PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966., p. 23–24

L'ÉLÉMENT MAXIMAL D'UNE MATRICE

Bogoljub Stanković

(Communiqué le 16 Mai 1965)

On note par $\hat{R}$ l'ensemble des nombres réels auxquels on ajoute zéro et un élément qu'on note par $-\infty$. L'opération d'addition on définit pour tous éléments de $\hat{R}$ de manière que pour tout $r \in \hat{R}$ on a: $r+(-\infty)=(-\infty)+ +r=-\infty$. Avec la relation d'ordre l'ensemble $\hat{R}$ est totalement ordonnéi; $-\infty$ est par définition le plus petit élément.

Soit $\hat{R}$ muni encore d'une autre opération interne notée par $\circ$: $r_1 \circ r_2 = =\text{Max}\ (r_1, r_2)$.

Tous les deux opérations sont commutatives et associatives. En outre, la première opération est distributive par rapport à la deuxième:

$$r_3+(r_2 \circ r_1)=r_3+\text{Max}\,(r_2, r_1)=\text{Max}\,(r_3+r_2, r_3+r_1)=(r_3+r_2)\circ(r_3+r_1).$$

Nous allons maintenant définir une opération avec les matrices carrées sur $\hat{R}$. Soient $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ deux matrices sur $\hat{R}$ du type (n, n), alors $(a_{i,j}) \oplus (b_{i,j})=(c_{i,j})$, où $c_{i,j}=(a_{i,1}+b_{1,j}) \circ (a_{i,2}+b_{2i}) \circ \ldots \circ (a_{i,n}+b_{n,j})$. Cette opération est associative. Dans la suite on note par $k\,(r_{i,j}) \equiv (r_{i,j}) \oplus (r_{i,j}) \oplus \ldots \oplus (r_{i,j})$, la matrice $(r_{i,j})$ composée k fois.

D é f i n i t i o n . *Un élément r_{i_o, j_o} est dit l'élément maximal de la matrice $(r_{i,j})$ si on a $r_{i,j} \leqslant r_{io, jo}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On le note par* Max *e* $(r_{i,j})$.

Les matrices sur $\hat{R}$ apparaissent avec le problème de la solution des systèmes d'équations différentielles linéaires dans le corps des opérateurs de J. Mikusiński.

Le problème qui se pose ici est de trouver une relation entre l'élément maximal de la matrice $k\,(r_{i,j})$ et le facteur k. Si on ne peut donner une relation explicite, alors trouver une majoration ou le comportement assymptotique de l'élément maximal quand $k \to \infty$.

Nous avons donné seulement quelques résultats en laissant le problème encore ouvert.

Les difficultés sont certainement cachées sous le fait suivant. Si on définit la relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées du type (n, n):

$$(a_{i,j})<(b_{i,j}) \Leftrightarrow \text{Max}\ e\,(a_{i,j}) \leqslant \text{Max}\ e\,(b_{i,j})$$

elle n'est pas compatible avec l'opération définie pour les matrices.

P r o p o s i t i o n 1. *Soit* $r=\text{Max}\ e\,(r_{i,j})$ *et qu'il soit atteinte pour* $i=j$, *alors* Max *e* $k\,(r_{i,j})=kr$.

Démonstration. — L'élément général de la composition $(r_{i,j}) \oplus (r_{i,j})$ est $A_{i,j} = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{i,k} + r_{k,j})$. D'après la supposition on a Max $e\ (A_{i,j}) = 2r$ et il est atteint pour $i = j$. Par induction on a la proposition 1.

Cette proposition peut être généralisée:

Proposition 1'. *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *les matrices sur* $\hat{R}$ *et* $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *leurs éléments maximaux respectifs, tous situés sur la diagonale, alors*:

$$\mathrm{Max}\ e\ (A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k) = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$$

Proposition 2. *Soit*:

$$p = \underset{1 \leqslant i, k_1, \ldots k_{q-1}, j \leqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{i,k_1} + r_{k_1, k_2} + \ldots + r_{q-1,j})$$

et qu'il soit atteint pour $i = j$, *alors* Max $e\ kq\ (r_{i,j}) = kp$.

Démonstration. — L'élément général de la matrice $q(r_{i,j})$ est $B_{i,j} =$

$$= \underset{1 \leqslant k_1, k_2, \ldots, k_{q-1} \leqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{i,k_1} + r_{k_1,k_2} + \ldots + r_{k_{q-1},j}).$$

D'après la supposition, Max $e\,(B_{i,j}) = p$ et il est atteint pour $i = j$. On peut maintenant utiliser la proposition précédente.

Les matrices du type:

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & \ldots & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & \ldots & -\infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \ldots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

sont d'un intérêt spécial.

Conséquence de la proposition 1. *Soit* $a_n \geqslant a_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, *alors* Max $e\ kA = ka_n$.

Proposition 3. *Soit* $a_n \leqslant 0$ *et* $a_{n-1} = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} (a_i)$, alors Max $e\ 2kA = ka_{n-1}$.

Démonstration. — Pour la matrice $2A = (A_{i,j})$, $A_{i,j} = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{i,k} + r_{k,j}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Car pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $r_{i,k} \neq -\infty$ seulement pour $i = k-1$ *et* $\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{i\,k} + r_{k,j}) = (r_{i,i+1} + r_{i+1,i+2}) = 0$.

En cas $i = n - l$ on a:

$$A_{n-l,j} = \underset{1 \geqslant k \geqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{n-l,k} + r_{k,l}) = r_{n-l,n} + r_{n,j} = a_j.$$

Enfin pour $i = n$:

$$A_{n,j} = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} (r_{nk} + r_{k,j}) \leqslant a_{n-1}.$$

On voit que Max $e\ (A_{i,j}) = a_{n-1}$ et qu'il est atteint avec $A_{n-1,n-1}$. On peut maintenant utiliser la proposition 1.

Ces propositions peuvent être prises aussi pour la majoration de l'élément maximal de la matrice $k(r_{i,j})$ en tenant compte que la relation $a_{i,j} \leqslant \leqslant b_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ entraîne Max $e\ (a_{i,j}) \leqslant$ Max $e\ (b_{i,j})$.