PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 115–124.

SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f^N(x)=g(x)$

M. Bajraktarević

(Communiqué le 29 janvier 1965)

Sommaire. — Construction de la solution générale de l'équation fonctionnelle (2) sans faire aucune hypothèse par rapport aux applications f et g, la correspondance biunivoque entre x et leurs transformés de x exceptée. Théorème d'existence.

I. **Introduction**

Dans son article [5] *S. Łojasiewicz* a donné la solution générale de l'équation fonctionnelle

(1) $$f^N(x)=x$$

et de l'équation plus générale

(2) $$f^N(x)=g(x) \; ,$$

où f et g sont deux applications biunivoques de l'ensemble E sur E, E étant un ensemble d'un espace X .

Dans ces conditions la solution générale de (1), d'après [5], peut être obtenue de la manière suivante.

Soit $1=n_0<n_1<\cdots<n_r=N$ la suite complète de diviseurs de N. Décomposons l'ensemble E en sousensembles disjoints

$$E=\bigcup_{i=0}^{r}\{\bigcup_{j=1}^{n_i} M_j^i\}$$

de façon que les ensembles $M_1^i, \cdots, M_{n_i}^i$ soient de la même puissance. Soit $\varphi_j^i(x)$ une application transformant, d'une manière biunivoque, l'ensemble M_j^i en M_{j+1}^i

$$\varphi_j^i(M_j^i)=M_{j+1}^i \; (j=1,\cdots, n_i-1; \quad i=1,\cdots, r) \; .$$

Désignons par $\Psi_j^i(x)$ l'application inverse de $\varphi_j^i(x)$ et posons

$$f(x)=x \qquad \text{lorsque } x\in M_1^0 \; ,$$
$$f(x)=\varphi_j^i(x) \qquad \text{lorsque } x\in M_j^i \; (j=1,\cdots, n_i-1; \quad i=1,\cdots, r),$$
$$f(x)=\Psi_1^i\{\cdots[\Psi_{n_i-1}^i(x)]\cdots\} \text{ lorsque } x\in M_{n_i}^i \quad (i=1,\cdots, r) \; .$$

La fonction $f(x)$ est définie dans l'ensemble E tout entier et elle satisfait à l'équation (1). *Toutes les solutions de* (1) *peuvent être obtenues de cette manière.*

L'équation (2) a été traitée aussi par *R. Isaacs* [2] et *P. I. Haidukov* [1]. Les solutions continues de (2) étaient considérées par *M. Kuczma* [4] et *P. I. Haidukov* [1] sous la condition de la continuité et de la monotonie stricte de $g(x)$. Les cas particuliers de (2) — l'équation (1) et l'équation $\varphi^2(x)=g(x)$ — étaient l'objet de considérations de plusieurs auteurs (pour la bibliographie v. [3].

L'objet de la présente note est de donner la solution générale de l'équation (2) sans aucune restriction par rapport aux applications f et g, la correspondance biunivoque entre x et $f(x)$ respectivement entre x et $g(x)$ exceptée.

II. **Solution générale dans un cas particulier**

Soient E et E' deux ensembles d'un espace X ayant la même puissance et (E, E') soit l'ensemble de toutes les applications biunivoques de E sur E'. Soit $g \in (E, E')$. La n-ième itérée de $g(x)$ ($x \in E$, n entier $\gtreqless 0$), lorsqu'elle existe, elle sera désignée par $g^n(x)$ et définie par les relations

$$g^o(x)=x,\ g^n(x)=g\ [g^{n-1}(x)],\ g^{-n}(x)=g^{-1}\ [g^{-n+1}(x)],\ n=1,2,\cdots.$$

L'ensemble Γ composé de toutes les itérées existantes de $g(x)$ sera appelé cycle de l'application g correspondant à l'élément x. Les cycles d'une application $g \in (E, E')$ peuvent être partagés, en général, en cinq classes disjointes.

La première classe consiste en cycles pour lesquels

(3) $\qquad g^{n+l}(x)=g^n(x)$ ($l>0$ entier fixe plus petit possible; $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) .

