PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966. p. 9—16

РИМАНОВЫ РАСШИРЕНИЯ КАК ОБОБЩЕННЫЕ БИПЛАНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Милева Прванович

(Саопштено 5. марта 1965)

Обобщенным бипланарным пространством мы назовем такое пространство симметрической аффиной связности A_{2n} что

каждое локальное псевдовекторное пространство такого A_{2n} бипланарное; и

абсолютные плоскости этих бипланарных пространств образуют параллельное поле площадок.

Если абсолютные плоскости действительны, мнимо — сопряженны или сливаются, то имеем соответственно обобщенное пространство гиперболического, эллиптического или параболического типа.

В исследованиях обобщенных бипланарных пространств до сих пор предпологалось что аффинор, определяющий бипланарную геометрию локального псевдовекторного пространства ковариантно постоянен. В настоющей работе установится:

1) что упомянутый аффинор, в случае обобщенного бипланарного пространства параболического типа, является рекуррентным;

2) что риманово расширение пространства Римана, [1], [2] является обобщенным бипланарным пространством параболического типа;

3) что обобщенное пространство параболического типа при наличии дополнительных условий является римановым расширением n-мерного пространства аффиной связности.

1. Бипланарное пространство. — Пусть P_{2n-1} проективное пространства числа измерений $2n-1$. Образами точек этого пространства являются псевдовекторы x^i $(i=1,2,\ldots,2^n)$ $2n$-мерного векторного пространства E_{2n}. Аффинор удовлетворяющий условию:

$$\gamma^i_k\,\gamma^k_j=\omega\,\delta^i_j,\quad \omega=-1,+1 \text{ или } 0 \tag{1.1}$$

определяет в P_{2n-1} соответственно бипланарную геометрию эллиптического, гиперболического или параболического типа, если существует каноническая система координат в которой

$$\gamma^i_\alpha=\delta^i_{\alpha'},\quad \gamma^i_{\alpha'}=\omega\,\delta^i_\alpha \tag{1.2}$$
$$\alpha=1,2,\ldots,n;\quad \alpha'=n+\alpha$$

Легко установить что каждая из точек

$$\delta^i_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\alpha'}, \qquad \omega = \pm 1 \tag{1.3}$$

$$\delta^i_\alpha - \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\alpha'}, \qquad \omega = \pm 1 \tag{1.4}$$

(α зафиксированный индекс) под воздействием преобразования γ^i_j является инвариантной, а в параболическом случае каждая точка

$$\delta^i_{\alpha'} \tag{1.5}$$

(α зафиксированно) переходит в нуль. В пространстве E_{2n} величины (1. 3), при зафиксированном α являются компонентами вектора который, под воздействием преобразования γ^i_j переходит в коллинеарный вектор. При $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ величины (1. 3) являются компонентами n линейно независимых векторов определяющих в E_{2n} n-мерную плоскость. Эта плоскость, значит, при преобразовании γ^i_j переходит в себя. При этом преобразовании переходит в себя также и n-мерная плоскость определенна n линейно независимым векторам (1.4), пока плоскость определенна n линейно независимым векторам (1. 5) в параболическом бипланарном пространстве переходит в нуль.

2. Самосопряженны образы бипланарного пространства. — Пусть g_{ij} самосопряженный тензор преобразования γ^i_j т. е.

$$g_{ij} = \gamma^p_i \gamma^q_j g_{pq}.$$

Тензор

$$b_{ij} = \gamma^q_j g_{iq}$$

называется присоединенным к g_{ij}. Рассмотрим следующие случаи:

I Каждый из тензоров g_{ij}, b_{ij} симметричный. Тогда в канонической системе координат (1.2) матрицы тензоров g_{ij} и b_{ij} принимают соответственно вид [3], [4], [5]

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & \omega a \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} c & \omega a \\ \omega a & \omega c \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

где a и c симметрические матрицы. Поэтому в этой системе координат удовлетворяется уравнение

$$g_{ij}\, l^i m^j = 0 \tag{2.2}$$

где введены обозначения:

$$l^i = \lambda^\alpha (\delta^i_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^i_\alpha), \qquad m^i = \mu^\alpha (\delta^i_\alpha - \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\alpha'}), \quad \omega = \pm 1. \tag{2.3}$$

Но уравнение (2.2) — тензорное, а это значит что оно удовлетворяется и в каждой другой системе координат. Оно указывает на то что точки (2.3) сопряженны относительно поверхности второго порядка

$$g_{ij}\, x^i x^j = 0. \tag{2.4}$$

Если g_{ij} рассматривать как фундаментальный тензор пространства E_{2n} то (2.2) указывает что в этой метрике векторы (2. 3) являются ортогональным. Но первый из них произвольный вектор n-мерной инвариатной плоскости

(1.3), а другой произвольный вектор n-мерной инвариантной плоскости (1.4). Эти две плоскости, значит, взямно ортогональны по отношению к метрике определенной тензором g_{ij}.

