PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966., p 95–97

SUR LES EQUATIONS BOOLEENNES DE S. ĆETKOVIĆ

Sergiu Rudeanu

(Présenté le 3. Novembre 1965)

Dans son travail [1], M. Simon Ćetković a étudié un système infini d'équations dans une algèbre d'ensembles. Bien que M. Ćetković utilise effectivement l'hypothèse que les inconnues soient des ensembles, les résultats de ladite Note sont valables dans une algèbre de Boole quelconque, en vertu du théorème de représentation de M.H. Stone [3], [4].

Dans ce qui suit, nous allons obtenir la solution générale du système de M. Ćetković sous une forme un peu plus simple et par une voie directe, c'est-à-dire en faisant les calculs dans une algèbre de Boole arbitraire. Notre démonstration sera donc indépendante de l'axiome du choix.

*
* *

Soit B une algèbre de Boole arbitraire. Le théorème démontré dans [1] peut être énoncé comme il suit: *le système d'équations*

$$x_i \bar{a}_{i+1} \cup \bar{x}_{i+1} a_i = a_i \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.i}$$

admet la solution générale

$$\begin{aligned} x_i = m_i (a_i \cup a_{i+1}) \bar{a}_{i-1} \cup n_i a_{i+1} a_{i-1} \bar{a}_i \bar{a}_{i-2} \cup \\ \cup n_{i+1} a_{i+2} a_i \bar{a}_{i+1} \bar{a}_{i-1} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned} \tag{2.i}$$

où m_i, n_i $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *sont des paramètres arbitraires.* Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour que les éléments $x_i \in B$ satisfassent aux équations (1), est qu'il existe des éléments $m_i, n_i \in B$, tels que les conditions (2) soient remplies.

Nous allons établir le résultat suivant:

Théorème. *Le système d'équations (1) admet la solution générale*

$$x_i = p_i (a_{i+1} \bar{a}_i \bar{a}_{i-2} \cup a_{i+1} \bar{a}_{i-1} \cup a_i \bar{a}_{i-1}) \cup p_{i+1} a_i \bar{a}_{i-1} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3.i}$$

où p_i *sont des paramètres arbitraires. Cette solution est reproductive au sens de L. Löwenheim* [2], c'est-à-dire que pour chaque solution particulière $\{x_i\}_{i=0, \pm 1, \pm}$

$\pm 2, \ldots$ bu système (1), les relations (3) sont satisfaites si l'on prend $p_i = x_i$ $(i = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$.

D é m o n s t r a t i o n. Les relations (3) entraînent

$$x_i \bar{a}_{i+1} U x_{i+1} \bar{a}_i = [p_i (a_{i+1} \bar{a}_i \bar{a}_{i-2} U a_{i+1} \bar{a}_{i-1} U a_i \bar{a}_{i-1}) U p_{i+1} a_i \bar{a}_{i-1}] \bar{a}_{i+1} U$$

$$U [\bar{p}_{i+1} U (\bar{a}_{i+2} U a_{i+1} U a_{i-1}) (\bar{a}_{i+2} U a_i) (\bar{a}_{i+1} U a_i)] (\bar{p}_{i+2} U \bar{a}_{i+1} U a_i) a_i =$$

$$= p_i a_i \bar{a}_{i-1} \bar{a}_{i+1} U p_{i+1} a_i \bar{a}_{i-1} \bar{a}_{i+1} U \bar{p}_{i+1} a_i U (\bar{a}_{i+2} U a_{i+1} U a_{i-1}) a_i =$$

$$= a_i (p_i \bar{a}_{i+1} \bar{a}_{i-1} U p_{i+1} \bar{a}_{i+1} \bar{a}_{i-1} U \bar{p}_{i+1} U \bar{a}_{i+2} U a_{i+1} U a_{i-1}) = a_i,$$

quelles que soient les valeurs de p_i.

