

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ВРАЩЕНИЯ

Радомир Ашкович

(Саопштено 9. V. 1962)

Уравнения нестационарного пограничного слоя обычно решают методом последовательных приближений, при чем для упрощения задачи приходится ставить на движение рассматриваемого тела некоторые ограничения. Таким является пограничный слой на теле, внезапно приведенном в поступательное равномерное движение с распределением скорости U на внешней границе пограничного слоя удовлетворяющей следующие условия:

$$(1) \quad \begin{aligned} U(x, t) &= 0, \quad t \leq 0 \\ U(x, t) &= U(x), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

где t — представляет время, а x — координату, измеряемую вдоль контура тела (рис. 1). Блазиус и Больтце [1] разработали общий способ для решения

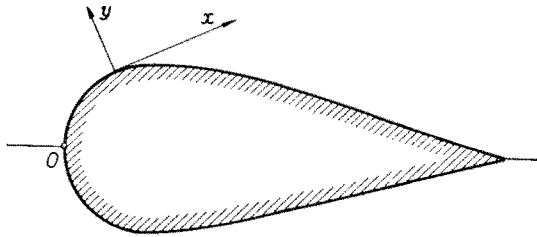


Рис. 1.

проблемы этого класса нестационарного движения тела, при чем первый ограничился только рассмотрением плоскости пограничного слоя. Больтце позднее дал соответствующий метод для случая движения тел вращения в направлении их оси симметрии, при чем он ввел вместо координаты y — измеряемой по нормали к контуру тела (рис. 1), безразмерную переменную

$\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости

При помощи соотношений

$$(2) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

где u, v — продольная и поперечная компоненты скорости, а $r(x)$ — радиус поперечного сечения тела вращения, им же была введена в уравнения нестационарного осесимметрического пограничного слоя функция тока $\psi(x, y, t)$ в форме

$$(3) \quad \psi(x, y, t) = 2 \sqrt{y} t \left\{ r U \zeta_0(\eta) + t \left[r U \frac{dU}{dx} \zeta_{1a}(\eta) + U^2 \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}(\eta) \right] + \dots \right\}$$

Значения функций $\zeta_0(\eta)$, $\zeta_{1a}(\eta)$ и $\zeta_{1b}(\eta)$ рассчитаны численным интегрированием дифференциальных уравнений, полученных применением вышеуказанного метода последовательных приближений.

Продольная скорость в пограничном слое определяется на основании (2) и (3) выражением

$$(4) \quad \frac{u}{U} = \zeta'_0 + t \left[\frac{dU}{dx} \zeta'_{1a} + \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \zeta'_{1b} \right]$$

которое дает возможность построить график распределения скоростей в различных сечениях пограничного слоя для любого момента времени на контуре рассматриваемого тела вращения.

Исходя от уравнения

$$(5) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

определяющего отрыв пограничного слоя, получается на основании выражения (4) следующая формула для расчета момента возникновения отрыва

$$(6) \quad 1 + t_{om} \left[\frac{dU}{dx} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \right) + \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} 0,150 \right] = 0$$

при помощи которой в этой работе рассматривается отрыв нестационарного пограничного слоя на эллипсоиде вращения.

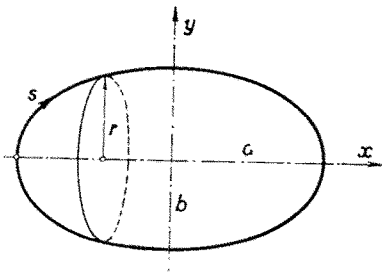


Рис. 2

Эту задачу, из-за различных выражений распределения внешних потенциальных скоростей приходится разделить на две части, которым отвечают следующие интервалы значений соотношения полуосей

эллипсоида $k = \frac{b}{a}$ (рис. 2)

A) $0 < k \leq 1$

B) $1 \leq k < \infty$

Интервал A ($0 < k \leq 1$)

Для эллипсоидов вращения из этого интервала, при параметрических уравнениях меридионального сечения

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

распределение скоростей внешнего потенциального течения и радиуса поперечного сечения эллипсоида имеет вид [2]

$$(7) \quad U = \frac{e^3 U_\infty}{e - \frac{1}{2}(1 - e^2) \ln \frac{1+e}{1-e}} \frac{\sin \varphi}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}; \quad r = a(1 - e^2)^{1/2} \sin \varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

где U_∞ — скорость в бесконечности, а $e = (1 - k^2)^{1/2}$ — эксцентриситет эллипса.

