PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 6(20), 1966, p. 89–94.

DIE FOURIERREIHE FÜR EINE ELLIPTISCHE FUNKTION DRITTER ART

Stanimir Fempl

(Vorgelegt am 3. November 1965)

Sowie die elliptische Funktionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ und $\operatorname{dn} u$ aus den Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, $k\in[0,\ 1]$ dadurch entstanden, dass man an Stelle von φ die Inversion des Integrals

$$u=\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(k,\ \varphi)$$

d. h.

$$\varphi=\operatorname{am} u \tag{1}$$

setzte, ebenso hat man aus den elliptischen Integralen zweiter und dritter Art

$$E(k,\ \varphi)=\int\limits_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad \prod(n,\ k,\ \varphi)=\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\ \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

mittels der gleichen Substitution (1) die neuen Amplitudenfunktionen zweiter und dritter Art

$$E(k,\operatorname{am} u)=\int\limits_0^n (1-k^2\operatorname{sn}^2 u)\ du,\quad \prod(n,\ k,\operatorname{am} u)=\int\limits_0^n \frac{du}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$$

gebildet. Dabei benutzte man die bekannten Formeln [1]

$$\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1,\quad k^2\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{dn}^2 u=1,\quad d(\operatorname{am} u)=\operatorname{dn} u\,\mathrm{du}. \tag{2}$$

Sich auf die Teorie der Funktionen komplexer Variabeln stützend, bewies Schlömilch — als erster — exakt [2], dass sich die elliptische Funktionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn}^2 u$, sowie noch einige ähnliche, in Fourierreihen entwickeln können, und die für alle Werte von u konvergieren. In diesen Entwicklungen erscheint die Grösse $q=\exp(-\pi K'/K)$, wo $K=F(k,\pi/2)$, $K'=F(k',\ \pi/2)$, $k^2+k'^2=1$. So z. B. lautet die Entwicklung für die Funktion $\operatorname{sn}^2 u$:

$$\operatorname{sn}^2 u=\frac{K-E}{k^2K}-2\left(\frac{\pi}{kK}\right)^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu q^2}{1-q^{2\nu}}\cos\frac{\nu\pi u}{K}, \tag{3}$$

wo $E=E(k,\pi/2)$. Auf Grund solcher Entwicklung erhält man die Fourierreihe für die Funktion $E(k, \operatorname{am} u)$. Indessen, bei der Entwicklung von $\prod(n, k, \operatorname{am} u)$ gelangt man auf bedeutende Schwierigkeiten; erstens, wegen der Gestalt des Integranden, und zweitens, weil sich die elliptischen Integrale dritter Art in zwei Klassen zerlegen: in den so genannten zirkulären Typus ($n \geqslant 0$ oder $-1 \leqslant n < -k^2$) und in den logarithmischen Typus. Um reelle Resultate zu erhalten, fordert jeder Typus eine eigene Behandlung. Diesen Zwiespalt kann man vermeiden durch die Einführung der Jacobischen Θ u. Z Funktionen. Ausserdem, stellte Jacobi eine Normalform des elliptischen Integrales dritter Art auf, nähmlich, wenn man $n=-k^2 \sin^2\alpha$ setzt, so lautet die Jacobische Form

$$\prod(n, k, \varphi)=\int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\, \sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha \sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

und die Grösse α kann auch komplexe Werte erhalten. Mittels eines solchen Integraltypus reduziert sich das Legendresche elliptische Normalintegral dritter Art $\prod(n, k, \varphi)$ auf die Θ u. Z Funktionen.

Was die Entwicklung von $\prod(n, k, \operatorname{am} u)$ in eine Fourierreihe anbelangt, für die Fälle $n \geqslant 0$ und $n \in [-1, -k^2)$ ist die Grösse α nicht mehr reell, und in der Fourierreihe — die übrigens einen reellen Wert hat — werden Ausdrücke "in einer imaginären Hülle" erscheinen. Die Befreiung von dieser Hülle ist nicht so einfach.

