PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 55–67.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВНЕШНЕЙ СКОРОСТИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ПО СТЕПЕННОМУ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Радомир Ашкович

(Саопштено 12 јуна 1963)

И в осесимметричной проблеме, также как и в соответствующем плоском случае, рассмотренном Блазиусом [1], при переходе от случая тела вращения, внезапно приведенного в равномерное движение, к случаю его равноускоренного движения, решенном автором этой работы [2], получается увеличение пути, пройденного телом до момента возникновения отрыва и отвечающего промежутка времени.

Поэтому, естественно, возникает вопрос о том, как будет изменяться эти характерные величины нестационарного движения при разных зависимостях внешней скорости от времени.

1. Нестационарный пограничный слой на телах вращения при распределении внешней скорости $U(x,t) = A\,t^{\alpha}\,W(x), \alpha \geqq 0$.

Если из состояния покоя в вязкой жидкости тело вращения приводится в ускореное движение со степенным ростом со временем скорости, тогда скорость внешнего потенциального движения имеет форму: $U(x,t) = A\,t^{\alpha} W(x)$ где t – представляет время, а x – координату, измеряемую вдоль контура тела.

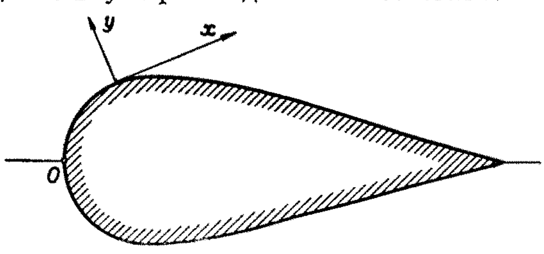

Рис. 1

Так как для этого распределения скорости Ватсон [3] дал решение пограничного нестационарного слоя только для плоского случая, мы займемся соответствующим осесимметричным случаем нестационарного пограничного слоя на телах вращения.

При этом в наших иследованиях будем пользоваться хорошо известным методом последовательных приближений [4]. Для первых трёх приближений скорости в пограничном слое:

$u = u_0 + u_1 + u_2$ получаются таким образом уравнения

$$(1.1') \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu.\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$(1.2') \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu . \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

$$(1.3') \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu . \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = - u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} - v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{llll} u_0 = 0\,, & y = 0\,; & u_0 = U(x, t)\,, & y = \infty\,. \\ u_1 = 0\,, & y = 0\,; & u_1 = 0\,, & y = \infty\,. \\ u_2 = 0\,, & y = 0\,; & u_2 = 0\,, & y = \infty\,. \end{array}$$

Уравнениям (1.1'), (1.2') и (1.3') надо при этом присоединить отвечающие уравнения неразрывности.

Первое приближение скорости в пограничном слое u_0 определено диференциальным уравнением

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A\, \alpha\, t^{\alpha - 1}\, W(x)\,.$$

Если вместо координаты „y" измеряемой вдоль нормали на контуре тела ввести новую переменную в безразмерной форме $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ где „ν" – кинематический коэффициент вязкости, то тогда можно получить значительное упрощение уравнений в частных производных, предполагая решения в виде:

$$(1.2) \quad u_0 = A\, t^{\alpha}\, W(x)\, \Phi_0'(\eta)$$

Используя это выражение, неизвестная функция $\Phi_0(\eta)$ будет определена уравнением:

$$(1.3) \quad \Phi_0''' + 2\eta\, \Phi_0'' + 4\alpha(1 - \Phi_0') = 0$$

с граничными условиями:

$$\Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = 0\,, \quad \Phi_0'(\infty) = 1\,.$$

Так как из уравнения неразрывности $\frac{\partial(u_0 r)}{\partial x} + \frac{\partial(v_0 r)}{\partial y} = 0$ можно получить выражение для проекции первого приближения скорости v_0:

$$v_0 = -\, 2\sqrt{\nu t}\, A t^{\alpha} \left(W' + \frac{W}{r} \frac{dr}{dx} \right) \Phi_0(\eta)$$

то тогда уравнение (1.2') примет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial b} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = A^2\, t^{2\alpha} \left[W W' \left(1 - \Phi_0'^{\,2} + \Phi_0\, \Phi_0'' \right) + \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx}\, \Phi_0\, \Phi_0'' \right]$$

