PUBLICATIONS DE L' INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 6 (20), 1966, p. 5–7

# SUR UNE EQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE NON LINEAIRE

*Octavian Em. Gheorghiu*

(Présenté le 12 Février 1965)

Dans l'article [1] D. Ž. Đoković a déterminé la solution générale réelle et continue de l'équation fonctionnelle

$$f(x_1+x_2, x_3)+f(x_2+x_3, x_1)+f(x_3+x_1, x_2)=0. \tag{1}$$

Dans cette Note on donne la solution générale réelle et continue de l'équation fonctionnelle cyclique suivante

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2, x_3)+f(x_2+x_3, x_1)+f(x_3+x_1, x_2) \\ =\alpha f(x_1+x_2, x_3)\, f(x_2+x_3, x_1)\, f(x_3+x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2}$$

contenant comme cas particulier l'équation (1) quand la constante arbitraire $\alpha=0$.

Si pour résoudre (2) l'on pose, d'après D. Ž. Đoković [1],

$$x_1=x+\frac{u}{3}, \quad x_2=y+\frac{u}{3}, \quad x_3=-x-y+\frac{u}{3}, \tag{3}$$

l'équation fonctionnelle cyclique (2) devient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2u}{3}+x+y, \frac{u}{3}-x-y\right)+f\left(\frac{2u}{3}-x, \frac{u}{3}+x\right)+f\left(\frac{2u}{3}-y, \frac{u}{3}+y\right) \\ =\alpha f\left(\frac{2u}{3}+x+y, \frac{u}{3}-x-y\right) f\left(\frac{2u}{3}-x, \frac{u}{3}+x\right) f\left(\frac{2u}{3}-y, \frac{u}{3}+y\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Si l'on introduit une nouvelle fonction $\varphi$ par la formule

$$\varphi(\xi, u)\equiv f\left(\frac{2u}{3}-\xi, \frac{u}{3}+\xi\right) \tag{5}$$

l'équation (4) devient

$$\varphi(-x-y, u)+\varphi(x, u)+\varphi(y, u)=\alpha\,\varphi(-x-y, u)\,\varphi(x, u)\,\varphi(y, u), \tag{6}$$

où la variable $u$ joue le rôle du paramètre.

L'équation fonctionnelle (6) peut s'écrire aussi sous la forme que voici:

$$\varphi(-x-y, u)=\frac{\varphi(x, u)+\varphi(y, u)}{\alpha \varphi(x, u) \varphi(y, u)-1}. \tag{7}$$

Si l'on y pose $x=y=0$, on obtient les relations

$$\varphi(0, u)=0, \qquad \text{pour } \alpha \leqslant 0; \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0, u)=0 \\ \text{ou} \\ \varphi(0, u)=\pm C\sqrt{3} \end{array}\right\} \quad \text{pour } \alpha=\frac{1}{C^2}>0. \tag{9}$$

Etant donné que la fonction $\varphi(\xi, u)$ est nulle pour $\xi=0$ et $\alpha$ reste quelconque, et si dans cette hypothèse, on prend $x+y=0$, on constate que la fonction $\varphi(\xi, u)$ est une fonction impaire, à savoir

$$\varphi(-\xi, u)+\varphi(\xi, u)=0. \tag{10}$$

Donc, dans l'hypothèse $\varphi(0, u)=0$ et $\alpha$ quelconque, l'équation fonctionnelle (7), conduit aux trois cas suivants:

$$\varphi(x+y, u)=\varphi(x, u)+\varphi(y, u) \qquad (\alpha=0), \tag{11}$$

$$\varphi(x+y, u)=\frac{\varphi(x, u)+\varphi(y, u)}{1+\frac{1}{C^2} \varphi(x, u) \varphi(y, u)} \qquad \left(\alpha=-\frac{1}{C^2}<0\right), \tag{12}$$

(*voir* J. Aczél [2], p. 73)

$$\varphi(x+y, u)=\frac{\varphi(x, u)+\varphi(y, u)}{1-\frac{1}{C^2} \varphi(x, u) \varphi(y, u)} \qquad \left(\alpha=\frac{1}{C^2}>0\right). \tag{13}$$