L'ensemble

$$E_l=\{x:\ x\in E \text{ avec } (3)\}\subset E\cap E'$$

peut être partagé en l sousensembles disjoints, e_i^l ($i=0,\ 1\cdots,\ l-1$), tels que

$$g(e_i^l)=e_j^l\,(j\equiv i+1\ [\text{mod } l],\quad E_l=\bigcup_{i=0}^{l-1} e_i^l.$$

La deuxième classe consiste en cycles de la forme

$$\cdots,\ g^{-2}(x),\ g^{-1}(x),\ x,\ g(x),\ g^2(x),\cdots.$$

La réunion de ces cycles forme un ensemble, $E_\infty \subset E\cap E'$, qui peut être partagé en sousensembles disjoints e_i^∞ ($i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$) tels que

$$g(e_i^\infty)=e_{i+1}^\infty\ (i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots),\quad E_\infty=\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} e_i^\infty.$$

La troisième classe consiste en cycles de la forme $g^n(x)$ ($n=0,\ 1,\ 2,\cdots$) dont la réunion $E_{+\infty}$ forme un sousensemble de E et peut être partagé en sousensembles $e_i^{+\infty}$ ($i=0,\ 1,\ 2,\cdots$) tels que

$$g(e_i^{+\infty})=e_{i+1}^{+\infty}\ (i=0,\ 1,\ 2,\cdots),\ e_i^{+\infty}\cap e_j^{+\infty}=\emptyset\,(i\neq j),\ E_{+\infty}\setminus e_0^{+\infty}\subset E'.$$

La quatrième classe consiste en cycles de la forme $g^n(x)$ ($n=1, 0, -1, -2,\cdots$) dont la réunion, formant un sousensemble $E_{-\infty}$ de E', peut être partagée en sousensembles disjoints $e_i^{-\infty}$ ($i=1, 0, -1, -2,\cdots$) tels que

$$g(e_i^{-\infty})=e_{i+1}^{-\infty}\ (i=0,-1,-2,\cdots),\ \bigcup_{i=0}^{-\infty} e_i^{-\infty}\subset E\cap E',E'\supset e_1^{-\infty},\ E\cap e_1^{-\infty}=\emptyset.$$

La cinquième classe consiste en cycles de la forme $g^n(x)(n=0, 1, \cdots, k-1; k \geqq 2)$ dont la réunion $E_{(0,k)}$ est composée des ensembles disjoints $e_i^{(0,k)}$, $(i=0, 1, \cdots, k-1)$ tels que

$$g(e_i^{(0,k)}) = e_{i+1}^{(0,k)} \quad (i=0, 1, \cdots, k-2),$$

$$\bigcup_{i=0,\ldots,k-2} e_i^{(0,k)} \subset E, \quad \bigcup_{i=1,\ldots,k-1} e_i^{(0,k)} \subset E', \quad e_0^{(0,k)} \cap E' = \emptyset, \quad e_{k-1}^{(0,k)} \cap E = \emptyset.$$

Évidemment, certaines classes peuvent être vides. *Deux cycles différents sont toujours disjoints.*

En introduisant les notations R, R_λ, Λ, Λ_1, Λ_2, définies par les relations

$$R = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda, \qquad R_\lambda = \{\Gamma: \ \cup \Gamma = E_\lambda\}, \qquad \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 = \{1, 2, 3, \cdots\}, \qquad \Lambda_2 = \{-\infty, +\infty, \infty, (0,2), (0,3), (0,4), \cdots\},$$

on a évidemment

$$E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \setminus \Big(\bigcup_{k=2}^{+\infty} e_{k-1}^{(0,k)} \cup e_1^{-\infty}\Big), \ E' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \setminus \Big(\bigcup_{k=2}^{+\infty} e_0^{(0,k)} \cup e_0^{+\infty}\Big).$$

Définition 1. — *Une application f sera appelée solution de l'équation*

(4) $$f^N(x) = g(x) \qquad \{N > 1 \text{ entier}, \ g \in (E, E')\}$$

si l'on peut trouver deux ensembles $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_0$ de X tels que

(i) *$f(x)$ soit définie pour tout $x \in \mathfrak{T}$,*

(ii) *a)* $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T} \cap E$, *b)* $\mathfrak{T} \cup f(\mathfrak{T}) \subset E \cup E'$,

(iii) $f^N(x) = g(x) \quad (x \in \mathfrak{T}_0)$,

(iv) *l'application de $\mathfrak{T}$ sur $f(\mathfrak{T})$ effectuée par f soit biunivoque.*

Une solution de (4) dans le sens de la définition 1, en général, peut être prolongée ou restreinte. Par exemple, si f est une solution de (4) dans le sens de la déf. 1, l'application

$$\varphi(x) \stackrel{déf.}{=} f(x) \quad \{x \in S = \{f^k(x_0)\}_{k=0}^{N-1}, \quad x_0 \text{ fixe} \in \mathfrak{T}_0\}$$

est encore une solution de (4) dans le sens de la déf. 1 dont les ensembles correspondants $\mathfrak{T}_0$ et $\mathfrak{T}$ sont respectivement $[x_0]$ et S. Inversement, f est un prolongement de φ.