В параболическом случае, матрица (2.1) принимает вид

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a & c \\ c & o \end{pmatrix}$$

Тогда

$$g_{ij}\, n^i\, n^j = o \tag{2.5}$$

если

$$n^i = \nu^\alpha\, \delta^i_{\alpha'}. \tag{2.6}$$

Так как (2.5) является тензорским уравнением, оно удовлетворенно в каждой системе координат и указывает на то что каждая точка (2.6) самосопряженна по отношению к поверхности (2.4). В пространстве E_{2n} величины (2.6) являются компонентами произвольного вектора n-мерной плоскости (1.5) котороя под воздействием преобразования γ^i_j переходит в нуль. Уравнение (2.5) показывает что каждый такой вектор является ортогональным на самом себе а так же и на каждом ином вектору этой плоскости. Значит, эта плоскость является изотропной n-мерной плоскости по отношению к метрике определенной тензором g_{ij}.

Если в случае $\omega = \pm 1$ произвести преобразование координат

$$z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{\omega}\, x^{\alpha'}, \qquad \bar{z}^\alpha = x^\alpha - \sqrt{\omega}\, x^{\alpha'} \tag{2.7}$$

то в новой системе координат матрицы тензоров g_{ij} и γ^i_j будут соответственно иметь вид

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{\omega\sqrt{\omega}}{2}c & o \\ o & \frac{a}{2}-\frac{\omega\sqrt{\omega}}{2}c \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$(\gamma^i_j)=\frac{\sqrt{\omega}}{4}\begin{pmatrix} E(\omega+1) & E(-\omega+1) \\ E(\omega-1) & E(-\omega-1) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

II Тензор g_{ij} симметрический, тензор b_{ij} кососимметрический. Тогда в канонической системе координат (1.2) матрицы тензоров g_{ij} и b_{ij} принимают соответственно вид [3], [4], [5]

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a & c \\ -c & -\omega a \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij})=\begin{pmatrix} -c & -\omega a \\ \omega a & \omega c \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

где a симметрическая а c кососиметрическая матрица. Вследствие этого точки (2.3) удовлетворяют уравнениям

$$g_{ij}\, l^i\, l^j = o$$

$$g_{ij}\, m^i\, m^j = o$$

В параболическом случае, первая матрица (2.10) принимает вид

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a & c \\ -c & o \end{pmatrix}$$

(с кососимметрическая матрица) и поэтому, для каждой точки (2.6) имеем

$$g_{ij}\, n^i n^j = 0$$

Значит, если тензор g_{ij} симметрический а тензор b_{ij} кососимметрический каждая из точек l^i, m^i, n^i является самосопряженной по отношению к поверхност (2.4). Иначе говорить каждая из n-мерных плоскостей (1.3), (1.4) (1.5) является изотропной по отношению к метрике с фундаментальным тензором g_{ij}.

3. Обобщенное бипланарное пространство. — Рассмотрим $2n$-мерное пространство A_{2n} симметрической аффинной связности. В каждой точке этого пространства имеем $2n$ линейно независимых векторов определяющих в этой точке локальное псевдовекторное пространство E_{2n} или что то же, локальное проективное пространство P_{2n-1}. Если в каждом таком локальном P_{2n-1} аффинором γ^i_j заданна бипланарная геометрия, в каждой точке пространства A_{2n} определьены две инвариантные действительные или комплексно-сопряженные n-мерные плоскости без общих точек (случай $\omega = \pm 1$) или одна n-мерная плоскость (параболический случай $\omega = 0$). Таким образом в A_{2n} заданы или два поля n-мерних плоскостей или одно поле таких плоскостей. Предположым что в связности пространства A_{2n} плоскости каждого поля параллельны. Тогда в A_{2n} существует такая голономная система координат [6] что эти плоскости натянуты соот ветственно на векторы с координатами (1.3), (1.4), (1.5).

