PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 125–132.

SUR LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f^{N-m}hf^m x = gx$

Mahmud Bajraktarević

(Communiqué le 29 janvier 1965)

Sommaire. — Construction de la solution générale de l'équation fonctionnelle (1) dans un sousensemble E' de l'ensemble E. Réduction de la résolution de (1) dans $E \setminus E'$ à la résolution d'un système d'équations fonctionnelles. Applications aux équations fonctionnelles $(gh)^k fx = f(hg)^k x$, $fhg\,hg \ldots hg\,hfx = gh\,gh \ldots gh\,gx$.

1. Introduction et préliminaires

Soit G l'ensemble de toutes les permutations [2] g d'un ensemble E d'un espace X. Pour tout $x \in E$, la suite

$$\Gamma = \left\{ g^i x \right\}_{i=-\infty}^{+\infty},$$

où les itérées $g^i x$ de g sont définies par

$$g^0 x = x, \qquad g^{i+1} x = g\, g^i x \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

sera appelée cycle (v. [6] et [4]) de g correspondant à l'élément x. En posant

$$\Lambda = \{\infty, 1, 2, 3, \cdots\},$$

l'ensemble R de tous les cycles Γ de g peut être partagé en sousensembles disjoints R_l $(l \in \Lambda)$, définis par les relations

$$R_l = \left\{ \Gamma : \Gamma = \{g^i x\}_{i=-\infty}^{+\infty},\ g^{i+l} x = g^i x \text{ pour tous les } i \right\},\ l \in \{1, 2, \cdots\},$$

$$R_\infty = \left\{ \Gamma : \Gamma = \{g^i x\}_{i=-\infty}^{+\infty},\ g^i x \neq g^j x,\ i \neq j \right\}.$$

La permutation $g \in G$ supposé donnée, on introduit le sousensemble $G^\star \subset G$ par la relation

$$G^\star \overset{\text{déf.}}{=} \{f : f \in G, fR = R\}$$

L'objet de la présente note fait l'étude de la solution générale $f \in G^\star$ dans E de l'équation fonctionnelle

$$f^{N-m} h f^m x = g x \tag{1}$$

où $h \in G^\star$ est une permutation donnée de E, N et m deux entiers donnés, m entre zéro et N. Sans diminuer la généralité, on peut supposer $N \geqq 2$, puisque, dans le cas où $N \leqq -2$, on n'a qu'à remplacer f par son inverse f^{-1}.

L'équation (1) est une généralisation de l'équation fonctionnelle

$$f^N x = g x$$

dont la solution générale dans un ensemble E avec $f, g \in G$ a été construite par S. Łojasiewicz [6] (v. aussi R. Isaacs [4] et P. I. Haidukov [3]). Les solutions continues de cette équation étaient traitées par M. Kuczma [5] et P. I. Haidukov [3] sous la condition de la continuité et la monotonie stricte de la permutation g. La solution générale de cette équation sans aucune restriction par rapport aux applications f et g, la correspondance biunivoque entre x et fx respectivement entre x et gx exceptée, est donnée par l'auteur [1].

L'ensemble S de tous les cycles χ de la permutation h de R peut être partagé en sousensembles disjoints S_k $(k \in \Lambda)$ définis par les relations

$$S_k = \begin{cases} \left\{ \chi : \chi = \left\{ h^i \Gamma \right\}_{i=-\infty}^{+\infty}, \quad h^{i+k}\Gamma = h^i \Gamma \text{ pour tous les } i \right\}, & k = 1, 2, 3, \cdots, \\ \left\{ \chi : \chi = \left\{ h^i \Gamma \right\}_{i=-\infty}^{+\infty}, \quad h^i \Gamma \neq h^j \Gamma, \ i \neq j \right\}, & k = \infty . \end{cases}$$

Introduisons les notations

$$S_{k,l} = R_l \cap \left(\bigcup_{\chi \in S_k} \chi \right), \qquad S^*_{k,l} = \{ \chi : \cup \chi = S_{k,l} \}, \ k, l \in \Lambda \} .$$

