PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966., p 107–114

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES QUI GÉNÉRALISÉ UNE ÉQUATION DE P. M. VASIĆ

Radovan R. Janić

(Présenté le 19 Novembre 1965)

Dans l'article [1] P. M. Vasić a démontré que l'équation fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
&+ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
&+ \ldots \\
&+ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n),
\end{aligned}
$$

a pour solution générale la fonction suivante

$$
(2)\qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta \{ H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n) \}
$$

$$
= \begin{vmatrix} H_1(u_1) & H_1(u_2) & \ldots & H_1(u_n) \\ H_2(u_1) & H_2(u_2) & & H_2(u_n) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ H_n(u_1) & H_n(u_2) & & H_n(u_n) \end{vmatrix}
$$

avec H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des fonctions quelconques de u.

Dans cet article nous allons étudier le système d'équations fonctionnelles que voici:

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
& - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
& - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
& - \ldots \\
& - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n) \\
& + \operatorname{sgn} \alpha \, \{ g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \, g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
& - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) \, g(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})
\end{aligned}
$$

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, g(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})$$
$$-\ldots$$
$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n)\} = 0$$

(3)

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\\
&-f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\, g(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&-f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, g(x_{n+1}, x_n, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\\
&-\ldots\\
&-f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n)\\
&+g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\\
&-g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&-g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&-\ldots\\
&-g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n) = 0.
\end{aligned}$$

où α désigne une constante réelle; $x_i \in S$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$; $f, g\colon S^n \to C$ les fonctions inconnues; S un ensemble non vide arbitraire, C corps des nombres complexes.

Il faut distinguer les trois cas suivants:

$$1)\ \alpha < 0; \qquad 2)\ \alpha > 0; \qquad 3)\ \alpha = 0.$$

Premier cas: $\alpha < 0$. Si on introduit les nouvelles fonctions M et N par

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} M(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n) + ig(u_1, u_2, \ldots, u_n)\\ N(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n) - ig(u_1, u_2, \ldots, u_n)\end{aligned} \qquad (i^2 = -1),$$

le système (3) devient

$$\begin{aligned}
&M(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, M(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\\
&\quad = M(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\, M(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&\quad + M(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, M(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&\quad + \ldots\\
&\quad + M(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, M(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
&N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, N(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\\
&\quad = N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\, N(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&\quad + N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, N(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&\quad + \ldots\\
&\quad + N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, N(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

D'après (5) et (4), (*voir*: [1]), on trouve

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} + \Delta\{K_1(u_1), K_2(u_2), \ldots, K_n(u_n)\}, \tag{6}$$

$$g(u_1,, u_2, \ldots, u_n) = i(\Delta\{K_1(u_1), K_2(u_2), \ldots, K_n(u_n)\} - \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\}). \tag{7}$$

où H_i, K_j: $S \to C$ sont des fonctions arbitraires.

Deuxième cas: $\alpha > 0$. Si on introduit les fonctions M et N par

$$\begin{aligned} M(u_1, u_2 \ldots, u_n) &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n) + g(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ N(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n) - g(u_1, u_2, \ldots, u_n), \end{aligned} \tag{8}$$

le système (3) se réduit à (5). Donc, d'après (5) et (8) on obtient

$$f(u_1, u_2 \ldots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} + \Delta\{K_1(u_1), K_2(u_2), \ldots, K_n(u_n)\}, \tag{9}$$

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} - \Delta\{K_1(u_1), K_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\}. \tag{10}$$

Troisième cas: $\alpha = 0$. Dans ce cas, la première équation du système (3) se réduit à (1) dont la solution générale est donnée par (2).

Nous avons utilisé le lemme suivant:

L e m m e. — *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ *tels que*

$$f(a_2, a_2, \ldots, a_n) \neq 0,$$

on a

$$g(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) = 0. \tag{11}$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme donné dans l'article [1].