In dieser Arbeit entwickle ich in die Fourierreihe eine elliptische Funktion dritter Art, die auf Grund der Substitution (1) aus dem Integral

$$Л(n, k, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

folgt. Dieses Integral hat einen reellen Wert für positive Werte von n, sowie für $-1 \leqslant n < -k^2$, es hat eine konkrete geometrische Bedeutung für $n>0$ und es spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Kegelflächen [3]. Aus diesem Integral folgt auch, auf eine einfache Weise, die Legendresche Normalform $\prod(n, k, \varphi)$, und zwar auf Grund der Relation

$$Л(n, k, \varphi)=\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}} \prod(n, k, \varphi)-k^2 \sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}}\, F(k, \varphi),$$

wie ich in der erwähnten Arbeit [3] gezeigt habe.

1. Auf Grund der Substitution (1) erhält das Integral Л die Form

$$Л(n, k, \operatorname{am} u)=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u}{1+n\operatorname{sn}^2 u}\, du. \tag{4}$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{dЛ}{du}=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \frac{\operatorname{dn}^2 u}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$$

und wegen (2) und [1]

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \ \operatorname{dn} u, \ (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u,$$

folgt

$$\frac{d^2 Л}{du^2} = -\frac{2\sqrt{n(n+1)(n+k^2)} \operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u \ \operatorname{dn} u}{(1+n \operatorname{sn}^2 u)^2}$$

Setzt man

$$\operatorname{sn} a = i\,\frac{\sqrt{n}}{k}, \tag{5}$$

so kann man den Ausdruck für $d^2 Л/du^2$ in der Form

$$\frac{d^2 Л}{du^2} = -\frac{2k^2 i \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2}$$

schreiben, oder in der Form

$$\frac{d^2 Л}{du^2} = -\frac{i}{2} k^2 \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}.$$

Auf Grund der bekannten Formeln [1]

$$\operatorname{sn}(u+a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}, \quad \operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x,$$

und da die Funktionen $\operatorname{cn} x$ u. $\operatorname{dn} x$ gerade Funktionen sind, bekommt man

$$\frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{sn}(u+a) + \operatorname{sn}(u-a),$$

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{sn}(u+a) - \operatorname{sn}(u-a),$$

so dass

$$\frac{d^2 Л}{du^2} = -\frac{i}{2} k^2 \left[\operatorname{sn}^2(u+a) - \operatorname{sn}^2(u-a)\right]$$

folgt. Da nach Gleichung (3)

$$\operatorname{sn}^2(u+a) = \frac{K-E}{k^2 k} - 2\left(\frac{\pi}{kK}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^\nu}{1-q^{2\nu}} \cos \frac{\nu\pi(u+a)}{K},$$

$$\operatorname{sn}^2(u-a) = \frac{K-E}{k^2 K} - 2\left(\frac{\pi}{kK}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^\nu}{1-q^{2\nu}} \cos \frac{\nu\pi(u-a)}{K},$$

so ist

$$\frac{d^2 Л}{du^2} = -2i\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^\nu}{1-q^{2\nu}} \sin \frac{\nu\pi a}{K} \sin \frac{\nu\pi u}{K}.$$

Nach der Integration bekommt man

$$\frac{d Л}{du} = 2\mathrm{i}\,\frac{\pi}{K} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}} \sin \frac{\nu\pi a}{K} \cos \frac{\nu\pi u}{K} + \text{const.}$$

Wegen $\operatorname{sn} 0 = 0$ und $0 = 1$ bekommt man

$$\left(\frac{d Л}{du}\right)_{u=0} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}},$$

so dass man den Wert der Integrationskonstante

$$\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}-2i\,\frac{\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}}\sin\frac{\nu\pi a}{K}$$

erhält. Auf Grund dessen ist

$$\frac{d\text{Л}}{du}=2i\,\frac{\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}}\sin\frac{\nu\pi a}{K}\left(\cos\frac{\nu\pi u}{K}-1\right)+\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}$$