Soit Ψ une solution quelconque de l'équation fonctionnelle [6]

$$(1^a) \qquad \Psi^N \chi = \chi \qquad \left(\chi \in S^*_{k,l} \right); \ k, l \in \Lambda \right),$$

obtenue en partant de la partition de $S^*_{k,l}$ (dans le cas où cette partition est possible, ce qui sera supposé [6]) en sousensembles disjoints P^i_j

$$S^*_{k,l} = \bigcup_{i=0}^{s} \left\{ \bigcup_{j=1}^{m_i} P^i_j \right\},$$

où, dans le cas où $k \in (1, 2, \cdots)$, $m_i = \dfrac{N}{k_i}$ et où $1 = k_0 < k_1 < \cdots < k_s$ est la suite complète de diviseurs de N premiers à k, telle que les $P^i_{1}, \ldots, P^i_{m_i}$ soient de la même puissance; p_i et q_i soient deux entiers tels que

$$(2) \qquad p_i k_i - q_i k = 1 .$$

Dans le cas où $k = \infty$ on doit avoir

$$(3) \qquad s = 0, \ p_0 = k_0 = 1, \quad S^*_{\infty, l} = \bigcup_{j=1}^{N} P_j^0 .$$

À tout χ associons un de ses éléments Γ quelconque que l'on désignera par Z_χ. Soit $\Gamma \in R$. Il existe un cycle unique χ contenant Γ et on peut écrire, avec un entier ν dépendant de Γ, $\Gamma = h^\nu Z_\chi$. La permutation Φ de R définie par

$$\begin{aligned} &\Phi \Gamma = h^\nu Z_{\Psi_\chi}, \qquad && \chi \in P^i_j (j = 1, \cdots, m_i - 1), \\ &\Phi \Gamma = h^{\nu - p_i} Z_{\Psi_\chi}, && \chi \in P^i_{m_i}, \\ &i = 0, 1, \ldots, s; && k \in \Lambda \end{aligned}$$

représente la solution générale [6] de l'équation fonctionnelle

$$\Phi^N \Gamma = h^{-1}\Gamma \qquad (\Gamma \in S_{k,l}) \;. \tag{4}$$

Dans le suivant on désignera toujours par Ψ respectivement Φ une solution de (1 a) respectivement de (4).

2. **Construction de la solution générale dans le cas $k=\infty$**

Considérons d'abord le cas où $k=\infty$, $l \in \Lambda$.

On introduit les notations

$$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma_1^\nu = h^\nu Z_\chi \quad \text{lorsque} \quad \chi \in P_1^0, & \Gamma_{\lambda N+i}^\nu = \Gamma_i^{\nu-\lambda} \\ \Gamma_j^\nu = \Phi^{j-1}\,\Gamma_1^\nu = h^\nu Z_{\Psi^{j-1}\chi} \quad (j=2,\cdots N), & (\lambda = 0 \;\pm 1, \pm 2,\cdots, \\ & i=1,\cdots,N) \end{array}\right. \tag{5}$$

et les bijections [2] φ_j^ν:

$$\varphi_j^\nu \;:\; \Gamma_j^\nu \to \Gamma_{j+1}^\nu$$

de la manière suivante. ν étant arbitrairement choisi et Ψ_j^ν étant l'inverse de φ_j^ν, on choisit arbitrairement les bijections

$$\varphi_j^\nu x \in \Gamma_{j+1}^\nu \qquad (j=1,\cdots, m; \quad x \in \Gamma_j^\nu),$$

$$\varphi_j^{\nu+1} x \in \Gamma_{j+1}^{\nu+1} \quad (j=m+1,\cdots, N-1; \quad x \in h\Gamma_j^\nu = \Gamma_j^{\nu+1}).$$