Définition 2. — *Une application f sera appelée solution de* (4) *si elle est une solution de* (4) *dans le sens de la définition* 1 *qui n'est pas prolongeable.*

Remarque 1. — La connaissance de toutes les solutions de (4) dans le sens de la déf. 1 entraîne celle de toutes les solutions de (4) dans le sens de la déf. 2, et inversement.

L'ensemble $\mathbf{\Phi}$ composé de valeurs de toutes les itérées existantes pour un élément x d'une solution f de (4), dans le sens de la déf. 2, sera appelé cycle de la solution f correspondant à l'élément x. Grâce à (iv), *deux cycles différents de f sont toujours disjoints.*

Remarque. 2. — Si f est une solution de (4) dans le sens de la définition 2 et Φ_f l'ensemble de tous ses cycles, alors à tout sousensemble φ de Φ_f correspond une seule solution de (4) dans le sens de la déf. 1 telle que l'ensemble des valeurs de toutes ses itérées est égal à $\cup \Phi \, (\Phi \in \varphi)$, et inversement.

Les cycles Φ d'une solution de (4) peuvent être classifiés en cinq classes, correspondant aux cinq classes de g, ayant la forme:

1. $\{f^k(x)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $f^{k+m}(x)=f^k(x)$ (pour tous les k et pour un $m>0$ fixe);
2. $\{f^k(x)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $f^i(x)\neq f^j(x)$ $(i\neq j)$;
3. $\{f^k(x)\}_{k=\mu}^{+\infty}$, $\mu\leq 0$, $f^i(x)\neq f^j(x)$ $(i\neq j)$;
4. $\{f^k(x)\}_{k=\nu}^{-\infty}$, $\nu\geq 0$, $f^i(x)\neq f^j(x)$ $(i\neq j)$;
5. $\{f^k(x)\}_{k=-\mu}^{\nu}$, $\mu\geq 0$, $N\leq \mu+\nu\leq kN-1$, $f^i(x)\neq f^j(x)$ $(i\neq j)$.

k étant l'entier positif figurant dans l'indice $(0, k)\in\Lambda$ correspondant. On voit facilement que deux cycles Γ et Φ ayant un élément x en commun, appartiennent aux classes correspondantes portant le même numéro.

Soit maintenant Ψ une solution (quelconque) de l'équation

$$\Psi^N(\Gamma)=\Gamma \quad (\Gamma\in R_\lambda, \quad \lambda\in\Lambda \text{ fixe}), \tag{5}$$

obtenue (par la méthode exposée dans le point I) en partant de la partition de R_λ (dans le cas où cette partition est possible ce qui sera supposé dans tout le point II[1])

$$R_\lambda=\bigcup_{i=0}^{s}\{\bigcup_{j=1}^{m_i} P_j^i\}, \tag{6}$$

où, dans le cas où $\lambda=l\in\Lambda_1$, $m_i=N/k_i$ et où $1=k_0<k_1<\cdots<k_s$ est la suite complète de diviseurs de N premiers à l ; soient p_i, q_i, deux entiers tels que

$$p_i\ k_i - q_i\ l = 1\,. \tag{7}$$

Dans le cas où $\lambda\in\Lambda_2$ on doit avoir

$$s=0,\quad p_0=k_0=1,\quad R_\lambda=\bigcup_{j=1}^{N} P_j^0 \quad (\lambda\in\Lambda_2). \tag{8}$$

Associons à tout cycle Γ de g un élément y_Γ de ce cycle. Si $x\in E_\lambda$, il existe un cycle unique $\Gamma\in R_\lambda$ contenant x et on peut écrire $x=g^n(y_\Gamma)$ avec n dépendant de x .