Nous allons démontrer, par induction, que

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = {} & \Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} \\ & + \Delta\{H_1(u_1), K_2(u_2), H_3(u_3), \ldots, H_n(u_n)\} \\ & + \cdots \\ & + \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1}), K_n(u_n)\}. \end{aligned}$$

Pour $n = 2$ on a

$$f(u_1, u_2) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_1)\}, \quad \text{avec } H_1(u_1) = \frac{f(a, u_1)}{f(a, b)}, \quad H_2(u_2) = f(b, u_2), \tag{12}$$

et

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) - f(x_1, x_3)\, g(x_2, x_4) - f(x_1, x_4)\, g(x_3, x_2) \\ & + g(x_1, x_2) f(x_3, x_4) - g(x_1, x_3) f(x_2, x_4) - g(x_1, x_4) f(x_3, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Pour toute solution non triviale de l'équation (13) il existe au moins un couple (a, b), $a, b \in S$, tels que $f(a, b) \neq 0$.

Si on pose $x_1 = a,\ x_3 = b,\ x_2 = u_1,\ x_4 = u_2$, l'équation (13) prend la forme suivante

$$(14)\qquad g(u_1, u_2) = \frac{f(a, u_1)}{f(a, b)}\, g(b, u_2) - \frac{f(a, u_2)}{f(a, b)}\, g(b, u_1)$$

$$+ \frac{g(a, u_1)}{f(a, b)}\, f(b, u_2) - \frac{g(a, u_2)}{f(a, b)}\, f(b, u_1) - \frac{g(a, b)}{f(a, b)}\, f(u_1, u_2).$$

En utilisant les notations

$$\frac{g(a, u_1)}{f(a, b)} = K_1(u_1), \qquad g(b, u_1) = K_2'(u_1), \qquad \frac{g(a, b)}{f(a, b)} = -k,$$

à partir de (14) et (12) on trouve

$$g(u_1, u_2) = \Delta\{H_1(u_1), K_2'(u_2)\} + \Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2)\} + k\,\Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2)\},$$

ou bien

$$g(u_1, u_2) = \Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2)\} + \Delta\{H_1(u_1), K_2(u_2)\},$$

avec

$$K_2(u) = K_2'(u) + k\, H_2(u).$$

Supposons que le théorème soit vrai pour $n-1$, c'est-à-dire que la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$(15)\qquad \begin{aligned}
&f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})\, g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-2})\\
&-f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n)\, g(x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-2})\\
&-f(x_1, \ldots, x_{n-2}\ x_{n+1})\, g(x_n, x_{n-1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-2})\\
&-\ldots\\
&-f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{2n-2})\, g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-3}, x_{n-1})\\
&+g(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})\, f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-2})\\
&-g(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n)\, f(x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-2})\\
&-g(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n+1})\, f(x_n, x_{n-1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-2})\\
&-\ldots\\
&-g(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{2n-2})\, f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-3}, x_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

soit donnée par

$$(16)\qquad \begin{aligned}
g(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = {}&\Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1})\}\\
&+\Delta\{H_1(u_1), K_2(u_2), H_3(u_3), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1})\}\\
&+\ldots\\
&+\Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_{n-2}(u_{n-2}), K_{n-1}(u_{n-1})\}.
\end{aligned}$$

Soit $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. Si on pose $x_1 = a_n,\quad x_{n+1} = a_n$;

$f(a_n, u_2, u_3, \ldots, u_n) = F(u_2, u_3, \ldots, u_n), \quad g(a_n, u_2, u_3, \ldots, u_n) = G(u_2, u_3, \ldots, u_n)$, la deuxième équation du système (3), d'après le lemme, devient

$$
\begin{aligned}
&F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)\, G(x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n})\\
&-F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+2})\, G(x_n, x_{n+3}, \dots, x_{2n})\\
&-F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+3})\, G(x_{n+2}, x_n, x_{n+4}, \dots, x_{2n})\\
&-\dots\\
&-F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{2n})\, G(x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}, x_n)\\
&+G(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)\, F(x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n})\\
&-G(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+2})\, F(x_n, x_{n+3}, \dots, x_{2n})\\
&-G(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+3})\, F(x_{n+2}, x_n, x_{n+4}, \dots, x_{2n})\\
&-\dots\\
&-G(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{2n})\, F(x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}, x_n) = 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Selon (15) et (16), on trouve que la solution générale de l'équation (17) est