Les autres bijections φ_j^ν on définit par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_N^{\nu+1} x = g\, \Psi_1^\nu \cdots \Psi_m^\nu\, h^{-1}\, \Psi_{m+1}^{\nu+1} \cdots \Psi_{N-1}^{\nu+1} \quad (x \in \Gamma_N^{\nu+1}); \\ \varphi_i^j \quad x = h^{-1}\, \Psi_{i-1}^{j+1} \cdots \Psi_{N-m+i}^{j+1}\, g\, \Psi_{N-m+i+1}^{j+1} \cdots \Psi_{N+i-1}^{j+1}\, x \quad (x \in \Gamma_i^j) \\ \qquad (j \leq \nu; \quad i = m+1,\, m+2,\cdots); \\ \varphi_i^j \;\; x = \Psi_{i+1}^j \cdots \Psi_{i+N-m-1}^j\, g\, \Psi_{i+N-m}^j \cdots \Psi_{i+N-1}^j\, h^{-1}\, x \quad (x \in \Gamma_i^j), \\ \qquad (j \geq \nu+1, \quad i=m,\, m-1,\cdots) \end{array}\right. \tag{6}$$

avec

$$\Psi_{N+i}^{1+j}\, x = \Psi_i^j\, x. \tag{7}$$

On pose

$$f x \overset{\text{déf.}}{=} \varphi_i^j\, x \quad (x \in \Gamma_i^j) \;. \tag{8}$$

La permutation f ainsi définie est une solution de (1) dans $\bigcup_{\Gamma \in S_{\infty,l}} \Gamma = V_{\infty,l}$

En effet, pour $x \in \Gamma_i^j$ $(i \geq 1, j \leq \nu)$ on a, en posant d'abord

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = i+m-1, \quad y = \varphi_{N+\lambda-1}^{j+1} \cdots \varphi_{N+\lambda-m+1}^{j+1}\, x \in \Gamma_\lambda^j \;(j \leq \nu, \lambda \geq m), \\ \qquad x = \Psi_{\lambda+N-m+1}^{j+1} \cdots \Psi_{\lambda+N-1}^{j+1}\, y \in \Gamma_i^j \end{array}\right. \tag{9}$$

d'après (6),

$$\varphi^j_\lambda y = h^{-1} \Psi^{j+1}_{\lambda+1} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m}\, g\, \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m+1} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-1}\, y,$$

d'où, toujours d'après (6),

$$\varphi^j_\lambda \varphi^{j+1}_{\lambda+N-1} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+N-m+1}\, x = h^{-1} \Psi^{j+1}_{\lambda+1} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m}\, g\, x,$$

puis, d'après (7),

$$\varphi^{j+1}_{\lambda+N-m} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+1}\, h\, \varphi^{j+1}_{\lambda+N} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+N-m+1}\, x = g\, x$$

ou, d'après (9) et (7),

$$\varphi^{j+1}_{i+N-1} \cdots \varphi^{j+1}_{i+m}\, h\, \varphi^j_{i+m-1} \cdots \varphi^j_i\, x = g\, x,$$

c'est-à-dire, d'après (8),

$$f^{N-m}\, h f^m\, x = g\, x \qquad (x \in \Gamma^j_i,\ i \geq m,\ j \leq \nu).$$

Pour $x \in \Gamma^j_i$ $(i < 1,\ j \geq \nu)$, en posant

$\lambda = i + m < m + 1$

$y = h\, \varphi^{j+1}_{\lambda+N-1} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+N-m}\, x \in \Gamma^{j+1}_\lambda,$

$x = \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-1}\, h^{-1}\, y \in \Gamma^j_i,$

on a, d'après (6),

$$\varphi^{j+1}_\lambda\, y = \Psi^{j+1}_{\lambda+1} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m-1}\, g\, \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-1}\, h^{-1}\, y,$$

d'où

$$\varphi^{j+1}_\lambda\, h\, \varphi^{j+1}_{\lambda+N-1} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+N-m}\, x = \Psi^{j+1}_{\lambda+1} \cdots \Psi^{j+1}_{\lambda+N-m-1}\, g x,$$

c'est-à-dire

$$\varphi^{j+1}_{\lambda+N-m-1} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+1}\, \varphi^{j+1}_\lambda\, h\, \varphi^{j+1}_{\lambda+N-1} \cdots \varphi^{j+1}_{\lambda+N-m}\, x = g\, x,$$

ou

$$\varphi^{j+1}_{i+N-1} \cdots \varphi^{j+1}_{i+m}\, h\, \varphi^j_{i+m-1} \cdots \varphi^j_i\, x = g\, x,$$

ce qui achève la démonstration.