Nous nous proposons de trouver d'abord la solution générale de (4) dans le sens de la déf. 2 (ou 1). On a à distinguer les cas suivants.

a) $\lambda=l\in\Lambda_1$. Posons

$$f_l(x)=\begin{cases} g^n(y_{\Psi(\Gamma)}) \text{ lorsque } \Gamma\in P_j^i \ (j=1,\cdots, m_i-1) \\ g^{n+p_i}(y_{\Psi(\Gamma)}) \text{ lorsque } \Gamma\in P_{m_i}^i\,, \\ i=0,1,\ldots,s; \qquad l=1,2,\cdots\ . \end{cases} \tag{9}$$

À tout Ψ, solution de (5), avec $\lambda=l$ (l fixe), et à tout choix des éléments y_Γ associés aux $\Gamma\in R_l$ correspond ainsi une application f_l, définie par (9) dans E_l avec $f_l(E_l)=E_l$. f_l est une solution de (4) dans E_l dans le sens de la déf. 1;

[1] Dans le point III on donne les conditions dans lesquelles cette partition est possible.

les ensembles $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_0$ correspondants, qu'on désignera ici respectivement par $\mathfrak{T}^l$ et $\mathfrak{T}_0{}^l$, sont donnés par les relations

$$\mathfrak{T}_0{}^l = \mathfrak{T}^l = E_l \, .$$

b) $\lambda = \infty$. Tout ce qu'on a dit dans le cas a) reste valable même dans le cas $\lambda = \infty$ en remplaçant partout l'indice l par ∞ (v. (8)) et les relations (9) par les relations correspondantes

$$\text{(10)} \qquad f_\infty(x) = \begin{cases} g^n\left(y_{\Psi(\Gamma)}\right), & \Gamma \in P_j^0 \ (j = 1, \cdots, N-1), \\ g^{n+1}\left(y_{\Psi(\Gamma)}\right), & \Gamma \in P_N^0 \, . \end{cases}$$

c) $\lambda = +\infty$. Si Ψ est une solution de (5) dans $R_{+\infty}$ (v. (8)) et $\Gamma \in R_{+\infty}$ quelconque, considérons les cycles

$$\text{(11)} \qquad \Gamma, \ \Psi(\Gamma), \cdots, \Psi^{N-1}(\Gamma)$$

et les éléments associés

$$\text{(12)} \qquad y_{\Psi^i(\Gamma)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, N-1) \, .$$

Désignons par $e_{i_j}^{+\infty}$ l'ensemble $e_i^{+\infty}$ qui contient $y_{\Psi^j(\Gamma)}$.

On a $i_j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ $(j = 0, 1, \cdots N-1)$.

Introduisons les notations μ, A et j_1 par les relations

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \mu = \min\limits_{j=0,1,\ldots,N-1} \{i_j\}, & A = \{i_j : i_j = \mu\}, \\ j_1 = \max\limits_{\tau \in T_1} \{\tau\}, & T_1 = \{\tau : 1 \leq \tau \leq N ; \ \Psi^j(\Gamma) \in P_\tau^0 \ (i_j \in A)\} \, . \end{cases}$$

Enfin, soit $x \in \Gamma^\star$ ($\Gamma^\star$ étant un des cycles (11) quelconque) tel que

$$\text{(14)} \qquad x = g^n\left(y_{\Gamma^\star}\right) \quad (n \text{ dépend de } x)$$

avec

$$n \begin{cases} \geq -\mu & (\Gamma^\star \in P_j^0, \ j = 1, \cdots, N), \\ \text{ou} & \\ = -(\mu + 1) & (\Gamma^\star \in P_j^0, \ j > j_1) \, . \end{cases}$$

En désignant l'ensemble des x vérifiant ces conditions par $\widetilde{\Gamma^\star}$, on voit que, par les relations (10) où l'indice ∞ est à remplacer par $+\infty$, $f_{+\infty}$ est bien définie pour tout

$$x \in \mathfrak{T}_0{}^{+\infty} = \mathfrak{T}^{+\infty} \stackrel{df}{=} \bigcup_{\Gamma \in R_{+\infty}} \widetilde{\Gamma} \subset E_{+\infty}$$

avec

$$f_{+\infty}(\mathfrak{T}^{+\infty}) \subset E_{+\infty} \, .$$

L'application $f_{+\infty}$ ainsi définie est une solution de (4) dans le sens de la déf. 1 dans $\mathfrak{T}_0{}^{+\infty}$.