С другой стороны необходимым и достаточным условием параллельности поля n-мерных плоскостей является выполнимость равенств [7]

$$\lambda^i_{\alpha'|j} = A^\beta_{\alpha j}\lambda_{\beta|}{}^i.$$

Здесь $\lambda^i_{\alpha|}, \alpha = 1,2,\ldots,n$ линейно независимые векторы определяющие поле плоскостей, $A^\beta_{\alpha j}$ каки-то скалярные функции, а запетая обозначает ковариантное дифференцирование. Из-за того в упомянутой голономной системе координат имеем:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} (\delta^i_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\alpha'})_{,j} = A^\beta_{\alpha j}(\delta^i_\beta + \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\beta'}) \\ (\delta^i_\alpha - \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\alpha'})_{,j} = B^\beta_{\alpha j}(\delta^i_\beta - \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\beta'}) \end{cases} \qquad \omega = \pm 1$$

Поэтому

$$\gamma^i_j(\delta^j_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^j_{\alpha'})_{,k} = \gamma^i_{j,k}(\delta^j_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^j_{\alpha'}) + A^\beta_{\alpha k}\gamma^i_j(\delta^j_\beta + \sqrt{\omega}\,\delta^j_\beta) =$$
$$= (\gamma^i_{j,k}\delta^\alpha_\beta + A^\beta_{\alpha k}\gamma^i_j)(\delta^j_\beta + \sqrt{\omega}{}^j_\beta)$$

Так как, с другой стороны,

$$\gamma^i_j(\delta^j_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^j_{\alpha'}) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}(\delta^i_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\alpha'}),$$

то получаем

$$[\gamma^i_j(\delta^j_\alpha + \sqrt{\omega}\,\delta^j_{\alpha'})]_{,k} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} A^\beta_{\alpha k}(\delta^i_\beta + \sqrt{\omega}\,\delta^i_{\beta'}) = A^\beta_{\alpha k}\gamma^i_j(\delta^j_\beta + \sqrt{\omega}\,\delta^j_{\beta'})$$

Из этих формул следует

$$(\gamma^i_{j,k}\delta^\alpha_\beta + A^\beta_{\alpha k}\gamma^i_j)(\delta^j_\beta + \sqrt{\omega}\,\delta^j_\beta) = A^\beta_{\alpha k}\gamma^i_j(\delta^j_\beta + \sqrt{\omega}\,\delta^j_{\beta'})$$

или окончательно:

$$\gamma^i_{j,k} = 0. \tag{3.2}$$

Начиная с второго условия (3. 1), приходим к том же уравнению (3. 2). Обратно если условие (3. 2) удовлетворенно, удовлетворены и оба условия (3.1).

В параболическом случае имеем, с одной стороны

$$\gamma^i_j \delta^j_{\alpha'} = 0, \tag{3.3}$$

а с другой стороны

$$\delta^i_{\alpha',k} = A^{\beta'}_{\alpha' k} \delta^i_{\beta'},$$

и поэтому

$$0 = (\gamma^i_j \delta^j_{\alpha'})_{,k} = \gamma^i_{j,k} \delta^j_{\alpha} + \gamma^i_j \delta^j_{\beta'} A^{\beta'}_{\alpha' k} = \gamma^i_{j,k} \delta^j_{\alpha'}$$

т. е.

$$\gamma^i_{j,k} \delta^i_{\alpha'} = 0$$

Сравнивая это уравнение и уравнение (3. 3) получаем что

$$\gamma^i_{j,k} = \varkappa_k \gamma^i_j \tag{3.4}$$

где $\varkappa_k$ компоненты кокого-то вектора.

Условыя (3.2) и (3.4) получены в специальной системе координат. Но так как каждое из них является тензорным уравнением, они удовлетворены и в каждой иной системе координат.

Пространство симметрической аффиной связности A_{2n} будем називать обобщенное бипланарное пространство если:

1) каждое локальное псевдовекторное пространство такого A_{2n} бипланарное; и

2) абсолютные плоскости этих бипланарных пространств образуют параллельное поле плоскостей.

Итак, из всего сказанного следует:

Обобщенное бипланарное пространство гиперболического или еллиптического типа характерно наличием ковариантно постояного аффинора γ^i_j; обобщенное бипланарное пространство параболического типа характерно наличием ковариантно рекуррентного аффинора γ^i_j.