L'application f définie par (8) *est la solution générale de* (1) *dans* $V_{\infty,\,l}$ *avec*[1] $f \in G^\star_{\infty,\,l}$. Pour le prouver il ne reste qu'à montrer que toute solution $f \in G^\star_{\infty,\,l}$ de (1) dans $V_{\infty,\,l}$ peut être écrite dans la forme (8). En effet, si $f \in G^\star_{\infty,\,l}$ est une solution de (1) dans $V_{\infty,\,l}$ on a

$$f^N \Gamma = h^{-1}\, \Gamma \qquad (\Gamma \in S_{\infty,\,l}).$$

Donc, $f\Gamma$ est une solution de (4) avec $k = \infty$. Par conséquent, d'après un résultat de [6], l'existence d'une partition de $S^\star_{\infty,l}$ de la forme (3), d'une solution $\Psi = \Psi\,\chi$ de l'équation

$$\Psi^N \chi = \chi \qquad (\chi \in S^\star_{\infty,\,l})$$

des éléments Z_χ associés aux cycles $\chi \in S^\star_{\infty,\,l}$ correspondants et des entiers ν attachés aux $\Gamma \in \chi$ correspondants tels que

[1] $G^\star_{k,\,l} = \{f : f \in G_{k,\,l},\ f S_{k,\,l} = S_{k,\,l},\ f\,\Gamma \neq \Gamma\}$, $G_{k,\,l} = \{f : f\, V_{k,\,l} = V_{k,\,l}\}$ $(k, l \in \Lambda)$.

$$\Gamma = h^\nu Z_\chi \quad \text{et} \quad f\Gamma = \begin{cases} h^\nu Z_{\Psi\chi}, & \chi \in P_j^0 \ (j=1,\cdots, N-1), \\ h^{\nu-1} Z_{\Psi\chi}, & \chi \in P_N^0; \end{cases}$$

est assurée. Finalement, en se servant des notations (5), on définit les bijections φ_i^j par les relations

$$\varphi_i^j x = f x \qquad (x \in \Gamma_i^j)$$

on vérifie facilement que les relations (6) sont satisfaites.

3. Solution générale dans le cas $k=1, 2, 3, \cdots$. Réduction à un système d'équations fonctionnelles

Dans le cas où $k = 1, 2, \cdots$, $l \in \Lambda$ on introduit, pour un $\chi \in P_1^i$ donné, les notations Γ_j^μ par les relations

$$\Gamma_1^\nu = h^\nu Z_\chi\,, \quad \Gamma_j^\nu = \Phi^{j-1}\ \Gamma_1^\nu = h^\nu Z_{\Psi^{j-1}\chi} \quad (j=2,\cdots, m_i),$$

$$\Gamma_j^{\nu+k} = \Gamma_j^\nu\,, \quad \Gamma_{\lambda m_i+j}^{\lambda p_i+\nu} = \Gamma_j^\nu \quad (j=1,\cdots, m_i;\ \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\,.$$

Il est claire que l'on a

$$\Gamma_{j+\lambda k m_i}^{\nu+\lambda k} = \Gamma_j^\nu$$

de sorte que le nombre des Γ_j^μ différents, correspondant au $\chi \in P_1^i$ donné, est égal à $M_i = km_i$ et leur ensemble a la forme

$$\Gamma_j^{\nu-\lambda} \quad (\lambda = 0,\cdots, k-1\,;\ j=1,\cdots, m_i).$$

Introduisons les bijections φ_j^μ :