d) $\lambda = -\infty$. Soit Ψ une solution de (5) dans $R_{-\infty}$ et Γ un cycle de $R_{-\infty}$. Considérons les cycles (11) et les éléments (12) qui leurs sont associés. Introduisons les notations $e_{i_j}^{-\infty}$, ν, B et j_2 par les relations

$$(15) \quad \begin{cases} e_{i_j}^{-\infty} = e_i^{-\infty} \text{ lorsque } y_{\Psi^j(\Gamma)} \in e_i^{-\infty}, \ i_j \in \{1, 0, -1, -2, \cdots\} \\ \quad (j = 0, 1, \cdots N-1), \\ \nu = \max\limits_{= 0, 1, \ldots, N-1} \{i_j\}, \qquad B = \{i_j : i_j = \nu\}, \\ j_2 = \min\limits_{\tau \in T_2} \{\tau\}, \qquad T_2 = \{\tau : 1 \leq \tau \leq N, \Psi^j(\Gamma) \in P_\tau^0 \ (i_j \in B)\}. \end{cases}$$

Enfin, soit $x \in \Gamma_*$ un élément de Γ_* (Γ_* étant un des cycles (11) pour lequel on a (14) (où Γ^* est à remplacer par Γ_*) avec

$$n \begin{cases} \leq -\nu & (\Gamma_* \in P_j^0, \quad j = 1, \cdots, N), \\ \text{ou} & \\ = -\nu + 1 & (\Gamma_* \in P_j^0, \quad 1 \leq j < j_2). \end{cases}$$

L'ensemble des $x \in \Gamma_*$ remplissant ces conditions désignons par $\tilde{\Gamma}_* \subset \Gamma_*$. Pour tout $x \in \tilde{\Gamma}_*$, $f_{-\infty}$ est bien définie par (10) où ∞ est à remplacer par $-\infty$. Par conséquent, $f_{-\infty}$ est définie par (10) pour tout $x \in \bigcup\limits_{k=0}^{N-1} \Psi^k(\tilde{\Gamma})$. D'après la mode dont on a formé $\tilde{\Gamma}_*$, on voit facilement que $f_{-\infty}$ est bien définie par (10) même pour tout $x \in \overline{\Gamma}_*$, $\overline{\Gamma}_*$ étant l'ensemble de tous les x pour lesquels on a (14) avec

$$n \begin{cases} \leq -\nu + 1 & (\Gamma_* \in P_j^0, \quad j = 1, \cdots, N), \\ \text{ou} & \\ = -\nu + 2 & (\Gamma_* \in P_j^0, \quad 1 \leq j < j_2 - 1). \end{cases}$$

Ainsi $f_{-\infty}$ est définie pour tout

$$x \in \mathfrak{T}^{-\infty} \overset{df}{=} \bigcup_{\Gamma \in R_{-\infty}} \overline{\Gamma}$$

Pour tout

$$x \in \mathfrak{T}_0^{-\infty} \overset{df}{=} \bigcup_{\Gamma \in R_{-\infty}} \tilde{\Gamma}$$

$f_{-\infty}$ ainsi définie est une solution de (4) dans le sens de la définition 1 et

$$\mathfrak{T}_0^{-\infty} \subset \mathfrak{T}^{-\infty} \subset E_{-\infty}, \quad \mathfrak{T}_0^{-\infty} \subset E, \quad f_{-\infty}(\mathfrak{T}^{-\infty}) \subset E_{-\infty}.$$

e) $\lambda = (0,2)$.[2] Soit $x \in E_{(0,2)}$, Ψ une solution de (5) dans $R_{(0,2)}$ et $\Gamma \in R_{(0,2)}$ quelconque. Considérons les cycles (11) et les éléments associés (12). Introduisons les notations $e_{i_j}^{(0,2)}$ par

$$e_{i_j}^{(0,2)} = e_i^{(0,2)} \text{ lorsque } y_{\Psi^j(\Gamma)} \in e_i^{(0,2)} \quad (i = 0, 1)$$

et les notations μ, A, j_1 respectivement ν, B, j_2 par (13) respectivement par (15) avec $0 \leq \mu \leq \nu \leq 1$. Soit $x \in \Gamma_*$ (Γ_* étant un des cycles (11) quelconque mais fixe)

[2] Dans le cas général où $\lambda = (0,k)$ on procède d'une manière analogue à celle où $\lambda = (0,2)$ convenablement modifiée.