После подстановки выражений (7) в уравнение (6) получается после некоторых преобразований формула для расчета момента возникновения отрыва пограничного слоя для некоторого сечения на контуре эллипсоида

$$(8) \quad t_{om} = \frac{1}{\frac{\cos \varphi}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{E_1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} + E_2 \right)}$$

где $E_1 = \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \frac{EU_\infty}{a} (1 - e^2)$, $E_2 = 0$, $150 \frac{EU_\infty}{a}$,

$$E = \frac{e^3}{e - \frac{1}{2}(1 - e^2) \ln \frac{1+e}{1-e}};$$

На основании формы выражения (8) можно прийти к заключению, что момент самого раннего возникновения отрыва определяется соотношением

$$(9) \quad (t_{min})_{om} = \frac{1}{[f(\mu)]_{max}}$$

где

$$(10) \quad f(\mu) = \frac{\mu}{1 - e^2 \mu^2} \left(\frac{E_1}{1 - e^2 \mu^2} + E_2 \right)$$

при чем

$$0 < \mu = \cos \varphi \leq 1$$

Так как в этом интервале функция (10) возрастающая, то ее максимальное значение будет

$$(11) \quad [f(\mu)]_{max} = f(1) = \frac{1,575 E U_\infty}{k^2 a}$$

Таким образом промежуток времени от начала движения до момента возникновения отрыва, т.е. соответствующий безразмерный путь пройденный эллипсоидом вращения, для любого $0 < k \leq 1$ определяется формулой

$$(12) \quad \frac{U_\infty (t_{min})_{om}}{a} = \frac{S_{om}}{a} = 0,635 k^2 \frac{(1 - k^2)^{1/2} - \frac{1}{2} k^2 \ln \frac{1 + (1 - k^2)^{1/2}}{1 - (1 - k^2)^{1/2}}}{(1 - k^2) (1 - k^2)^{1/2}}$$

Если параметр k устремить в выражении (12) к единице, то тогда получим его предел

$$\lim_{k \rightarrow 1 - 0} \frac{S_{om}}{a} = 0,423$$

совпадающий с значением, полученным раньше для случая шара [1].

Интервал B ($k \geq 1$)

Для эллипсоидов вращения, у которых $k \geq 1$, при параметрических уравнениях меридионального сечения $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ распределение скоростей внешнего потенциального течения и радиуса поперечного сечения эллипсоида имеет вид [3]

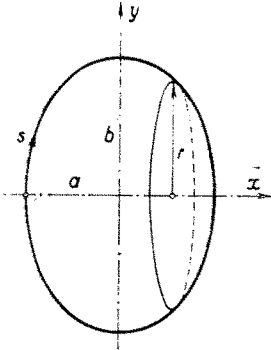


Рис. 3

$$(13) \quad U = A_1 U_\infty \frac{e \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad r = b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$\text{где} \quad A_1 = \frac{e^2}{\arcsin e - e(1 - e^2)^{1/2}}; \quad e = \frac{(k^2 - 1)^{1/2}}{k}$$

После подстановки выражений (13) в уравнение (6) получается формула для пути, который пройдет эллипсоид от начала движения до момента возникновения отрыва в некотором сечении на контуре эллипсоида

$$(14) \quad \frac{U_\infty t_{om}}{a} = \frac{S_{om}}{a} = \frac{1}{A_2} \frac{1}{\frac{\cos \varphi}{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{1,425}{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi} + 0,15 \right)}$$

$$\text{где} \quad A_2 = \frac{e^3 (1 - e^2)^{1/2}}{\arcsin e - e(1 - e^2)^{1/2}}$$

Если в выражении (14) эксцентриситет e считать параметром, то тогда можно заключить, что самый ранний момент возникновения отрыва определяется соотношением

$$(15) \quad \frac{U_\infty (t_{min})_{om}}{a} = \frac{1}{A_2 [f(\mu)]_{max}}$$

$$\text{где} \quad f(\mu) = \frac{\mu}{1 - e^2 + e^2 \mu^2} \left(\frac{1,425}{1 - e^2 + e^2 \mu^2} + 0,15 \right)$$

$$\text{при чем,} \quad 0 < \mu = \cos \varphi \leq 1$$

После определения максимума функции $f(\mu)$, получается следующее выражение

$$(16) \quad [f(\mu)]_{max} = f(\mu_1) = \frac{\mu_1}{1 - e^2 + e^2 \mu_1^2} \left(\frac{1,425}{1 - e^2 + e^2 \mu_1^2} + 0,15 \right)$$

при чем точка самого раннего отрыва отвечает переменной

$$(17) \quad \mu_1 = \cos \varphi = \frac{1,825}{e} \left[-4,275 + (19,22 + 1,035 e^2 + 0,09 e^4)^{1/2} \right]^{1/2}$$

Так как для параметра $k < 1,1644$ переменная $\mu_1 > 1$, следует, что выражение (17) может быть употреблено для расчета точки отрыва только для эллипсоидов, у которых

$$(18) \quad k \geq 1,1644$$

Таким образом необходимо еще найти соответствующее решение для подинтервала $1 \leq k \leq 1,1644$.

Так как формула (15) действительна для целого интервала $k \geq 1$, то поэтому для подинтервала $1 \leq k \leq 1,1644$ нужно только определить другое максимальное значение функции $f(\mu)$

Оказывается, что в этом подинтервале

$$(19) \quad [f(\mu)]_{max} = f(1) = 1,575$$

т.е. как и в интервале „А“ точка самого раннего отрыва совпадает с задней критической точкой эллипсоида вращения.