$$\varphi_j^\mu : \Gamma_j^\mu \to \Gamma_{j+1}^\mu \quad (j=1,\cdots, m_i)\,,$$

satisfaisant les relations

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \varphi_{\lambda m^i+j}^{\lambda p+\mu}\ x = \varphi_j^\mu\ x\,, & j=1,\cdots,\ m_i\,,\ \mu \lesseqgtr \nu\,, \\ \varphi_j^{\mu+k}\ x = \varphi_j^\mu\ x & \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

$$\text{(11)} \qquad \varphi_{j+N-1}^{\nu+1} \cdots \varphi_{j+m}^{\nu+1}\, h\ \varphi_{j+m-1}^\nu \cdots \varphi_j^\nu\, x = gx \quad (x \in \Gamma_j^\nu\,,\ j = 1, 2, \cdots)$$
$$\nu = 0, 1, \cdots, k-1\,.$$

Des relations (10) on tire facilement, d'après (2),

$$\text{(12)} \qquad \varphi_{N+j}^{\mu+1}\ x = \varphi_j^\mu\ x\,, \qquad \varphi_{M_i+j}^\mu\ x = \varphi_j^\mu\ x\,.$$

Tenant compte de (10) et (11) on voit sans difficulté que le système infini (11) se réduit à un système de M_i relations distinctes (obtenues en faisant varier j de 1 jusqu'à M_i et en posant, ce qui ne diminue pas la généralité, $\nu = 0$)

$$\text{(13)} \qquad \varphi_{j+N-1}^1 \cdots \varphi_{j+m}^1\, h\, \varphi_{j+m-1}^0 \cdots \varphi_j^0\, x = gx \quad (x \in \Gamma_j^0\,;\ j = 1,\cdots, M_i)$$

contenant les bijections φ_j^ν $(\nu = 0,\cdots, k-1\,;\ j=1,\cdots, m_i)$.

Posons maintenant

(14) $$f x \overset{\text{déf.}}{=\!=} \varphi_j^{\nu}\, x \quad (x \in \Gamma_j^{\nu}\,;\ \nu=0,\cdots,\ k-1\ ;\ j=1,\cdots,\ m_i).$$

La permutation $f: V_{k,l} \to V_{k,l}\ V_{k,l} = \bigcup_{\Gamma \in S_{k,l}} \Gamma$ ainsi définie est une solution de (1) dans $V_{k,l}$. *C'est la solution générale de* (1) *dans* $V_{k,l}$[2]. Il reste à prouver que toute solution f[2] de (1) dans $V_{k,l}$ est de la forme (14). En effet, $f\Gamma$ $(\Gamma \in S_{k,l})$ satisfait à l'équation

$$f^N\Gamma = h^{-1}\,\Gamma \quad (\Gamma \in S_{k,l})$$

et on n'à qu'à poser

$$\varphi_j^{\nu}\, x \overset{\text{déf.}}{=\!=} f x \quad (x \in \Gamma_j^{\nu};\ \nu=0,\cdots,k-1; j=1,\cdots,\ m_i).$$

On vérifie facilement que les φ_j^{ν} ainsi définies satisfont aux identités (10) – (12).

La solution générale $f \in G^{\star}$ *de l'équation* (1) *dans* E *est donnée par* (8) *et* (14).

4. **Applications**

Dans le paragraphe 3 on a vu que la résolution de (1) dans $V_{k,l}$[2] est réduite au problème de résoudre le système (13). Ce fait nous permet, dans certains cas particuliers, de trouver la solution générale des autres équations fonctionnelles.

Considérons le cas particulier de l'équation (1)

$$f h f x = g x$$

avec $N=2$, $m=1$, $m_0=2$, $k_0=1$, $q_0=0$, $p_0=1$, $M_0=2\,k$, $k \in \{1, 2,\cdots\}$.
Le système (13) ici prend la forme