$$
\begin{aligned}
G(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = g(a_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})
&= \Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2), \dots, H_{n-1}(u_{n-1})\}\\
&+ \Delta\{H_1(u_1), K_2(u_2), H_3(u_3), \dots, H_{n-1}(u_{n-1})\}\\
&+ \dots\\
&+ \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \dots, H_{n-2}(u_{n-2}), K_{n-1}(u_{n-1})\},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

où $H_i(u)$, $K_j(u)$ $(i,j = 1, 2, \dots, n-1)$ sont des fonctions quelconques telles que $S \to C$.

En posant dans la deuxième équation du système (3)

$$x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$x_n = u_1, \quad x_{n+1} = a_n, \quad x_{n+k} = u_k \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, \dots, a_n)\, g(u_1, u_2, \dots, u_n)\\
&= f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_1)\, g(a_n, u_2, \dots, u_n)\\
&- f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_2)\, g(a_n, u_1, u_3, \dots, u_n)\\
&- \dots\\
&- f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_n)\, g(a_n, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1)\\
&+ g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, u_2, \dots, u_n)\\
&- g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, u_3, \dots, u_n)\\
&- \dots\\
&- g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_n)\, f(a_n, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1)\\
&- g(a_1, a_2, \dots, a_n)\, f(u_1, u_2, \dots, u_n).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Les propriétés (2) et (18) conduisent à

$$(20)\qquad \begin{aligned} &f(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}) \\ &\quad = -f(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}) \\ &g(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j+1}, u_j, u_{j-1}, \ldots, u_{n-1}) \\ &\quad = -g(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}) \\ &\qquad\qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n-1). \end{aligned}$$

En utilisant les notations

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u)}{f(a_1, \ldots, a_n)} = H_1(u), \quad \frac{g(a_1, \ldots, a_{n-1}, u)}{f(a_1, \ldots, a_n)} = K_1(u), \quad \frac{g(a_1, \ldots, a_n)}{f(a_1, \ldots, a_n)} = -k,$$

à partir de (20), (19), (18) et (2) on trouve

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = {} & \Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} \\ & + \Delta\{H_1(u_1), K_2(u_2), H_3(u_3), \ldots, H_n(u_n)\} \\ & + \cdots \\ & + \Delta\{H_1(u_2), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1}), K_n(u_n)\} \\ & + k\,\Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\}, \end{aligned}$$

ou

$$(21)\qquad \begin{aligned} g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = {} & \Delta\{K_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} \\ & + \Delta\{H_1(u_1), K_2(u_2), H_3(u_3), \ldots, H_n(u_n)\} \\ & + \ldots \\ & + \Delta\{H_1(u_1), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1}), K_n(u_n)\}, \end{aligned}$$

où nous avons remplacé $K_n(u_n) + k\,H_n(u_n)$ par $K_n(u_n)$.

Nous allons prouver à présent que les fonctions (6) et (7), (9) et (10), (2) et (21) sont les solutions du système (3).

Introduisons la notation suivante

$$D(F_1, F_2, \ldots, F_n, G_1, G_2, \ldots, G_n) =$$

$$\begin{vmatrix} F_1(u_1) & F_2(u_1) & \ldots & F_n(u_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_1(u_2) & F_2(u_2) & & F_n(u_2) & 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ F_1(u_{n-1}) & F_2(u_{n-1}) & & F_n(u_{n-1}) & 0 & 0 & & 0 \\ F_1(u_n) & F_2(u_n) & & F_n(u_n) & G_1(u_n) & G_2(u_n) & & G_n(u_n) \\ F_1(u_{n+1}) & F_2(u_{n+1}) & & F_n(u_{n+1}) & G_1(u_{n+1}) & G_2(u_{n+1}) & & G_n(u_{n+1}) \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ F_1(u_{2n}) & F_2(u_{2n}) & & F_n(u_{2n}) & G_1(u_{2n}) & G_2(u_{2n}) & & G_n(u_{2n}) \end{vmatrix}$$