tel que l'on a (14) avec $\mu = \nu = 1$, $n = -1$ ou $\mu = \nu = 0$, $n = 0$, lorsque $\Gamma_* \in P_j^0$ $(1 \leq j \leq N)$

ou

$$\mu = 0,\ \nu = 1 \begin{cases} n = 0 & \text{lorsque } \Gamma_* \in P_j^0 \quad (1 \leq j < j_2), \\ n = -1 & \text{lorsque } \Gamma_* \in P_j^0 \quad (N \geq j > j_1). \end{cases}$$

L'ensemble des $x \in \Gamma_*$ vérifiant ces conditions désignons par $\tilde{\Gamma}_*$. Il est évident que $\tilde{\Gamma}_*$ consiste seulement en un élément. Lorsque $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\Gamma_* \in P_j^0$ $(j_2 \leq j \leq j_1)$, on prendra $\tilde{\Gamma}_* = \emptyset$. L'application $f_{(0,2)}$ est définie par (10) pour tout $x \in \bigcup_{k=0}^{N-1} \Psi'^n(\tilde{\Gamma})$ en y remplaçant l'indice ∞ par (0,2). D'après la mode dont on a formé l'ensemble $\tilde{\Gamma}_*$ on voit facilement que l'application $f_{(0,2)}$ est bien définie par (10) même pour tout $x \in \overline{\Gamma}_*$, $\overline{\Gamma}_*$ étant l'ensemble contenant $\tilde{\Gamma}_*$ comme sa partie et le point x pour lequel on a (14) avec $\mu = \nu = 1$, $n = 0$ ou $\mu = \nu = 0$, $n = 1$ lorsque $\Gamma_* \in P_j^0$ $(j = 1, \cdots, N-1)$, ou

$$\mu = 0,\ \nu = 1 \begin{cases} n = -1 & \text{lorsque } \Gamma_* \in P_j^0 \ (N \geq j > j_1), \\ n = 1 & \text{lorsque } \Gamma_* \in P_j^0 \ (1 \leq j < j_2 - 1), \\ n = 0 & \text{lorsque } j = 1, \cdots, N-1 \text{ et aussi } j = N \text{ si } j_2 > 1. \end{cases}$$

L'application $f_{(0)\,2)}$ est définie par (10) pour tout

$$x \in \mathfrak{T}^{(0,2)} \stackrel{df}{=} \bigcup_{\Gamma \in R_{(0,2)}} \overline{\Gamma}\,.$$

Pour tout

$$x \in \mathfrak{T}_0^{(0,2)} \stackrel{df}{=} \bigcup_{\Gamma \in R_{(0,2)}} \tilde{\Gamma}$$

$f_{(0,2)}$ est une solution de (4) dans le sens de la définition 1 dans $\mathfrak{T}_0^{(0,2)}$ et

$$\mathfrak{T}_0^{(0,2)} \subset \mathfrak{T}^{(0,2)} \subset E_{(0,2)} \qquad \mathfrak{T}_0^{(0,2)} \subset E, \qquad f_{(0,2)}(\mathfrak{T}^{(0,2)}) \subset E_{(0,2)}\,.$$

Par conséquent, à toute solution Ψ de (5) dans R et à tout choix d'éléments y_Γ, associés aux cycles $\Gamma \in R$ de g, correspondent deux ensembles $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_0$, définis par les relations

$$\mathfrak{T} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{T}^\lambda, \qquad \mathfrak{T}_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{T}_\circ^\lambda$$

satisfaisant aux conditions (i) — (iv) de la définition 1. L'application

$$f(x) = f_\lambda(x) \qquad (x \in \mathfrak{T}^\lambda,\ \lambda \in \Lambda)$$

définie dans $\mathfrak{T}$, est une solution de (4) dans $\mathfrak{T}_0$ qui ne peut être prolongée. *C'est la solution générale de* (4) (dans le sens des deux définitions).