(15) $$\overset{1}{\varphi}_{j+1}\ h\ \overset{0}{\varphi}_j\, x = g\, x \qquad (j=1,\cdots,\ M_0\,;\ x \in \overset{0}{\Gamma}_j)$$

d'où, $\overset{i}{\Psi}_j$ désignant l'inverse de $\overset{i}{\varphi}_j$, on tire

$$\overset{0}{\varphi}_{2j-1} x = h^{-1}\ \overset{1}{\Psi}_{2j}\, g x = (h^{-1} g^{-1})^{j-1} h^{-1}\,\overset{1}{\Psi}_2\, g(hg)^{j-1} x\ ,$$

$$\overset{0}{\Psi}_{2j-1}\ x = g^{-1} (h^{-1} g^{-1})^{j-1}\ \overset{1}{\varphi}_2\, (hg)^{j-1} h x = \overset{1}{\Psi}_{2j+1}\ x\ ,$$

$$\overset{0}{\varphi}_{2j}\, x = h^{-1}\,\overset{1}{\Psi}_{2j+1}\ g x = (h^{-1} g^{-1})^{j}\ \overset{1}{\varphi}_2\, (hg)^{j}\, x\ ,$$

$$\overset{0}{\Psi}_{2j}\, x = (g^{-1} h^{-1})^{j}\ \overset{1}{\Psi}_2\, (gh)^{j} x = \overset{1}{\Psi}_{2(j+1)}\ x$$

$$j=1,\cdots,\ k$$

et particulièrement, pour $j=k$, d'après (12),

$$\overset{0}{\varphi}_{2k}\ x = (h^{-1} g^{-1})^{k}\ \overset{1}{\varphi}_2\ (hg)^{k}\, x = \overset{1}{\varphi}_{M_0+N}\, x = \overset{1}{\varphi}_2\, x\ ,$$

d'où

$$(gh)^{k}\ \overset{1}{\varphi}_2\, x = \overset{1}{\varphi}_2\, (hg)^{k}\, x \qquad (x \in \Gamma_2^{1})\ .$$

---

[2] Avec $f \in G^{\star}{}_{k,l}$. (V.[1]).

Tenant compte de ce que les $\overset{i}{\varphi}_j$ se permutent cycliquement dans (15), on démontre aisément que l'on a aussi

$$(g\,h)^k \overset{i}{\varphi}_j x = \overset{i}{\varphi}_j (h\,g)^k x \qquad (x \in \overset{i}{\Gamma}_j;\ j = 1, 2;\ i = 1, \cdots, k).$$

Puisque

$$f x = \overset{i}{\varphi}_j x \qquad (x \in \overset{i}{\Gamma}_j;\ j = 1, 2;\ i = 1, \cdots, k)\ .$$

est une solution de l'équation[2]

(16) $$f h f x = g x\ , \qquad x \in \bigcup_{j=1,2;\, i=1,\ldots,k} \overset{i}{\Gamma}_j\ ,$$

on voit que l'on a aussi

(17) $$(gh)^k f x = f (hg)^k x\ , \qquad x \in \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,2}} \overset{i}{\Gamma}_j\ ,$$

Inversement, toute solution de (17)[2] donne naissance à $2k$ solutions[2] (en général différentes) de l'équation (16). En effet, soit f une solution de (17)[2]. Introduisons les bijections par les relations:

$$\overset{1}{\varphi}_2 x = f x\ , \quad x \in \overset{1}{\Gamma}_2$$

et les $2k-1$ premières relations (15). À ces dernières on ajoute, d'après l'hypothèse, la relation

(18) $$(g\,h)^k \overset{1}{\varphi}_2 x = \overset{1}{\varphi}_2 (h\,g)^k x, \quad x \in \overset{1}{\Gamma}_2.$$

De (15) on tire

$$\overset{0}{\varphi}_{2k-1} x = (h^{-1}\,g^{-1})^{k-1}\,h^{-1}\overset{1}{\Psi}_2 (g\,h)^{k-1}\, g\,x.$$

d'où

$$\overset{1}{\varphi}_2 (h\,g)\, h^{k-1} x = (g^{-1} h)\ g\, \overset{0}{\Psi}_{2k-1} x = (g\,h)^{k-1}\, g \overset{1}{\Psi}_1 x$$

et

$$\overset{1}{\varphi}_2 x = (g\,h)^{k-1}\, g \overset{1}{\Psi}_1\, h^{-1} (g^{-1}\, h^{-1})^{k-1} x\,.$$