Анализируя его можно прийти к заключению, что решение следует искать в форме:

$$(1.4) \qquad u_1 = A^2\, t^{2\alpha + 1} \left[W W'\, \Phi_{1\alpha}'(\eta) + \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx}\, \Phi_{1b}'(\eta) \right]$$

при чем после подстановки (1.4) в (1.2′) оказывается, что функции Φ_{1a} и Φ_{1b} определены дифференциальными уравнениями:

$$\Phi_{1a}''' + 2\eta\,\Phi_{1a}'' - 4(2\alpha+1)\,\Phi_{1a}' = -4\left(1 - \Phi_0'^2 + \Phi_0\Phi_0''\right) \tag{1.5}$$
$$\Phi_{1a}(0) = \Phi_{1a}'(0) = 0, \quad \Phi_{1a}'(\infty) = 0$$

$$\Phi_{1b}''' + 2\eta\,\Phi_{1b}'' - 4(2\alpha+1)\,\Phi_{1b}' = -4\,\Phi_0\Phi_0'' \tag{1.6}$$
$$\Phi_{1b}(0) = \Phi_{1b}'(0) = 0, \quad \Phi_{1b}'(\infty) = 0.$$

Уравнения (1.3) и (1.5) совпадают с уравнениями соответствующей плоской задачи. При этом решения Ватсона [3] имеют вид:

$$\Phi_0(\eta) = \eta + 2^{2\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)\,g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \tag{1.7}$$

$$\Phi_{1a}'(\eta) = 2^{2\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,g_a(\eta) - 2^{2\alpha-1}\,\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+{}^5/_2)}\,g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\eta) +$$
$$+ 2^{2\alpha-1}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+2}\,g_{\alpha-1}(\eta) + 2^{4\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)\left[g^2_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) - g_\alpha(\eta)\,g_{\alpha+1}(\eta)\right] -$$
$$-2^{4\alpha+2}\,\Gamma(2\alpha+2)\left[\frac{3-4\alpha}{2+2\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha+2} - \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{5}{2})} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\frac{3}{2})}\right] g_{2\alpha+1}(\eta) \tag{1.8}$$

где, кроме обыкновенной гамма функции, введен еще (2_α) — кратный интеграл от гауссовой функции ошибок:

$$g_\alpha(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+1)} \int\limits_\eta^\infty (\gamma-\eta)^{2\alpha}\, e^{-\gamma^2}\, d\gamma \tag{1.9}$$

В рассматриваемом нами случае, в отличие от плоской проблемы существующее влияние поперечной кривизны выражено вторым членом на правой стороне (1.4) и соответственно функцией $\Phi_{1b}'(\eta)$, удовлетворяющей уравнению (1.6).

Следовательно, нужно еще рассмотреть уравнение (1.6) или (1.6′):

$$\Phi_{1b}''' + 2\eta\,\Phi_{1b}'' - 4(2\alpha+1)\,\Phi_{1b}' = 2^{2\alpha+3}\,\Gamma(\alpha+1)\,\alpha\,g_\alpha(\eta) + 2^{2\alpha+1}\,\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}\,g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\eta) -$$
$$-2^{4\alpha+2}\,\Gamma^2(\alpha+1)\,g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\eta)\,g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) - 2^{2\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)\,g_{\alpha-1}(\eta)\,. \tag{1.6′}$$

Для общего интеграла неоднородного уравнения (1.6′) нужно, прежде всего, найти два партикулярных интеграла однородной части уравнения

$$\varphi'' + 2\eta\,\varphi' - 4(2\alpha+1)\,\varphi = 0$$

где введено сокращенное обозначение

$$\varphi(\eta) = \Phi_{1b}'(\eta)$$

Решение будем искать в виде:

$$\varphi(\eta) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} A_\nu \eta^\nu$$

При помощи рекурентной формулы для коеффициентов ряда:

$$A_{n+2} = \frac{2(4\alpha + 2 - n)}{(n+2)(n+1)} A_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

один партикулярный интеграл уравнения (1.6′) представится выражением:

$$\text{(1.10)} \qquad \varphi_{\ddot{u}1} = 1 + \sum_{k=1}^{2\alpha+1} \frac{4^k k!}{(2k)!} \binom{2\alpha+1}{k} \eta^{2k}$$

Д о к а ж е м, что второй партикулярный интеграл имеет вид:

$$\text{(1.11)} \qquad \varphi_{\ddot{u}2} = g_{2\alpha+1}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(4\alpha+3)} \int_\eta^\infty (\gamma-\eta)^{4\alpha+2} e^{-\gamma^2} \alpha\gamma$$