Réciproquement, il faut prouver que toute solution $\{x_i\}_{i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ du système (1) satisfait les relations

(4. i) $$x_i = x_i (a_{i+1} \bar{a}_i \bar{a}_{i-2} U a_{i+1} \bar{a}_{i-1} U a_i \bar{a}_{i-1}) U x_{i+1} a_i \bar{a}_{i-1}$$
$(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

En effet, soit i un indice arbitraire. L'équation (1. i) peut être écrite sous la forme

$$(x_i \bar{a}_{i+1} U \bar{x}_{i+1} a_i) \bar{a}_i U (\bar{x}_i U a_{i+1}) (x_{i+1} U \bar{a}_i) a_i = 0,$$

ou bien

$$x_i \bar{a}_{i+1} \bar{a}_i U (\bar{x}_i U a_{i+1}) x_{i+1} a_i = 0;$$

par conséquent, la relation (1. i) est équivalente au système formé par les trois équations suivantes:

(5. i) $$x_i \bar{a}_{i+1} \bar{a}_i = 0,$$

(6. i) $$\bar{x}_i x_{i+1} a_i = 0,$$

(7. i) $$x_{i+1} a_{i+1} a_i = 0.$$

La relation (6. i) montre que

$$x_{i+1} a_i \bar{a}_{i-1} \leqslant x_{i+1} a_i \leqslant x_i,$$

donc

(8. i) $$x_i (a_{i+1} \bar{a}_i \bar{a}_{i-2} U a_{i+1} \bar{a}_{i-1} U a_i \bar{a}_{i-1}) U x_{i+1} a_i \bar{a}_{i-1} \leqslant x_i.$$

D'autre part, les relations (5. i) et (7. i—1) entraînent

$$x_i (\bar{a}_{i+1} \bar{a}_i U a_i a_{i-1}) = 0,$$

donc

(9. i) $$x_i \leqslant \overline{\bar{a}_{i+1} \bar{a}_i U a_i a_{i-1}} = a_{i+1} \bar{a}_i U a_i \bar{a}_{i-1},$$

tandis que (6. i) entraîne

(10. i) $$x_{i+1} \leqslant x_i U \bar{a}_i.$$

Les relations (9. i) et (10. i) montrent que

$$x_{i+1} \leqslant a_{i+1}\,\bar{a}_i\, U a_i\,\bar{a}_{i-1}\, U \bar{a}_i = \bar{a}_{i-1}\, U \bar{a}_i. \tag{11. i}$$

En multipliant les relations $x_i \leqslant x_i$, (9. i) et (11. i—1), on obtient

$$\begin{aligned} x_i &\leqslant x_i\,(a_{i+1}\,\bar{a}_i\, U a_i\,\bar{a}_{i-1})\,(\bar{a}_{i-2}\, U \bar{a}_{i-1}) = \\ &= x_i\,[a_{i+1}\,\bar{a}_i\,(\bar{a}_{i-2}\, U \bar{a}_{i-1})\, U a_i\,\bar{a}_{i-1}], \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$x_i \leqslant x_i\,(a_{i+1}\,\bar{a}_i\,\bar{a}_{i-2}\, U a_{i+1}\,\bar{a}_{i-1}\, U a_i\,\bar{a}_{i-1})\, U x_{i+1}\, a_i\,\bar{a}_{i-1}. \tag{12. i}$$

La relation (4. i) est une conséquence des égalités (8. i) et (12. i).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Ćetković, *Rešenje jednog skupovnog sistema od beskonačno mnogo jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 4, 51—59 (1952).

[2] L. Löwenheim, *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietkalkul.* Math. Ann., 68, 169—207 (1910).

[3] M. H. Stone, *Boolean algebras and their relation to topology.*, Proc. Nat. Acad, Sci. USA, 20, 197—202 (1934).

[4] M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras,* Trans. Amer. Math. Soc., 40, 37—111 (1936).

Institut de Mathématique,
47 rue Eminescu, Bucarest 3