En introduisant $\overset{1}{\varphi}_2$ dans le deuxième membre de (18) on obtient la dernière équation de (15)

$$\overset{1}{\varphi}_1 h \overset{1}{\varphi}_2 x = g\,x$$

ce qui signifie que

$$\overset{1}{f}_2 x \overset{\text{déf.}}{=} \overset{i}{\varphi}_j x \quad (x \in \overset{i}{\Gamma}_j;\ j = 1,\ 2;\ i = 1, \cdots, k)$$

est une solution de (16). Par conséquent, aussi est-elle une solution de (17) égale à $f x$ dans $\overset{1}{\Gamma}_2$,

$$\overset{1}{f}_2 x = f x, \quad x \in \overset{1}{\Gamma}_2.$$

Pour obtenir les autres $2k-1$ solutions de (16) il ne suffit que, dans le procédé suivi ci-dessus, de remplacer $\overset{1}{\varphi}_2$ successivement par

$$\overset{1}{\varphi}_1,\ \overset{2}{\varphi}_1,\ \overset{2}{\varphi}_2, \cdots,\ \overset{k}{\varphi}_1,\ \overset{k}{\varphi}_2$$

et le système des $2k-1$ premières équations de (15) par le système correspondant. Ainsi on a obtenu $2k$ permutation $\overset{i}{f}_j x$ $(j=1, 2;\ i=1, \cdots, k)$ satisfaisant au système d'équations (16) et (17), telles que

$$\overset{i}{f}_j\, x = f x, \qquad x \in \overset{i}{\Gamma}_j .$$

Donc, *les problèmes de résoudre les équations* (16) *et* (17) *sont équivalents*. Autrement dit, la connaissance de toutes les solutions[2] de (16) entraîne celle de toutes les solutions[2] de (17) et inversement. Or, la solution générale de (16) est facile à trouver: on n'a qu'à poser $\varphi x = hfx$, $g^\star x = hgx$, et à la place de l'équation (16) on obtient l'équation $\varphi^2 x = g^\star x$, qu'on sait résoudre [6].

D'une manière analogue on démontre que *les problèmes de résoudre les équations*

$$(19) \qquad fhfx = gx, \qquad x \in \bigcup_{i=1,\ldots,k} \overset{i}{\Gamma}_1,$$

$$f\underbrace{hghg \cdots hg}_{k\ symboles}hfx = \underbrace{ghgh \cdots ghg}_{k\ symboles}x, \qquad x \in \bigcup_{i=1,\ldots,k} \overset{i}{\Gamma}_1$$

dans le cas où $N=2$, $m=1$, $m_1=1$, $k_1=2$, $2p_1=kg_1+1$, $q_1=1$, $M_1=k=2p_1-1$, *sont équivalents*. L'équation (19) peut être résolue d'une manière analogue comme l'équation (16).

RÉFÉRENCES

[1] Bajraktarević, M., *Solution générale de l'équation fonctionnelle* $fNx = gx$. V. l'article précédent du tome présent.

[2] Bourbaki, N., *Théorie des ensembles*, Hermann et *Cie*, éditeurs, Paris (1954), p. 80.

[3] Haidukov, P. I., Оботыскании функций по заданной итерации. Уч. зап. Бурятск. пед. ин., выпс. 15 (1958), 3—28. (Connu seulement d'après ce qu'on dit dans le „Реф. журн. Мат. (1961), 95, 346, p. 69.

[4] Isaacs, R., *Iterates of fractional order*, Canad. J. Math. 2 (1950), 409—416.

[5] Kuczma, M., *On the functional equation* $\varphi^n(x) = g(x)$. Ann. Polon. Math. 11 (1961), 161—175.

[6] Łojasiewicz, S., *Solution générale de l'équation fonctionnelle* $f^N(x) = g(x)$. Ann. Soc. Polon. Math. 24 (1951), 88—91.