4. Риманово обобщенное бипланарное пространство (случай $\omega = \pm 1$). — В §. 2 уже было упомянуто что в каждом локальном P_{2n-1} можно рассматривать самосопряженный тензор g_{ij} и к ему присоединненый тензор b_{ij}. Поставим вопрось: при каких условиях симметрический тензор g_{ij} ковариантно постоянен в связности пространства A_{2n}. Ибо тогда тензор g_{ij} можно брать в качестве фундаментального тензора и пространство A_{2n} будет пространством Римана.

Этот вопрось, в случае пространств гиперболического и эллиптического типа, изучен [3], [8]. В этом § — е мы изложым соответственные результаты.

В случае $\omega = \pm 1$, аффинор γ^i_j удовлетворяет условию (3, 2), т. е. условию:

$$\frac{\partial \gamma_j^i}{\partial x^k}+\Gamma_{ks}^i \gamma_j^s-\Gamma_{kj}^s \gamma_s^i=0.$$

Отсюда следует что для компонент связности в канонической системе координат, имеем

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}=\Gamma_{\gamma\alpha'}^{\beta'}=\omega\,\Gamma_{\gamma'\alpha'}^{\beta},\qquad \Gamma_{\gamma'\alpha}^{\beta}=\Gamma_{\gamma'\alpha'}^{\beta'}=\omega\,\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta'}.$$

Если тензор g_{ij} ковариантно постоянен, его компоненты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma_{ki}^s g_{sj}-\Gamma_{kj}^s g_{is}=0 \tag{4.2}$$

Если, кроме того, присоединенный тензор b_{ij} симметрический в рассматриваемой системе координат матрица (g_{ij}) принимает вид (2.1). Потому, из условий (4,2), учитывая (4.1), получаем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}=\omega\,\frac{\partial g_{\alpha\beta'}}{\partial x^{\delta'}},\qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta'}}=\frac{\partial g_{\alpha\beta'}}{\partial x^{\delta}}.$$

Преобразуем теперь координаты по формулам (2. 3). Тогда в случае $\omega=1$ среди компонент связности различны от нуля могут быть лишь $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ и $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}$ а компоненты ковариантно постояного тензора g_{ij} выполняют условия

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma'}}=0,\qquad \frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial x^{\gamma}}=0.$$

Итак,

Если у обобщенноїо бипланарного пространства A_{2n} тензор g_{ij} ковариантно постоянен а присоединенный тензор b_{ij} симметрический, то

в случае $\omega=1$ пространство A_{2n} является произведением два n-мерних пространства Римана;

в случае $\omega=-1$ компоненты фундаментального тензора в специальной системе координат удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}=-\frac{\partial g_{\alpha\beta'}}{\partial x^{\delta'}},\qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta'}}=\frac{\partial g_{\alpha\beta'}}{\partial x^{\delta}}.$$

Аналогично имеем:

Если у обобщенного бипланарного пространства A_{2n} тензор g_{ij} ковариантно постоянен а присоединенный тензор b_{ij} кососимметрический, то

в случае $\omega=1$ компоненты тензора g_{ij} в специальной системе координат удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma'}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial g_{\alpha\gamma'}}{\partial x^{\beta}};\qquad \frac{\partial g_{\beta\gamma'}}{\partial x^{\alpha'}}=\frac{\partial g_{\beta\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}. \tag{4.3}$$

Эти условия указываюут на факт существования такой функции $U(x^{\alpha}, x^{\alpha'})$, заданной с точностью до преобразования

$$U(x^{\alpha}, x^{\alpha'})\to U(x^{\alpha}, x^{\alpha'})+V(x^{\alpha})+W(x^{\alpha'})$$

что

$$g_{\alpha\beta'} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^{\beta'}}. \tag{4.4}$$

т. е. A_{2n} *является расслоенным пространством П. К. Рашевского;*

в случае $\omega = -1$, *компоненты тензора* g_{ij} *в специальной системе координат снова удовлетворяют условиям вида* (4.3) *и* (4.4) *и* A_{2n} *является* A*-пространством П. А. Широкова* (*или, что то же пространством Кэлера*).

