PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 75–78.

SUR UNE CLASSE D' INÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES ET SUR LA CONVERGENCE DE CERTAINES SUITES

Slaviša B. Prešić

(Communiqué le 17 avril 1964)

Dans cet article nous allons considérer une classe d'inéquations aux différences finies et, en s'appuyant sur les résultats obtenus, nous démontrerons ensuite deux théorèmes sur la convergence de certaines suites.

1. Nous commençons par le lemme suivant fondamental:

Lemme 1. *Soit k un nombre natural fixé et soient x_n et X_n deux suites de nombres non négatifs satisfaisant aux conditions*:

$$(1) \qquad \begin{gathered} x_{n+k} \leqslant a_1(n)\, x_n + a_2(n)\, x_{n+1} \cdots + a_k(n)\, x_{n+k-1}, \\ X_{n+k} \geqslant a_1(n)\, X_n + a_2(n)\, X_{n+1} \cdots + a_k(n)\, X_{n+k-1} \\ (n=1, 2, \cdots;\ X_1, \cdots, X_k > 0) \end{gathered}$$

les coefficientes $a_1(n), \cdots, a_k(n)$ étant tous non négatifs.

Il existe alors un nombre non négatif L tel que l'on a

$$x_n \leqslant L X_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Démonstration. On vérifie immédiatement l'assertion du lemme en posant

$$L = \max\left(\frac{x_1}{X_1}, \frac{x_2}{X_2}, \cdots, \frac{x_k}{X_k}\right)$$

et en appliquant ensuite l'induction mathématique.

On peut compléter le lemme démontré par l'énoncé suivant: Si dans (1), l'on a $x_1, \cdots, x_k > 0$, alors il existe un $l (\geqslant 0)$ tel que l'on a

$$X_n \leqslant l x_n \, (n = 1, 2, \cdots).$$

La démonstration est semblable à celle du lemme 1.

Lemme 2. *Soit x_n une suite de nombres non négatifs qui remplit la condition*

$$x_{n+k} \leqslant a_1 x_n + a_2 x_{n+1} + \cdots + a_k x_{n+k-1}$$
$$(n=1, 2, \cdots;\ k \text{ nombre naturel fixé}),$$

les constants $a_1, a_2, \cdots, a_k$ étant non négatifs. Alors ils existent les nombres positifs L et θ tels que l'on a

$$x_n \leqslant L\,\theta^n \ (n=1, 2, \cdots).$$

Démonstration. Soit θ un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$\theta^k \geqslant a_1 + a_2\,\theta + \cdots + a_k\,\theta^{k-1}.$$

Alors, la suite positive $X_n = \theta^n$ remplit la condition

$$X_{n+k} \geqslant a_1 X_n + a_2 X_{n+1} + \cdots + a_k X_{n+k-1} \ (n=1, 2, \cdots),$$

de manière que, d'après le lemme 1, il existe un L ($\geqslant 0$) tel que l'on a

$$x_n \leq L\,X_n, \text{ c'est-à-dire } x_n \leq L\,\theta^n (n = 1, 2, \cdots)$$

Le lemme 1 peut être étendu aux paires d'inéquations à différences finies de la forme

$$x_n \leq a_0(n) + a_1(n)\,x_1 + \cdots + a_{n-1}(n)\,x_{n-1},$$

$$X_n > a_0(n) + a_1(n)\,X_1 + \cdots + a_{n-n}(n)\,X_{n-1},$$

avec $a_1(n), a_2(n), \cdots, a_{n-1}(n) \geqslant 0$, ou bien aux paires de systèmes d'inéquations de ce type.

Par exemple, pour le cas du système de deux inéquations à différences finies, on a le

L e m m e 3. *Soient x_n, y_n, X_n, Y_n deux suites de nombres positifs satisfaisant aux conditions*

$$x_n \leq a(n) + a_1(n)\,x_1 + \cdots + a_{n-1}(n)\,x_{n-1} + b_1(n)\,y_1 + \cdots + b_{n-1}(n)\,y_{n-1},$$

$$y_n \leq c(n) + c_1(n)\,x_1 + \cdots + c_{n-1}(n)\,x_{n-1} + d_1(n)\,y_1 + \cdots + d_{n-1}(n)\,y_{n-1},$$

$$X_n \geqslant a(n) + a_1(n)X_1 + \cdots + a_{n-1}(n)X_{n-1} + b_1(n)\,Y_1 + \cdots + b_{n-1}(n)\,Y_{n-1},$$

$$Y_n \geqslant c(n) + c_1(n)X_1 + \cdots + c_{n-1}(n)X_{n-1} + d_1(n)\,Y_1 + \cdots + d_{n-1}(n)\,Y_{n-1},$$

$$(n=2, 3, \cdots;\ a_i(n), b_i(n), c_i(n), d_i(n) \geqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, n-1)$$

Il existent alors deux nombres positifs L_1 et L_2 tels que l'on a

$$x_n \leq L_1 X_n,\ y_n \leq L_2\,Y_n \ (n = 1, 2, \cdots).$$

Nous omettons la démonstration, celle-là étant tout-à-fait semblable à celle du lemme 1.