Введем новое обозначение $2\alpha + 1 = \beta$ и п р о в е р и м следующее тождество

$$\varphi''_{\ddot{u}2} + 2\eta\varphi'_{\ddot{u}2} - 4\beta\varphi_{\ddot{u}2} = 0$$

Пользуясь выражением (1.11) и последним уравнением получим:

$$\frac{4\beta(2\beta-1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \int_\eta^\infty (\gamma-\eta)^{2\beta-2} e^{-\gamma^2} \alpha\gamma - 2\eta \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \int_\eta^\infty (\gamma-\eta)^{2\beta-1} e^{-\gamma^2} \alpha\gamma -$$

$$4\beta \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \int_\eta^\infty (\gamma-\eta)^{2\beta} e^{-\gamma^2} \alpha\gamma = \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \int_\eta^\infty (2\beta - 1 + 2\gamma\eta - 2\gamma^2)$$

$$(\gamma-\eta)^{2\beta-2} e^{-\gamma^2} \alpha\gamma = \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \int_\eta^\infty \left[(2\beta-1)(\gamma-\eta)^{2\beta-2} - 2\gamma(\gamma-\eta)^{2\beta-1}\right] e^{-\gamma^2} \alpha\gamma =$$

$$= \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \int_\eta^\infty \frac{\alpha}{\alpha\gamma} \left[(\gamma-\eta)^{2\beta-1} e^{-\gamma^2}\right] \alpha\gamma =$$

$$= \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta+1)} \left[(\gamma-\eta)^{2\beta-1} e^{-\gamma^2}\right]_0^\infty = 0$$

Партикулярный интеграл неоднородного уравнения (1.6′) равен сумме партикулярных интегралов следующих неоднородных уравнений:

$$D(\Phi_{1b}) = 2^{2\alpha+3}\,\Gamma(\alpha+1)\,\alpha\, g_\alpha(\eta)$$

$$D(\Phi_{1b}) = 2^{2\alpha+1}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+{}^3/_2)}\, g_{\alpha-{}^1/_2}(\eta)$$

$$D(\Phi_{1b}) = -2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)\, g_{\alpha-1}(\eta)$$

$$D(\Phi_{1b}) = -2^{4\alpha+2}\Gamma^2(\alpha+1)\, g_{\alpha-{}^1/_2}(\eta)\, g_{\alpha+{}^1/_2}(\eta)$$

при чем D представляет дифференциальный оператор вида

$$D \equiv \frac{d^3}{d\eta^3} + 2\eta\frac{d^2}{d\eta_2} - 4(2\alpha+1)\frac{d}{d\eta}$$

Партикулярные интегралы этих уравнений будут:

$$P_1(\eta) \equiv -2^{2\alpha+1}\frac{\alpha}{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\, g_\alpha(\eta)$$

$$P_2(\eta) = -2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+{}^5/_2)}\, g_{\alpha-{}^1/_2}(\eta)$$

$$P_3(\eta) = 2^{2\alpha-3}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+2}\, g_{\alpha-1}(\eta)$$

$$P_4(\eta) = -2^{4\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)\, g_\alpha(\eta)\, g_{\alpha+1}(\eta)$$

Следовательно, партикулярный интеграл уравнения (1.6) имеет значение:

$$P(\eta) = P_1(\eta) + P_2(\eta) + P_3(\eta) + P_4(\eta)$$

а его общий интеграл, окончательно, примет вид:

$$\Phi'_{1b}(\eta) = C_1\left[1 + \sum_{k=1}^{2\alpha+1}\frac{4^k k!}{(2k)!}\binom{2\alpha+1}{k}\eta^{2k}\right] + C_2\, g_{2\alpha+1}(\eta) + P(\eta) \tag{1.12}$$

Если используем граничные условия (1.6) получим значения постоянных:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 2^{4\alpha+2}\Gamma(2\alpha+2)\left[\frac{4\ \alpha+1}{2(\alpha+1)} - \frac{\alpha}{2(\alpha+2)} + \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2(\alpha+1\ )\Gamma(\alpha)}{\Gamma\ (\alpha+{}^5/_2)\Gamma(2\alpha)}\right]$$

Итак, получено решение нестационарного пограничного слоя осесимметричной задачи с точностью до третьего приближения скорости в пограничном слое:

$$u = At^\alpha W\Phi'_0(\eta) + A^2 t^{2\alpha+1} WW'\,\Phi'_{1a}(\eta) + A^2 t^{2\alpha+1} W^2\frac{dr}{dx}\Phi'_{1b}(\eta) \tag{1.13}$$