Il reste à prouver que toute solution de (4) peut être obtenue de cette manière. Il ne suffit que considérer le cas des solutions dans le sens de la définition 2. (Dans le cas contraire on a, d'abord, à former la solution correspondante dans le sens de la définition 2 par un prolongement.) En effet, f soit une solution de (4). On prendra un élément $x \in \mathfrak{T}_0$ et les cycles Γ et Φ de g et de f contenant x, $\Gamma \in R_\lambda$ pour un $\lambda \in \Lambda$. Alors la relation $f^N(x) = g(x)$ entraîne la relation

$$(16) \qquad f[g^i(x)] = f[f^{Ni}(x)] = f^{Ni}[f(x)] = g^i[f(x)]$$

pour tous les i pour lesquels ces relations conservent un sens. La suite (16) fait partie d'un cycle, $\tilde{f}(\mathrm{r})$, de g de sorte que la relation (16) définit une transformation biunivoque $\tilde{f}(\mathrm{r})$ de R_λ sur R_λ. Puisque $\tilde{f}^N(\Gamma)=\Gamma$, on peut poser $\Psi(\Gamma)=\tilde{f}(\Gamma)$ dans R_λ et la relation (5) est satisfaite dans R_λ. La partition (6) respectivement (8) de R_λ peut être effectuer de la manière suivante. A tout Φ, avec $\Phi \cap \Gamma \neq \emptyset$ pour un $\Gamma \in R_\lambda$, on fait correspondre un élément

$$x = x_\Phi \in \Phi \cap \mathfrak{T}_0 .$$

Supposons $\lambda = l \in \Lambda_1$. Le cycle Γ contenant x_Φ sera un élément de P_1^i (l'indice $i=0, 1, \cdots, s$ (v. (6)) est déterminé par le choix même de x_Φ) et le cycle Γ contenant $f^{k-1}(x_\Phi)$ ($k = m_i\,\rho + \mu$; $m_i = N/k_i$; $\rho = 0, 1, \cdots, k_i l - 1$; $\mu = 1, \cdots, m_i$) sera un élément de P_μ^i. Les ensembles P_j^i, pour lesquels $k_i = N/m_i$ n'est pas premier avec l, sont vides. En effet, supposons $P_j^i \neq \emptyset$ et $x \in \Gamma \cap \Phi$, $\Gamma \in P_j^i$. Il en résulte

$$\tilde{f}^{m_i}(\Gamma) = \Gamma \tag{17}$$

d'où

$$f^{m_i}(x) = g^p(x) \tag{18}$$

et

$$g(x) = f^N(x) = f^{k_i m_i}(x) = g^p\{g^p[\cdots[g^p(x)]\cdots]\} = g^{k_i p}(x)$$

c'est-à-dire,

$$x = g^{k_i p - 1}(x)$$

et alors l est un diviseur de $k_i p - 1$; les nombres l et k_i sont premiers entre eux.

Nous faisons correspondre à tout cycle $\Gamma_1^i \in P_1^i$ ($i=0, 1, \cdots$, s) un élément $y_{\Gamma_1^i} \in \Gamma_1^i \cap \mathfrak{T}_0$ et nous posons $y_{\Gamma_j^i} = f^{j-1}(y_{\Gamma_1^i})$ pour $\Gamma_j^i = \tilde{f}^{j-1}(\Gamma_1^i) \in P_j^i, j = 2, \ldots, m_i$.

Enfin, calculons p_i à l'aide de (18) et vérifions les relations (9) (respectivement les relations (10) où l'indice ∞ est à remplacer par l'indice correspondant λ lorsque $\lambda \in \Lambda_2$), en nous appuyant sur les relations (18) et (17) lorsque $\Gamma \in P_{m_i}^i$ ($m_i = N$ lorsque $\lambda \in \Lambda_2$).

III. **Théorème d'existence**

Théorème. — *Pour qu'il existe une solution de l'équation* (4) (dans le sens de la définition 2), *il faut et il suffit que l'ensemble* R_λ ($\lambda \in \Lambda$) *soit infini ou que, dans le cas contraire, le nombre* L_λ *d'éléments de* R_λ *soit divisible par* N/k_s, k_s *étant défini par* (6) *pour* $\lambda \in \Lambda_1$ *et par* (8) *pour* $\lambda \in \Lambda_2$.

Démonstration. — D'après ce qu'on a dit dans les points précédents, l'existence d'une solution de l'équation (4) est équivalente à celle de la partition (6) ou (8). Cette partition est toujours possible lorsque R_λ est infini. Dans le cas contraire, la condition nécessaire et suffisante pour que cette partition soit possible est l'existence des entiers positifs $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_s$ tels que l'on a

$$L_\lambda = \sum_{i=0}^{s} \frac{N}{k_i}\,\xi_i . \tag{19}$$

---

[3] Lorsque $\lambda \in \Lambda_2$, $N/m_i = 1$ et les P_j^i ($i > 0$) sont vides.