Wenn man von der Tatsache $\text{Л}=0$ für $u=0$ Rechenschaft führt, so folgt nach abermaliger Integration

$$\text{Л}(n,\ k,\ \operatorname{am} u)=2i\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{\nu(1-q^{2\nu})}\sin\frac{\nu\pi a}{K}\sin\frac{\nu\pi u}{K}+ \tag{6}$$
$$+\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}-2i\,\frac{\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}}\sin\frac{\nu\pi a}{K}\right]u.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer — der einen konstanten Wert hat — kann man auf eine bequemere Form bringen. Nähmlich, für

$$u=K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ist am $u=\pi/2$, und es folgt

$$\text{Л}\left(n,\ k,\ \frac{\pi}{2}\right)=K\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}-2i\,\frac{\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}}\sin\frac{\nu\pi a}{K}\right].$$

Der Ausdruck auf der linken Seite — bezeichnen wir ihn mit $\text{Л}_0(n)$ — stellt das vollständige elliptische Integral dritter Art. Also hat der Ausdruck in der eckigen Klammer der letzten Gleichung den Wert $\text{Л}_0(n)/K$. Deshalb lautet die Entwicklung für die Funktion Л in eine Fourierreihe

$$\text{Л}(n,\ k,\ \operatorname{am} u)=2i\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{\nu(1-q^{2\nu})}\sin\frac{\nu\pi a}{K}\sin\frac{\nu\pi u}{K}+\frac{\text{Л}_0(n)}{K}u. \tag{7}$$

Aus (5) erhält man

$$a=\int_0^{\frac{i\sqrt{n}}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{8}$$

Wir werden zwei Fälle unterscheiden.

a). Fall $n>0$. Aus der Theorie der elliptischen Funktionen ist bekannt dass man das Integral (inwiefern der Integrationsweg keinen Verzweigungspunkt umkreist)

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad (z=x+yi)$$

geradlinig nehmen kann, weil sich jeder andere Integrationsweg auf die Gerade von 0 bis z zurückführen lässt. Da im Falle des positiven n die obere Grenze des Integrals rein imaginär ist, so sind alle auf dem Integrationswege vorkommenden z rein imaginär und man kann in den Integral (8) $x = i\ \mathrm{tg}\ \theta$ substituieren. Zufolge dessen erhält man

$$a = i \int_0^{\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{n}}{k}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\theta}} = i F\left(k', \mathit{arc}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{n}}{k}\right),$$

weshalb sich

$$\sin\frac{\nu\pi a}{K} = \sin\frac{\nu\pi i F\left(k', \mathit{arc}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{n}}{k}\right)}{K} = i\,\mathrm{sh}\,\frac{\nu\pi F\left(k', \mathit{arc}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{n}}{k}\right)}{K}$$

ergiebt. Die gesuchte Reihe ist nun

$$(9)\ \Pi(n, k, \mathrm{am}\,u) = \frac{\Pi_0(n)}{K}\,u - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{\nu(1-q^{2\nu})}\,\mathrm{sh}\,\frac{\nu\pi F\left(k', \mathit{arc}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{n}}{k}\right)}{K}\,\sin\frac{\nu\pi u}{K},$$

und zwar gilt diese Gleichung für jedes reelle u.