Условие $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ дает промежуток времени t_{om} от начала движения до момента возникновения отрыва пограничного слоя:

$$A t_{om}^{\alpha+1} = -\frac{\Phi_0''(0)}{\frac{dW}{dx}\Phi_{1\alpha}''(0) + \frac{W}{r}\frac{dr}{dx}\Phi_{1b}''(0)}.$$

Пройденный за это время путь тела вращения будет:

$$s_{om} = \int_0^{t_{om}} A t^{\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha+1} A\, t_{om}^{\alpha+1}.$$

Эти формулы содержат производные $\Phi_0''(0)$, $\Phi_{1a}''(0)$, $\Phi_{1b}''(0)$ выраженные при помощи гамма — и бета-функции следующим образом:

$$\Phi_0''(0) = 2^{2\alpha}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} B(\alpha, \alpha);$$

$$\Phi_{1\alpha}''(0) = -2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha)} + 2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+5/2)}\frac{2^{2-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} -$$

$$-2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+2}\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha-2)} + 2^{4\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)\left[-2\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha+2)}\frac{1}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha)}\frac{1}{4\alpha+1}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{1}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha+2)}\right] + 2^{4\alpha+2}\Gamma(2\alpha+2)\,\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{3-4\alpha}{2+2\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha+2} - \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\alpha+5/2)} + \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{2\Gamma^2(\alpha+3/2)}\right]\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(4\alpha+2)}$$

$$\Phi_{1b}''(0) = -2^{4\alpha+2}\frac{2\alpha+1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{4\alpha+1}{2(\alpha+1)} - \frac{\alpha}{2(\alpha+2)} + \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+5/2)\Gamma(2\alpha)}\right]$$

$$B(2\alpha+1, 2\alpha+1) + 2^{2\alpha+1}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}(\alpha+1)}B(\alpha,\alpha) + 2^{2\alpha-1}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}(\alpha+1)}B(\alpha,\alpha) +$$

$$+ 2^{2\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}B(\alpha+1, \alpha+1) - 2^{2\alpha-3}\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sqrt{\pi}(\alpha+2)}B(\alpha-1, \alpha-1) + 2\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+5/2)\Gamma(\alpha)}.$$

2. Нестационарный пограничный слой на телах вращения при распределении внешней скорости $U(x, t) = A e^{ct} W(x), c > 0$.

Если из состояния покоя в вязкой жидкости тело вращения приводится в ускореное движение с экспоненциальным ростом со временем скорости, тогда в системе координатных осей, жестко связанной с осесимметричным контуром, скорость внешнего потенциального движения имеет форму:

$U = A e^{ct} W(x), c > 0$ где „t" представляет время, а „x" — координату измеряемою вдоль контура тела (рис 1.). В качестве способа рассмотрения нестационарного пограничного слоя применим метод последовательных приближений, приведенный, в предшествующем параграфе.

Таким образом для первого приближения скорости „u_0" в пограничном слое, пользуясь уравнением (1.1'), получим

(2.1)
$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A c e^{ct} W(x)$$

Для рассмотрения уравнения (2.1) оказывается полезным вместо переменной „y“ перпендикулярной к контуру тела ввести новую перенную

$$\zeta = \sqrt{\frac{c}{\nu}}\, y$$

Если решение уравнения (2.1) предположить в форме

$$u_0 = A e^{ct} W(x) X_0'(\zeta)$$

то тогда получим систему дифференциальных уравнений:

(2.2)
$$\begin{gathered} X_0''' - X_0' = -1 \\ X_0(0) = X_0'(0) = 0, \; X_0'(\infty) = 1. \end{gathered}$$

Из уравнения неразрывности для первого приближения

$$\frac{\partial (u_0 r)}{\partial x} + \frac{\partial (v_0 r)}{\partial y} = 0$$

следует:

$$v_0 = -\sqrt{\frac{\nu}{c}}\, A e^{ct} \left(W' + \frac{W}{r} \frac{dr}{dx} \right) X_0(\zeta)$$

Теперь можно окончательно формировать уравнение (1.2') для второго приближения скорости:

(2.3)
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = A^2 e^{2ct} \left[(W W'(1 - X_0'^2 + X_0 X_0'') + \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx} X_0 X_0'' \right]$$