5. Риманово обобщенное бипланарное пространство: Случай $\omega = 0$. В этом случае, как было указано в § 3, тензор γ^i_j является рекуррентным, т. е.

$$\gamma^i_{j,k} = \varkappa_k \gamma^i_j.$$

Но у нас теперь предположение что самосопряженный тензор

$$g_{ij} = \gamma^p_i \gamma^q_j g_{pq}$$

ковариантно постоянен. Оттуда следует что $\varkappa_k = 0$, т. е. в римановом обобщенном бипланарном пространстве параболического типа, тензор γ^i_j является ковариантно постояным. Тогда и присоединенный тензор

$$b_{ij} = \gamma^q_j g_{iq}$$

тоже будет ковариантно постояным, т. е.

$$b_{ij,k} = 0$$

или, что то же самое

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ki} b_{sj} - \Gamma^s_{kj} b_{is} = 0. \tag{5.1}$$

В канонической системе координат матрицы (g_{ij}) и (b_{ij}) принимают вид (2.1), т. е. вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & o \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} c & o \\ o & o \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

если тензор b_{ij} симметрический и вид (2.10), т. е. вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & o \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -c & o \\ o & o \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

если тензор b_{ij} кососимметрический. В том и другом случае a симметрическая матрица n-ого порядка. Что касается матрицы c она в первом случае симметрическая а в другом — кососимметрическая.

В этой системе координат, условие (5.1), при $i = \alpha'$, $j = \beta$ приводит к

$$\Gamma^s_{k\alpha'} b_{s\beta} = 0$$

откуда

$$\Gamma^\beta_{k\alpha'} = 0. \tag{5.4}$$

При $i = \alpha$, $j = \beta$, $k = \gamma'$ условие (5.1), учитывая (5.4), выражается в виде

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma'}} = 0.$$

Это значит что матрица c в соотношениях (5.2) и (5.3) не зависит от координат $x^{\alpha'}$. Если при этих условиях перейти к новым координатам с помощью преобразования

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^{1'} \\ \vdots \\ \bar{x}^{n'} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha},$$

и ограничится случаем симметрического тензора b_{ij}, то матрица (b_{ij}) в (5.2) не изменит своего вида, а в матрице (g_{ij}) на месте матрицы c появится единичная матрица E. Итак

Если у обобщенного бипланарного пространства параболического типа тензор g_{ij} ковариантно постоянен, то существует такая голономная система координат в которой матрица тензора g_{ij} принимает вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta}) & E \\ E & o \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

а матрица присоединенного тензора b_{ij} вид:

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} (b_{\alpha\beta}(x^{\delta})) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

где матрица $(b_{\alpha\beta})$ зависит лишь от координат x^{α}. В связности пространства A_{2n} тензор b_{ij} ковариантно постоянен.

E. M. Patterson и A. G. Walker указали [2] что пространство Римана допускающее такую систему координат что матрица основного тензора выражается в виде (5.5) и такой симметрический ковариантно постоянный тензор что его матрица, в той же системе координат, принимает вид (5. 6), является римановым расширением риманова пространства. Итак,

Если у обобщенного бипланарного пространства A_{2n} параболического типа, тензор g_{ij} ковариантно постоянен, а присоединенный тензор b_{ij} симметрический, A_{2n} является римановым расширением n мерного пространства римана с фундаментальным тензором $b_{\alpha\beta}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Patterson E. M. and Walker A. G., *Riemann extesions*, Quart. J. Math. Oxford, ser. 2, 3, (1952), 19-28

[2] Walker A. G., *Riemann extensions of non-Riemannian spaces*, Convegno di Geometria Differenziale, 1935, Roma, 64-70

[3] А. П. Широков, *Геометрия обобщенных биаксиальных пространств*, Уч. зап. КГУ, т. 114, кн. 2, 1954

[4] А. П. Норден, *Об одном классе четырехмерных А-пространств*, Изв. Вузов, Математика, №4 (117), 1960, стр. 145-157

[5] Н. В. Талантова, *О нульсопряженных образах биаксиального пространства параболического типа*, Уч. Зап. КГУ, том 123, кн. 1 (1963)

[6] J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924*

[7] Wong J. G., *Fields of parallel planes in affinely connected spaces*, Quart. J. Math. Oxfort. ser. 2, 4 (1954), 241-253

[8] А. П. Широков, *К вопросу об А-пространствах, статя в книге:* Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского, Москва-Ленинград, 1952