In dieser Reihe sind alle Grössen reell. Die Konstanten K, q, $F(k', \mathit{arc}\,\mathrm{tg}\sqrt{n}/k)$ befinden sich in allen Tafeln der elliptischen Integrale. Ebenfalls bestimmt man leicht die Konstante $\Pi_0(n)$. Es bestehen nähmlich Tafeln für die Funktion $2\Pi_0(n)/\pi$ die unter dem Namen der Heumanschen Λ_0 — Funktion bekannt ist [1] u. [4].

b). Fall $-1 \leqslant n < -k^2$. In diesem Falle ist die obere Grenze des Integrals

$$a = \int_0^{\frac{\sqrt{-n}}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

wegen $-n > k^2$, grösser als 1 und reell. Ausserdem, wegen $n \geqslant -1$ ist $\sqrt{-n}/k \leqslant 1/k$ und der geradlinige Integrationsweg führt hier nur durch den Verzweigungspunkt $x = 1$, den man in einen Halbkreis umgehen kann. Bei verschwindenden Radius erhält das auf den Halbkreis bezogenes Integral den Grenzwert Null, und es bleibt

$$a = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_1^{\frac{\sqrt{-n}}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Das erste Integral hat den Wert K; im zweiten setzen wir

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}},$$

wodurch entsteht

$$a = K - i\int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

Jetzt ist wegen $n k^2 \geqslant -k^2$ d. h. $n - n k'^2 \geqslant -k^2$ d. h. $n + k^2 \geqslant n k'^2$ und $n < 0$

$$\frac{1}{k'} \sqrt{\frac{n+k^2}{n}} < 1,$$

so dass man $t = \sin \varphi$ setzen kann. Es ergiebt sich

$$a = K - i \int_0^{arc \sin \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{n+k^2}{n}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

oder da die obere Grenze sich auch in der Form $arc \operatorname{tg} \left[\sqrt{-(n+k^2)/(n+1)}/k\right]$ schreiben lässt,

$$a = K - i\, F\left(k',\, arc \operatorname{tg} \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{n+k^2}{n+1}}\right).$$

Wenn man diesen Wert in (7) einsetzt, so ergiebt sich wegen

$$\sin \frac{\nu \pi a}{K} = \sin \left\{\frac{\nu \pi}{K}\left[K - i\, F\left(k',\, arc \operatorname{tg} \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{n+k^2}{n+1}}\right)\right]\right\} =$$

$$= (-1)^{\nu+1}\, i \operatorname{sh} \frac{\nu \pi F\left(k',\, arc \operatorname{tg} \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{n+k^2}{n+1}}\right)}{K},$$

folgender Wert der Fourierreihe für den Fall $-1 \leqslant n < -k^2$:

$$(9) \quad Л(n, k, \mathrm{am\, u}) = \frac{Л_0(n)}{K} u + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu q^\nu}{\nu(1 - q^{2\nu})} \operatorname{sh} \frac{\nu \pi F\left(k',\, arc \operatorname{tg} \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{n+k^2}{n+1}}\right)}{K} \cdot \sin \frac{\nu \pi u}{K}.$$

Auch hier sind alle Grössen reell.

2. Schliesslich bemerken wir das man die Legendresche Funktion dritter Art $\Pi(n, k, \mathrm{am\, u})$ leicht erhält auf Grund der am Anfang erwähnten Relation zwischen dem Integral $Л(n, k, \varphi)$ und den Legendreschen elliptischen Normalintegral dritter Art $\Pi(n, k, \varphi)$. Wenn man dort $\varphi = am\, \mathrm{u}$ setzt, so folgt die Relation

$$(10) \qquad Л(n, k, \mathrm{am\, u}) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}} \prod (n, k, \mathrm{am\, u}) = k^2 u \sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}},$$

und daraus folgt die Fouriersche Etwicklung für die Funktion $\Pi(n, k, \mathrm{am\, u})$.

LITERATUR

[1] Byrd, P. and Friedman, M., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1954.

[2] Schlömilch. O., *Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis*, Braunschweig, 1879.

[3] Фемпл, С., *О једном типу елиптичкоі интеграла III врсте и о њеіовим йрименама*, Зборник радова Мат. инст. САН, 7 (1959), 107-120.

[4] Heuman, C., *Bidrag till teorien för pendelgyroskopet*, Skrifter utgivna av Tehniska Högskolan, Stockholm, 1927.