Предполагая решение в виде:

$$u_1 = \frac{1}{c} A^2 e^{2ct} \left[W W' X_{1a}'(\zeta) + \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx} X_{1b}'(\zeta) \right]$$

и подставляя это выражение в (2.3), придем к уравнениям:

(2.4)
$$\begin{gathered} X_{1a}''' - 2 X_{1a}'' = -1 + X_0'^2 - X_0 X_0'' \\ X_{1a}(0) = X_{1a}'(0) = X_{1a}'(\infty) = 0 \end{gathered}$$

(2.5)
$$\begin{gathered} X_{1b}''' - 2 X_{1b}' = -X_0 X_0'' \\ X_{1b}(0) = X_{1b}'(0) = X_{1b}'(\infty) = 0 \end{gathered}$$

Решения уравнений (2.2), (2.4) и (2.5) имеют следующий вид:

$$X_0' = 1 - e^{-\zeta}$$

$$X_{1a}' = e^{-\zeta\sqrt{2}} + (\zeta - 1) e^{-\zeta}$$

$$X_{1b}' = \frac{7}{2} e^{-\zeta\sqrt{2}} + (-3 + \zeta) e^{-\zeta} - \frac{1}{2} e^{-2\zeta}$$

Этими значениями функций полностью определена скорость в пограничном слое с точностью до третьего приближения:

$$u = A\,e^{ct}\,W(x)\left[X_0'(\zeta) + \frac{1}{c}A\,e^{ct}\left(W'\,X_{1a}' + \frac{W}{r}\frac{dr}{dx}X_{1b}'\right)\right] \tag{2.6}$$

Для разыскания связи между положением точки отрыва и соответствующим промежутком времени от начала движения пользуемся условием:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = 0 ,$$

которое дает следующую формулу для расчета момента возникновения отрыва :

$$\frac{1}{c}A\,e^{ct} = -\frac{X_0''(0)}{W'\,X_{1a}''(0) + \dfrac{W}{r}\dfrac{dr}{dx}X_{1b}''(0)} \tag{2.7}$$

Входящие сюда постоянные имеют значения:

$$X_0''(0) = 1,\ X_{1a}''(0) = 2 - \sqrt{2},\ X_{1b}''(0) = 5 - \frac{7\sqrt{2}}{2} .$$

Так как путь, пройденный телом вращения, равен:

(2.7) $s = \int\limits_{-\infty}^{t} A\,e^{ct}\,dt = \frac{1}{c}A\,e^{ct}$, то следует, что уравнение (2.7) представляет путь, пройденный телом вращения от начала движения до момента возникновения отрыва пограничного слоя:

$$s_{om} = -\frac{X_0''(0)}{W'\,X_{1a}''(0) + \dfrac{W}{r}\dfrac{dr}{dx}X_{1b}''(0)} . \tag{2.7'}$$

П р и м е р: Пограничный слой в случае экспоненциального роста со временем скорости шара радиуса R. В случае шара радиуса R имеем:

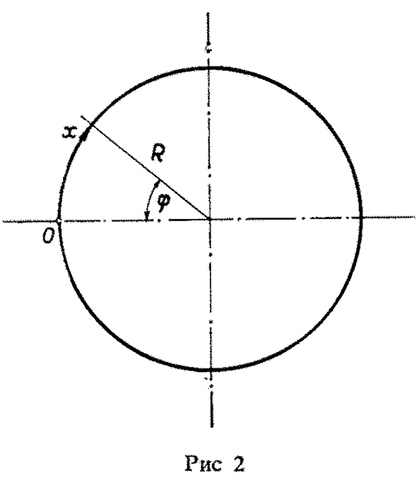

Рис 2

$$r(x) = R\,\sin\frac{x}{R}$$

$$W(x) = \frac{3}{2}\sin\frac{x}{R}$$

Подставляя эти значения в выражение (2.7) получим формулу для промежутка времени t_{om} от начала движения до момента возникновения отрыва пограничного слоя:

$$t_{om} = \frac{1}{c}\,l_n\left(\frac{-c}{A}\,\frac{1{,}018\ R}{\cos\frac{x}{R}}\right)$$

Здесь очевидно, что отрыв пограничного слоя может наступить только при значении угла $\varphi = \frac{x}{R}$ из интервала $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \pi$.

