das Integral (1) erhält nach entsprechender Transformation die Gestalt

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{U(x,\ y)+\mathrm{K}}}\,dx. \tag{7}$$

Dabei hat auch die Kraftfunktion die Form $U(r)$.

Es ist bekannt dass die Eulersche Gleichung — als notwendige Beding-ging des Extrems — invariant ist [3]. Ob also eine Kurve zur Extremale wird oder nicht, hängt nicht von der Wahl des Koordinatesystems ab. Deshalb kann man schon in Grundintegral (7) eine Koordinatentransformation durchführen, nähmlich rechtwinklige — mit Polarkoordinaten zu ersetzen. Setzt man $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, so wird

$$J=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\frac{r^2+r'^2}{U(r)+\mathrm{K}}}\,d\theta,\quad r(\theta_0)=r_0,\quad r(\theta_1)=r_1,$$

wo $r'=dr/d\theta$. Hier erscheint θ nicht explizit und man kann sogleich das erste Integral der Eulerschen Gleichung [3]

$$\sqrt{\frac{r^2+r'^2}{U(r)+\mathrm{K}}}-r'\,\frac{r'}{\sqrt{[U(r)+\mathrm{K}]\,(r^2+r'^2)}}=c_1$$

d. h.

$$\frac{r^2}{\sqrt{[U(r)+\mathrm{K}]\,(r^2+r'^2)}}=c_1$$

schreiben. Dabei ist

$$c_1\,r'=r\sqrt{\frac{r^2-c_1^2\,[U(r)+\mathrm{K}]}{U(r)+\mathrm{K}}},$$

womit das Problem auf eine Quadratur

$$\theta+c=c_1\int\sqrt{\frac{U(r)+\mathrm{K}}{r^2-c_1^2\,[U(r)+\mathrm{K}]}}\,\frac{dr}{r}$$

zurückgeführt wird.

Damit ist der Satz bewiesen..

Im Spezialfalle $\vec{F}=\vec{F}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ gelangt man zur Gleichung

$$\frac{y''}{c_2-c_1\,y'}=\frac{z''}{c_3-c_1\,z'}$$

und erhält als Ergebniss wieder die Gleichung einer Ebene. Wählt man noch das ebene Koordinatensystem so, dass in (7) die Grösse x nicht erscheint, so gelangt man zum klassischen Problem der Variationsrechnung, dessen Lösung durch eine gewöhnliche Zykloide repräsentiert ist.

LITERATUR

[1] L. Koschmieder, *Variationsrechnung*, Berlin 1962.

[2] N. Saltikov, *Metode integraljenja parcijalnih jednačina prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom*, Beograd 1947.

[3] I. M. Gelfand i S. V. Fomin, *Variacionnoe isčislenie*, Moskva 1961.