Mais, cette dernière relation est équivalente à la divisibilité de L_λ par N/k_s. En effet, les diviseur $k_0, \cdots, k_s$ sont les produits possibles des diviseurs premiers de N qui ne sont pas diviseurs de $l \cdot k_s$, étant égal au produit de tous ces diviseurs, est divisible par $k_0, \cdots, k_{s-1}$. La condition (19) peut être écrite dans la forme

$$\frac{L\lambda}{N/k_s} = \frac{k_s}{k_0}\,\xi_0 + \cdots + \frac{k_s}{k_{s-1}}\,\xi_{s-1} + \xi_s\,,$$

où le deuxième membre est un entier positif. Si $L\lambda$ est divisible par N/k_s, on pourra prendre $\xi_0 = \cdots = \xi_{s-1} = 0$, $\xi_s = L\lambda \cdot \frac{k_s}{N}$. La condition est donc suffisante. Inversement, lorsque les $\xi_0, \cdots, \xi_s$ existent tels que (19) soit vérifiée, $L\lambda$ est divisible par N/k_s. La condition est donc nécessaire.

IV. **Solution générale dans le cas général**

Définition 3. — *Une application f sera appelée solution de l'équation* (4) *si l'on peut trouver deux ensembles $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_0$ de X tels que les conditions* (i), (ii) a), (III) *et* (iv) *soient remplies.*

En général, une solution de (4) dans le sens de cette définition peut être prolongée ou restreinte.

Définition 4. — *Une application f sera appelée solution de* (4) *si elle est une solution de* (4) *dans le sens de la définition* 3 *qui n'est pas prolongeable.*

Soient E_* et E'_* deux ensemble de X de la même puissance tels que

$$E_* \cap E = \emptyset\,, \qquad E'_* \cap E' = \emptyset$$

et g_* une application biunivoque de E_* sur E'_*. Introduisons l'application G par les relations

$$G(x) = \begin{cases} g\ (x) & (x \in E), \\ g_*(x) & (x \in E_*) \end{cases}$$

et considérons l'équation fonctionnelle[4]

$$F^N(x) = G(x)\,. \tag{20}$$

Soit F une solution (quelconque) dans le sens de la définition 2 de cette équation et $\overline{\mathfrak{T}}$, $\overline{\mathfrak{T}}_0$ les ensembles $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_0$ qui lui correspondent d'après cette définition, c'est-à-dire, soit

$$F^N(x) = G(x) \qquad (x \in \overline{\mathfrak{T}}_0). \tag{21}$$

En remplaçant $\mathfrak{T}_0$ par $\overline{\mathfrak{T}}_0 = \overline{\mathfrak{T}}_0 \cap E$, l'équation (21) devient

$$F^N(x) = g(x) \qquad (x \in \mathfrak{T}_0)$$

ce qui montre que F est une solution de (4) dans $\mathfrak{T}_0$ dans le sens de la définition 4. *C'est la solution générale de* (4) (dans le sens de la définition 4).[5] En effet,

[4] Il est évident que (20) a la forme (4) où g, E, E' sont remplacés respectivement par G, EUE_*, $E'UE'_*$.

[5] Et aussi dans le sens de la définition 3, puisque la connaissance de toutes les solutions de (4) dans le sens de la définition 4 entraîne celle de toutes les solutions dans le sens de la définition 3, et inversement.

toute solution f de (4) dans le sens de la définition 4 peut être obtenue de cette manière puisque, f étant donnée, on peut toujours déterminer les ensembles E_* et E'_* et l'application g_* formés exclusivement par les valeurs de toutes les itérées de f qui ne sont pas contenues dans EUE' de sorte que f représente une solution de (21) dans le sens de la définition 2.

RÉFÉRENCES

[1] П. И. Хайдуков, *Об отыскании функций по заданной итерации.* Уч. зап. Бурятск. пед. ин., вып. 15 (1958) 3—28.

[2] R. Isaacs, *Iterates of fractional order,* Canad. J. Math. 2 (1950) 409—416.

[3] M. Kuczma, *A survey of the theory of functional equations.* Beograd, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Ser. mat. fiz., No 130 (1964).

[4] M. Kuczma, *On the functional equation* $\varphi^n(x) = g(x)$. Ann. Polon. Math. 11 (1961), 161—175.

[5] S. Łojasiewicz, *Solution générale de l'équation fonctionnelle* $f^n(x) = g(x)$. Ann. Soc. Polon. Math. 24 (1951), 88—91.