Первый отрыв возникает в точке $x = R\pi$, спустя время:

$$\left(tmin\right)_{om} = \frac{1}{c} \ln 1{,}018 \frac{c}{A} R .$$

Путь, пройденный шаром от начала движения:

$$S = - 1{,}018 \ R/\cos \frac{x}{R} \cdot$$

До момента первого отрыва пограничного слоя в задней критической точке шар пройдет путь

$$s_{om} = 1{,}018 \, R .$$

Третье приближение скорости в пограничном слое при распределении внешей скорости $U(x, t) = A e^{ct} x W(x), c > 0$ получим, пользуясь известными значениями первых двух апроксимаций, при чем уравнение (1.3′) принимает вид:

$$\text{(2.8)} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{A^3}{c} e^{3ct} \left[W W'^2 P_1(\zeta) + W^2 W'' P_2(\zeta) + \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx} W' P_3(\zeta) + \right.$$
$$\left. + \frac{W^3}{r^2} \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 P_4(\zeta) + \frac{W^3}{r} \frac{d^2 r}{dx^2} P_s(\zeta) \right] \cdot$$

Здесь являются следующие известные функции:

$$P_1(\zeta) = X_0 X_{1a}'' + X_0'' X_{1a} - 2 X_0' X_{1a}'$$

$$P_2(\zeta) = X_0'' X_{1a} + X_0' X_{1a}'$$

$$P_3(\zeta) = X_0 X_{1a}'' + X_0 X_{1b}'' + X_0'' X_{1a} + 2 X_0'' X_{1b} - 3 X_0' X_{1b}'$$

$$P_4(\zeta) = X_0 X_{1b}'' + X_0' X_{1b}'$$

$$P_5(\zeta) = X_0'' X_{1b} - X_0' X_{1b}' \cdot$$

Предположим решение уравнения (2.8) в виде:

$$\text{(2.9)} \quad u_2 = \frac{A^3}{c^2} e^{3ct} \left[W W'^2 X_{2a}'(\zeta) + W^2 W'' X_{2b}'(\zeta) + \frac{W^2}{r} \frac{dr}{dx} W' X_{2c}'(\zeta) + \right.$$
$$\left. + \frac{W^3}{r} \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 X_{2d}'(\zeta) + \frac{W^3}{r} \frac{d^2 r}{dx^2} X_{2e}'(\zeta) \right].$$

Подставляя значение $u_2 b$ (2.8) и приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых комбинациях функций $r(x)$ и $W(x)$, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$X_{2a}''' - 3X_{2a}' = -P_1(\zeta), \quad X_{2a}(0) = X_{2a}'(0) = X_{2a}'(\infty) = 0$$

$$X_{2b}''' - 3X_{2b}' = -P_2(\zeta), \quad X_{2b}(0) = X_{2b}'(0) = X_{2b}'(\infty) = 0$$

$$X_{2c}''' - 3X_{2c}' = -P_3(\zeta), \quad X_{2c}(0) = X_{2c}'(0) = X_{2c}'(\infty) = 0$$

$$X_{2d}''' - 3X_{2d}' = -P_4(\zeta), \quad X_{2d}(0) = X_{2d}'(0) = X_{2d}'(\infty) = 0$$

$$X_{2e}''' - 3X_{2e}' = -P_5(\zeta), \quad X_{2e}(0) = X_{2e}'(0) = X_{2e}'(\infty) = 0$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям, представляются в форме:

$$X_{2a}' = -\frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{2})\,e^{-\zeta\sqrt{3}} + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\,e^{-\zeta(1+\sqrt{2})} + (2+\sqrt{2}-\zeta\sqrt{2})\,e^{-\zeta\sqrt{2}} +$$
$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 2 + \frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)e^{-\zeta}$$

$$X_{2b}' = -\frac{5}{4}e^{-\zeta\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{2}}{4} - e^{-\zeta(1+\sqrt{2})} - e^{-\zeta\sqrt{2}} + e^{-2\zeta} + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\zeta\right)e^{-\zeta}$$

$$X_{2c}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{24}{7}\right)e^{-\zeta\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{21\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\zeta(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{2}(15 - 9\sqrt{2} - 9\zeta\sqrt{2})\,e^{-\zeta\sqrt{2}}$$
$$-\frac{1}{7}\left(\zeta + \frac{29}{2}\right)e^{-2\zeta} - \left(\zeta^2 - \frac{9}{2}\zeta + \frac{25}{4} + 2\sqrt{2}\right)e^{-\zeta}$$

