PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 99–114.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ПЛОСКОМ ОБТЕКАНИИ КОНТУРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Владан Д. Джорджевич

(Саопштено 9 децембра 1964)

Для определения полей скорости и температуры в случае нестационарного, плоского течения несжимаемой жидкости в пограничном слое, исходяг [1] от следующих уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{gc_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{3}$$

причем x — представляет координату измеряемую вдоль контура обтекаемого жидкостью тела,

y — перпендикулярное отстояние от поверхности тела,

t — время,

u и v — составляющие скорости в x и y направлениях,

T — температуру,

$U=U(x,t)$ — распределение скорости потенциального течения,

$a=\dfrac{\lambda}{\rho g c_p}$ — коэффициент температуропроводности,

g — ускорение тяжести земли и

λ, ρ, c_p и ν — обычные обозначения для известных физических характеристик жидкости, которые будем считать постоянными.

Из уравнений (1), (2) и (3) нетрудно заметить что распределение ско ростей независимо от температурного поля, тогда как температурное поле, определяемое из уравнения (3), зависит от распределения скоростей. Так как для определения нестационарного скоростного пограничного слоя еще не существует точный и достаточно общий метод, то используется приближенный способ решения [1] обоснованый на явлении постепенного нарастания пограничного слоя в случае приведения тела в движение из состояния покоя.

В результате применения этого метода решение для поля скоростей получается в виде суммы отдельных приближений [1]:

$$u = u_1 + u_2 + \ldots$$

$$v = v_1 + v_2 + \ldots$$

В этой работе показан аналогичный метод для определения температурного поля из уравнения (3) и определены первые два приближения.

Непосредствено после возникновения движения из состояния покоя, при граничных условиях для температурного поля, которые установим позже, температурный пограничный слой, также как и скоростной [1], будет весьма тонок. Поэтому в уравнении (3) наряду с членом $\frac{\partial T}{\partial t}$ характеризующим нестационарность температурного поля, самыми большими будут члены $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ порядка $\frac{1}{\delta_T^2}$, и $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ порядка $\frac{1}{\delta_Д^2}$, где δ_T и $\delta_Д$ — соетветственно толщина температурного и скоростного пограничных слоев. Конвективными членами $u\frac{\partial T}{\partial x}$ и $v\frac{\partial T}{\partial y}$, которые порядка единици, можно в первом приближении пренебречь.

Таким образом, для определения первого приближения температурного поля (T_1) будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = \frac{\nu}{gc_p}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \tag{4}$$

Если для определения второго приближения (T_2) положим в уравнении (3) что $T = T_1 + T_2$, $u = u_1 + u_2$ и $v = v_1 + v_2$ то тогда, учитывая уравнение (4), получим:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{2\nu}{gc_p}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y} - u_1\frac{\partial T_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial T_1}{\partial y} \tag{5}$$

Граничные условия для температурного поля установим следующим образом. Пусть в начальном мгновении времени везде в жидкости имеем постоянную температуру T_∞, которая потом, в течение движения, задерживается в бесконечности. Пусть на теле будет:

$$\text{для } y = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

в задаче о термометре и

$$\text{для } y = 0 \quad T = T_w = \text{const}.$$

в задаче об охлаждении.

Если предположим что уже первое приближение точно удовлетворяет этим условиям, то тогда граничные условия для второго приближения будут:

$$\text{для } \quad y = 0 \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \quad \text{и для } y = \infty \quad T_2 = 0 \tag{6}$$

в задаче о термометре и

(7) $\quad$ для $y=0 \quad T_2=0$ и для $y=\infty \quad T_2=0$

в задаче об охлаждении.