La solution générale réelle et continue des équations (11), (12), (13) est (voir [1], [2], [3]) respectivement:

$$\varphi(x, u)=x \cdot a(u) \tag{11'}$$

$$\varphi(x, u)=C \cdot \operatorname{th} x \cdot b(u) \tag{12'}$$

$$\varphi(x, u)=C \cdot \operatorname{tg} x \cdot b(u), \tag{13'}$$

où $C$ est une constante réelle quelconque et $a(u)$, $b(u)$ des fonctions réelles et continues arbitraires.

Si l'on revient à l'équation fonctionnelle cyclique (2), on arrive au résultat suivant:

Théorème. *La solution générale réelle et continue de l'équation fonctionnelle cyclique*

$$\begin{aligned} & f(x_1+x_2, x_3)+f(x_2+x_3, x_1)+f(x_3+x_1, x_2) \\ & \quad=\alpha f(x_1+x_2, x_3) f(x_2+x_3, x_1) f(x_3+x_1, x_2), \end{aligned}$$

*où $\alpha$ est une constante réelle arbitraire et où la fonction $f(\xi, t)$ est une fonction réelle et continue, dans l'hypothèse $f(0, t)=0$, est donnée par*

$$f(\xi, t)=(\xi-2t)\cdot a(\xi+t) \qquad (\alpha=0),$$

$$f(\xi, t)=C\cdot \operatorname{th}(\xi-2t)\cdot b(\xi+t) \qquad \left(\alpha=-\frac{1}{C^2}<0\right),$$

$$f(\xi, t)=C \operatorname{tg}(\xi-2t)\cdot b(\xi+t) \qquad \left(\alpha=\frac{1}{C^2}>0\right),$$

*où $C$ est une constante réelle quelconque et $a(u)$, $b(u)$ des fonctions réelles continues arbitraires.*

Si l'on considère maintenant l'hypothèse (9), $\varphi(0, u)=\pm C\sqrt{3}$, et si on fait dans (7) la transformation $x \rightarrow x+y$ et $y \rightarrow 0$ et puis $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow x+y$, on obtient la même relation

$$\frac{\varphi(x+y, u)+\varphi(0, u)}{\alpha \varphi(0, u) \varphi(x+y, u)-1}=\frac{\varphi(x, u)+\varphi(y, u)}{\alpha \varphi(x, u) \varphi(y, u)-1}. \tag{14}$$

D'après une observation due à D. Ž. Đoković qui a lu cet article dans le manuscrit, posons

$$\varphi(0, u)=C\sqrt{3}, \quad \varphi(x, u)=C\left(\sqrt{3}+2\, \Phi(x, u)\right)\cdot \tag{15}$$

L'équation (14) devient alors

$$\Phi(x+y, u)=\frac{\Phi(x, u)+\Phi(y, u)+\sqrt{3}\, \Phi(x, u)\, \Phi(y, u)}{1-\Phi(x, u)\, \Phi(y, u)}.$$

La solution générale continue de la dernière équation est

$$\Phi(x, u)=\frac{\sin(a(u)\, x)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-a(u)\, x\right)}, \tag{16}$$

$a(u)$ étant une fonction continue arbitraire. (Sur ce sujet *voir* l'équation 91, p. 74 du livre [2]). A partir des égalités (15) et (16), on obtient

$$\varphi(x, u)=C \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}-a(u)\, x\right),$$

$$f(\xi, t)=C \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}-a(\xi+t)(\xi-2t)\right).$$

## BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Ž. Đoković, *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, Publications de la Faculté d' Electrotechnique de l' Université de Belgrade, série: Mathématique et physique № 63 (1961), p. 21.

[2] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel. Stuttgart, Berlin, 1961. pp. 73, 44, 80, 93 et Literaturverzeichnis.

[3] M. Ghermănescu, *Ecuatii functionale*, ed. Acad, R. P. R. Bucuresti, 1960, p. 235—245, p. 473—477 et Bibliographie.