$$X_{2d}' = -\left(\frac{69}{14} + \frac{35\sqrt{2}}{8}\right)e^{-\zeta\sqrt{3}} + \frac{7}{8}(2+\sqrt{2})\,e^{-\zeta(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{2}(35 + 7\sqrt{2} -$$
$$-7\zeta\sqrt{2})e^{-\zeta\sqrt{2}} - \frac{1}{4}e^{-3\zeta} - \frac{1}{7}\left(\zeta + \frac{85}{2}\right)e^{-2\zeta} - \left(\frac{1}{2}\zeta^2 - 4\zeta + 8\right)e^{-\zeta}$$

$$X_{2e}' = \left(\frac{1}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\right.\left(e^{-\zeta\sqrt{3}} + \frac{7}{8}(1-\sqrt{2})\,e^{-\zeta(1+\sqrt{2})} - \frac{7}{2}e^{-\zeta\sqrt{2}} + \frac{1}{24}e^{-3\zeta} +\right.$$
$$+\frac{1}{2}e^{-2\zeta} + \left(-\frac{1}{2}\zeta + \frac{7}{4} + \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)e^{-\zeta}.$$

Таким образом, скорость в пограничном слое имеет теперь более точное значение:

$$u = A\,e^{ct}\,W(x)\left\{X_0' + \frac{1}{c}A\,e^{ct}\left[W'X_{1a}' + \frac{W}{r}\frac{dr}{dx}X_{1b}'\right] + \frac{1}{c^2}(A\,e^{ct})^2\left[W'^2X_{2a}' +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,W\,W''\,X_{2b}' + \frac{W}{r}\frac{dr}{dx}W'\,X_{2c}' + \frac{W^2}{r^2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 X_{2d}' + \frac{W^2}{r}\frac{d^2r}{dx^2}X_{2e}'\right]\right\}.$$

Используя уравнения неразрывности отдельных приближений, можно также определить проекции скорости v_0, v_1, v_2 и, следовательно, саму скорость в пограничном слое

$$v = v_0 + v_1 + v_2.$$

3. Связь между степенно-ускоренными и экспоненциально-ускоренными движениями тел вращений

Ватсон [3] рассматривал нестационарный пограничный слой на цилиндрических телах при внешних скоростях, зависящих от времени по законам :

$$U(x, t)=At^{\alpha}\, W(x), \alpha \geqslant 0, \text{ и } U(x, t)=A\, e^{ct}\, W(x), \ c > 0$$

при чем случай экспоненциального роста со временем скорости цилиндра приводит, как им было показано, к значениям времени и пути безотрывного этапа движения, соответствующим случаю степенного роста со временем скорости цилиндра при $\alpha \to \infty$.

Результаты Ватсона могут быть частично использованы и в случае осесимметричной задачи. Потвердить совпадения решения степенно-уско енного движения при $\alpha \to \infty$ и экспоненциально-ускоренного движения осесиметричного течения было бы во всяком случае очень полезно, так как этим способом можно бы было значительно облегчить исследование пограничного слоя при самых интересных-больших значениях экспонента α и при предельном случае, когда $\alpha \to \infty$.

Связь этих классов течений можно доказать, показывая связь между соответствующими функциями токов.

В случае движения с внешней скоростью $U=A\, e^{ct}\, W(x)$ из уравнения

неразрывности
$$\frac{\partial (ur)}{\partial x}+\frac{\partial (vr)}{\partial y}=0$$

и выражений
$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

можно получить функцию тока в форме:

$$\psi=\sqrt{\frac{\nu}{c}}\, A\, e^{ct}\, W(x)\, X(s, x, \zeta) \tag{3.1}$$

где являются выражения:

$$X(s, x, \zeta)=r X_0(\zeta)+s\left[r\, W'\, X_{1a}(\zeta)+W\frac{dr}{dx}X_{1b}(\zeta)\right]+\cdots; s=\frac{A}{c}e^{ct}$$

Определяя проекции скорости:

$$u=\frac{1}{r}A\, e^{ct}\, W(x)\frac{\partial X}{\partial \zeta}$$

$$v=-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu}{c}}\, A e^{ct}\left(W' X+W\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

и подставляя их в уравнение нестационарного пограничнего слоя:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.2}$$

получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^3 X}{d\xi^3}+r-\frac{\partial x}{\partial \zeta}+s\left\{-\frac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial \zeta}+rW'+\frac{W}{r^2}\frac{dr}{dx}\left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)^2+\frac{W'}{r}\left[X\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2\right]+\frac{W}{r}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2}-\frac{\partial X}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial \zeta}\right)\right\}=0 \tag{3.3}$$

В случае степенного роста со временем скорости движения тела вращения $U(x,t)=A\,t^{\alpha}\,W(x)$ (случай, рассмотренный автором) функция тока представляется в виде:

$$\psi=2\sqrt{\nu t}\;U(x,t)\;\Phi(x,\eta,t) \tag{3.4}$$

где

$$\Phi(x,\eta,t)=r\,\Phi_0(\eta)+A\,t^{\alpha+1}\left[r\,W'\,\Phi_{1a}(\eta)+W\frac{dr}{dx}\Phi_{1b}(\eta)\right]+\cdots$$

и

$$\eta=\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Проекции скорости в пограничном слое будут:

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{A}{r}\,t^{\alpha}\,W(x)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$$

$$v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{A}{r}\,2\sqrt{\nu t}\;t^{\alpha}\left(W'\,\Phi+W\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$$

Тогда уравнение (3.2) дает:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\eta^3}+\frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\alpha\left(r-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)-t\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial\eta}+A\,t^{\alpha+1}\left\{r\,W'+\frac{W}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{W'}{r}\left[\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{W}{r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial\eta}\right]\right\}=0 \tag{3.5}$$

Путь, пройденный телом вращения этим способом движения, определяется формулой:

$$s=\frac{A}{\alpha+1}\,t^{\alpha+1}$$

Используя это соотношение, уравнение (3.5) примет вид:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\eta^3}-\frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\alpha\left(r-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+(\alpha+1)\,s\left\{-\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\,\partial\eta}+rW'+\frac{W}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{W'}{r}\left[\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{W}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial\eta}\right)\right\}=0 \tag{3.6}$$

Если теперь ввести новую функцию

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\alpha^{-\frac{1}{2}} X(s, x, \zeta) \text{ и новую переменную}$$

$$\zeta = 2\sqrt{\alpha}\,\eta \text{ то тогда получим уравнение:}$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{2}\frac{\zeta}{\alpha}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} + r - \frac{\partial X}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) s \left\{ - \frac{\partial^2 X}{\partial s\, \partial \zeta} + rW' + \frac{W}{r^2}\frac{dr}{dx}\left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{W'}{r}\left[X\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)^2\right] + \frac{W}{r}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial \zeta}\right)\right\} = 0 \tag{3.7}$$

Предельный переход $\alpha \to \infty$ в уравнении (3.7) дает окончательно:

$$\frac{\partial^3 X}{\partial \zeta^3} + r - \frac{\partial X}{\partial \zeta} + s \left\{ - \frac{\partial^2 X}{\partial s\, \partial \zeta} + rW' + \frac{W}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)^2 + \frac{W'}{r}\left[X\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)^2\right] + \frac{W}{r}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial \zeta}\right)\right\} = 0 \tag{3.8}$$

Так как уравнение (3.8) совпадает с уравнением (3.3), то этим, следовательно, доказано совпадение степенно-ускоренного движения тела вращения при $\alpha \to \infty$ и случая экспоненциального роста со временем скорости тела вращения. На примере шара полезность этой связи становится очевидной. А именно, в случае степенного роста со временем скорости шара существует стремление к увеличению безразмерного пути отрыва пограничного слоя с ростом значения экспонента α. (При движении рывком $\alpha = 0$, $s_{om} = 0{,}392\ R$, при равноускоренном движении $\alpha = 1$, $s_{om} = 0{,}442\,R$ и т. д.)

Продолжительность этапа безотрывного движения в вязкой жидкости не может быть однако произвольно большая, что с точки зрения практики было бы, понятно, очень желательно.

Ограниченность значения пути отрыва пограничного слоя в случае экспоненциального роста со временем скорости шара и показанная связь между экспоненциально-ускоренными и степенно-ускоренными движениями тела вращений при $\alpha \to \infty$ представляют подтверждение вышевысказанного вывода.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лойцянский Л. Г. *Ламинарный пограничный слой*, Москва, 1962

[2] Ашкович Р. *Пограничный слой на теле вращения при равноускоренном движении*, сообщено на VII югославском конгрессе механики, в июне 1964

[3] Watson E. Roy. Soc. ser. A, 231 (1955) 1184

[4] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*, Москва, 1956