Таким образом после подстановки (19) в формулу (15) получается

$$(20) \quad \frac{S_{om}}{a} = 0,635 \frac{\arcsin e - e(1-e^2)^{1/2}}{e^3(1-e^2)^{1/2}}; 1 \leq k \leq 1,1644$$

Если в этом выражении устремить параметр k к единице, то тогда получим снова предел

$$\lim_{k \rightarrow 1+0} \frac{S_{om}}{a} = 0,423$$

совпадающий с значением, полученным для шара.

Результаты расчета безразмерного пути $\frac{S_{om}}{a}$ для различных значений параметра представлены графиком на рис. 4, на котором, ради сравнения,

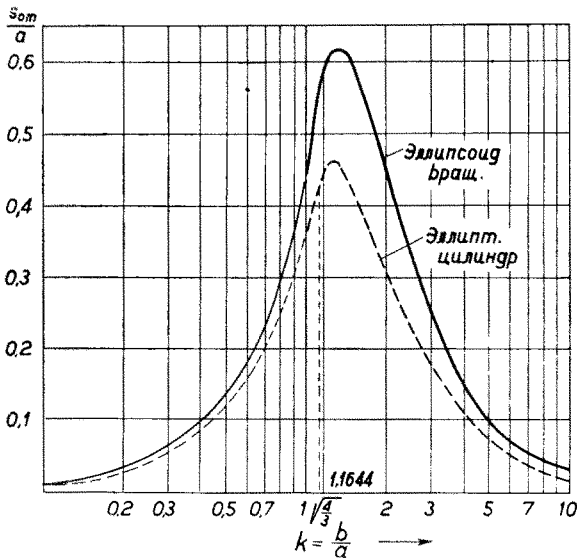


Рис. 4

начерчена соответствующая кривая для случая эллиптического цилиндра, внезапно приведенного в поступательное равномерное движение.

Числовые примеры:

1. Для эллипсоида вращения с полуосями $a = 10$ см., $b = 8$ см., внезапно приведенном в поступательное равномерное движение со скоростью $U_\infty = 10$ см/сек, рассчитаны на основании выражения (4) распределения скоростей в некоторых сечениях пограничного слоя по прошествии времени $t = 1,5$ сек отсчитанного от начала движения.

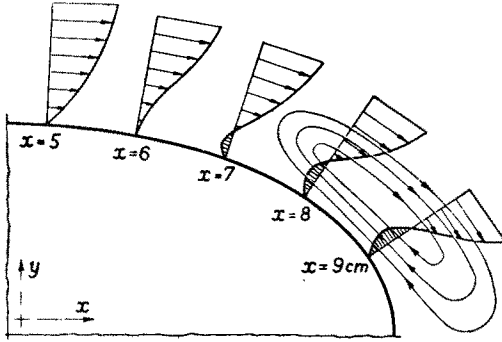


Рис. 5

2. Для эллипсоида вращения с полуосями $a = 10$ см, $b = 15$ см внезапно приведенном в поступательное равномерное движение со скоростью $U_\infty = 10$ см/сек рассчитаны на основании выражения (4) распределения скоростей в точке контура эллипсоида, определенной углом $\varphi = 56^\circ 50'$, в некоторых моментах времени, отсчитанных от начала движения. Рассматриваемый интервал времени заканчивается в момент отрыва пограничного слоя в заданной точке эллипсоида, который возникает после времени $t_{от} = 0,56$ сек и пройденного безразмерного пути $\frac{S_{от}}{a} = 0,56$ от начала

движения. Графики найденных распределений представлены на рис. 6 в безразмерных координатах $\eta, u/U$.

$t = 1,5$ сек отсчитанного от начала движения. Графики этих распределений представлены на рис. 5 в соответствующих точках контура эллипсоида. Отрыв пограничного слоя возникает после прохождения времени $(t_{мин})_{от} = 0,295$ сек и пройденного безразмерного пути эллипсоидом $\frac{S_{от}}{a} = 0,295$ от начала движения.

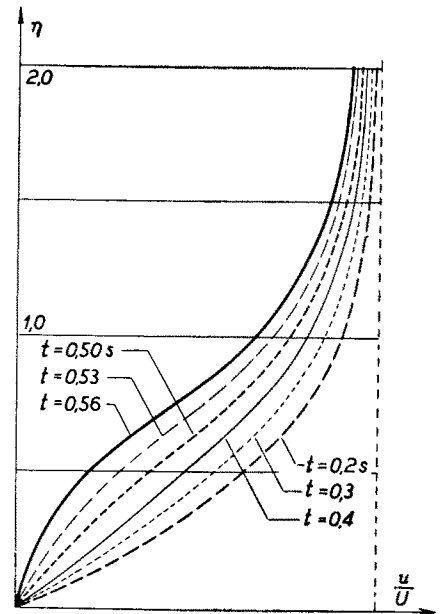


Рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, Москва, 1956.
 [2] Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газов, Москва,