Étant donné que

$$D(H_1, H_2, \ldots, H_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} & D(H_1, H_2, \ldots, H_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) + D(H_1, H_2, \ldots, H_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) \\ & + D(K_1, K_2, \ldots, K_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) + D(K_1, K_2, \ldots, K_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) \\ & + D(H_1, H_2, \ldots, H_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) - D(H_1, H_2, \ldots, H_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) \\ & - D(K_1, K_2, \ldots, K_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) + D(K_1, K_2, \ldots, K_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D(H_1, H_2, \ldots, H_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) + D(K_1, K_2, \ldots, K_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) \\ & - D(H_1, H_2, \ldots, H_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) - D(K_1, K_2, \ldots, K_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) \\ & + D(H_1, H_2, \ldots, H_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) - D(K_1, K_2, \ldots, K_n, H_1, H_2, \ldots, H_n) \\ & + D(H_1, H_2, \ldots, H_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) - D(K_1, K_2, \ldots, K_n, K_1, K_2, \ldots, K_n) = 0. \end{aligned}$$

En développant, d'après la règle de Laplace, les déterminants qui figurent dans les identités précédentes, on obtient que les fonctions (9) et (10) dans le cas $\alpha > 0$ sont vraiment une solution du système (3).

Dans le cas $\alpha < 0$, par une voie analogue on peut démontrer que les fonctions (6) et (7) représentent une solution du système (3).

Enfin dans le cas $\alpha = 0$, nous allons démontrer que les fonctions (2) et (21) sont la solution du système (3).

La fonction (2) satisfait à la première équation du système (3) (*voir:* [1]).

Nous prouverons que les fonctions (2) et (21) satisfont à la deuxième équation du système (3).

Considérons, dans ce cas, l'idéntité suivante:

$$\begin{aligned} & D(H_1 + K_1, H_2, \ldots, H_n, H_1, + K_1, H_2, \ldots, H_n) \\ & + D(H_1, H_2 + K_2, H_3, \ldots, H_n, H_1, H_2 + K_2, H_3, \ldots, H_n) \\ & + \cdots \\ & + D(H_1, H_2, \ldots, H_n + K_n, H_1, H_2, \ldots, H_n + K_n) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

En développant les déterminants qui se trouvent dans les identités (22) on obtient que (2) et (21) satisfont à la deuxième équation du système (3).

Donc, les fonctions (2) et (21) représentent dans le cas $\alpha = 0$. Une solution du système (3).

D'après tout ce qui précède, on peut formuler le résultat suivant:

La solution générale du système (3), *est déterminée à l'aide des formules:*

(6), (7) *dans le cas où* $\alpha < 0$,

(9), (10) *dans le cas où* $\alpha > 0$,

(2), (21) *dans le cas où* $\alpha = 0$;

où $H_i, K_j, (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des fonctions quelconques, telles que* $S \to K$.

Remarque 1. — On obtient des résultats semblable si on suppose que l'ensemble des valeurs des fonctions inconnues C est un corps commutatif, avec la caractéristique quel n'est pas facteur n et dans lequel l'équation $x^2+1=0$ possède la solution.

Remarque 2. — S. Prešić a bien voulu lire cet article dans le manuscript et à cette occasion il m'a donné quelque suggestion utile.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. M. Vasić, *Équation fonctionnelle d'un type de déterminants,* Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, (N.S) t. **2** (16) (1962), p. 65—70.

Voir aussi: P. M. Vasić, *O nekim kvadratnim funkcionalnim jednačinama,* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № **131** (1964), 19—23.