2. Soit E un espace métrique complet, k un nombre naturel donné et $f: E^k \to E$ une fonction donnée remplissant la condition

$$d(f(u_1, u_2, \cdots, u_k), f(u_2, u_3, \cdots, u_{k+1})) \leq a_1\,d(u_1, u_2) + a_2\,d(u_2, u_3) + \cdots + a_k\,d(u_k, u_{k+1}) \quad (u_1, \cdots, u_{k+1} \in E), \tag{2}$$

où les nombres a_i sont non négatifs et soumis à la condition

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k < 1. \tag{3}$$

On peut noter que dans le cas $k = 1$ les conditions (2) et (3) se réduisent aux conditions au moyen desquelles on introduit l'opérateur de contraction.

T h é o r è m e **1. A.** *Toute suite x_n ($n = 1, 2, \cdots; x_n \in E$) satisfaisant à la condition*

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k-1}) \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{4}$$

les éléments $x_1, x_2, \cdots, x_k \in E$ *étant arbitraires et la fonction* f *satisfaisant aux conditions précédentes, est convergente.*

B. La limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ *satisfait à l'équation*

$$x = f(x, x, \cdots, x) \tag{5}$$

et représente l'unique solution de (5).

Démonstration. **A.** Posons $\Delta_n = d(x_n, x_{n+1})$. Nous avons alors,d'après (2),

$$\Delta_{n+k} \leqslant a_1 \Delta_n + a_2 \Delta_{n+1} + \cdots + a_k \Delta_{n+k-1} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

D'après le lemme 2 il existent deux nombres positifs L et θ tel que l'on a

$$\Delta_n \leq L\theta^n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

le nombre θ étant, n'importe quelle solution positive de l'inéquation

$$\theta^k \geqslant a_1 + a_2\theta + \cdots + a_k\theta^{k-1}. \tag{7}$$

Or, l'inégalité (3) entraîne l'existence d'une solution θ de (7) pour laquelle on a $0 < \theta < 1$. Pour ce nombre θ on aura, d'après (6),

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqq L\frac{\theta^n}{1-\theta} \quad (n, p = 1, 2, \cdots),$$

d'où la conclusion que x_n est une suite de Cauchy. Elle est par conséquent convergente, l'espace métrique E étant complet.

B. Après avoir observé que l'on a, sous les hypothèses admises sur f,

$$\begin{aligned} d(f(u_1, u_2, \cdots, u_k), f(u, u, \cdots, u)) \leq\ & d(f(u_1, u_2, \cdots, u_k),\ f(u_2, u_3, \cdots, u_k, u)) \\ & + d(f(u_2, u_3, \cdots, u_k, u) f(u_3, u_4, \cdots, u_k, u, u)) \\ & + \cdots \\ & + d(f(u_k, u, \cdots, u), f(u, u, \cdots, u)), \\ d(f(u, u, \cdots, u), f(v, v, \cdots, v)) \leq\ & (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\, d(u, v) \\ & (u_1, u_2, \cdots, u_k, u, v \in E), \end{aligned}$$

on démontre l'assertion que $\lim_{n\to\infty} x_n$ est la solution de (5) de la même manière que l'on procède dans la partie correspondante de la démonstration du théorème connu de Banach sur le point fixe, et la seconde assertion, que $\lim_{n\to\infty} x_n$ est l'unique solution de (5), résulte du théorème de Banach mentionné si l'on l'applique à la fonction $F: E \to E$ définie par

$$F(x) = f(x, x, \cdots, x) \quad (x \in E).$$

Le théorème 1 peut être appliqué aux suites réelles, ainsi que aux suites liées à la solution des équations: linéaires algébriques, différentielles, intégrale et autres.

Par exemple, nous allons déduire du théorème **1** le théorème suivant relatif à la convergence de suites réelles.

Théorème **2.** *Soit E un intervalle fermé de la droite réelle (fini ou infini) et soit $f(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ $(u_i, f(u_1, u_2, \cdots, u_k) \in E)$ une fonction dont les dérivées partielles existent et satisfont à la condition*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| \leqslant a_i \quad (u_i \in E, i = 1, 2, \cdots, k), \tag{8}$$

où la somme des constantes a_i est inférieure à 1.
Alors, la suite $x_n (n = 1, 2, \cdots; x_n \in E)$ dont les termes satisfont à la condition

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

converge et sa limite est l'unique solution dans E de l'équation

$$x = f(x, x, \cdots, x)$$

Démonstration. On a, d'après (8) et d'après le théorème sur la valeur moyenne,

$$|f(u_1, u_2, \cdots, u_k) - f(u_2, u_3, \cdots, u_{k+1})| \leqslant a_1 |u_1, -u_2| + \\ + a_2 |u_2 - u_3| + \cdots + a_k |u_k - u_{k+1}| \\ (u_1, u_2, \cdots, \in E),$$

de manière que f remplit toutes les conditions du théorème 1 si l'on pose

$$d(u, v) = |u - v|.$$

Nous allons illustrer le théorème 2 par l'exemple suivant.
La suite x_n pour laquelle

$$\frac{8}{3} x_{n+2} = \frac{1}{1 + x_n} + \frac{1}{1 + x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots; x_1, x_2, \geqslant 0$$

converge vers $\frac{1}{2}$.

En effet, la fonction

$$f(u_1, u_2) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{1 + u_1} + \frac{1}{1 + u_2}\right)$$

remplit toutes les conditions du théorème 2 dans $E = \{x \mid x \geqslant 0\}$.

M. Kuczma a bien voulu lire un résumé de cet article pour ce qui nous lui exprimons nos vifs reconnaissances.