В дальнейшем ограничимся только простейшим случаем нестационарного течения, т.е. рассмотрим только течение при внезапном возникновении движения (движение „рывком"), у которого можно считать что [1]: $U(x, t) = U(x)$. При этом остановимся на частном случае продольного обтекания плоской бесконечной пластинки. Учитывая что в этом случае можно достаточно точно считать течение „слоистым" [1], т.е. что составляющая скорости в направлении нормали к пластинке равна нулю ($v \equiv 0$) и что температурное поле независимо от координаты x $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \equiv 0\right)$, мы увидим что в уравнении (3) конвективные члени исчезнут и первое приближние (4) станет точниым решением. Скорость потенциального течения в этом случае будет: $U(x) = U\infty = \text{const}$, а решение для скоростного поля [1]: $u_1 = U\infty f_1(\eta)$, где:

где
$$f_1(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\alpha^2} d\alpha \equiv erf\,\eta$$

При этом $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ — безразмерная переменная, введением которой рассматриваемая задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

I Обтекание пластинки

1) *Задача о термометре*

Решим сперва задачу о термометре. Пусть решением задачи будет температура $T_{11}(y, t)$. Для ее определения используем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial y^2} = \frac{\nu}{gc_p}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{t}\frac{U_\infty^2}{4\,gc_p} f_1'^2(\eta)$$

с граничными условиями:

$$\text{для } y=0 \ \frac{\partial T_{11}}{\partial y} = 0 \ \text{ и дла } y=\infty \ \ T_{11} = T_\infty$$

В это уравнение введем вместо зависимой переменной T_{11} новую неизвестную функцию $M_1(\eta)$ при помощи следующего выражения:

$$T_{11} = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{gc_p} M_1(\eta) \tag{8}$$

и таким образом получим для ее определения обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$M_1'' + 2P\eta M_1' = -Pf_1'^2(\eta) \tag{9}$$

с граничными условиями:

$$M_1'(0)=0, \quad M_1(\infty)=0$$

Так как в уравнение (9) входит как параметр число Прандтля $P=\frac{\nu}{a}$, то поэтому решение уравнения получается в виде: $M_1=M_1(\eta;\, P)$. К этому решению можно прийти способом вариящии постоянных, причем общее решение однородной части уравнения легко получить в следующем виде:

$$M_{1h}=C_1\int_0^{\eta}[f_1'(\xi)]^P d\xi+C_2$$

Предполагая что постоянные C_1 и C_2 — функции переменой η, можно удовлетворить уравнение (9) если положить:

$$C_1'\int_0^{\eta}[f_1'(\xi)]^P d\xi+C_2'=0$$

и:

$$C_1'=-P\,[f_1'(\eta)]^{2-P}$$

Определяя из последных двух уравнений функции $C_1(\eta)$ и $C_2(\eta)$, после некоторой упорядоченности, получим окончательно решение уравнения (9):

$$M_1(\eta;P)=P\int_{\eta}^{\infty}[f_1'(\xi)]^P\cdot\left(\int_0^{\xi}[f_1'(\tau)]^{2-P}d\tau\right)\cdot d\xi \tag{10}$$

В случае когда $P=1$ решение (10) сводится к очень простой форме:

$$M_1(\eta;\,1)=\frac{1}{2}[1-f_1^2(\eta)]$$

из которой видно, что, как и в случае стационарного течения [2] при $P=1$, температурное поле непосредственно выражается при помощи скоростного поля.

Обозначим через $m_1(P)$ значение функции $M_1(\eta;P)$ на пластинке $(\eta=0)$. Тогда из выражения (8) следует так называемая собственная температура пластинки:

$$T_{1e}=T_{\infty}+\frac{U_{\infty}^2}{gc_p}m_1(P) \tag{11}$$

при помощи которой решение задачи о термометре можно окончательно написать в следуящей безразмерной форме:

$$\frac{T_{11}-T_{\infty}}{T_{1e}-T_{\infty}}=\frac{M_1(\eta;P)}{m_1(P)} \tag{12}$$

Так как для расчета теплового потока в задаче об охлаждении будет позже неопходимо полное определение величини $m_1(P)$, то поэтому остановимся подробнее на этом вопросе.

2) *Определение величини* $m_1(P)$

На выражения (10) можно получить что:

$$m_1(P) = P\int_0^\infty [f_1'(\xi)]^P \cdot \left(\int_0^\xi [f_1'(\tau)]^{2-P} d\tau\right) \cdot d\xi \tag{13}$$

Учитывая что $f_1'(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$, можно после некоторых преобразований из (13) получить:

$$m_1(P) = \frac{4}{\pi\alpha}\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot \left(\int_0^{\alpha y} e^{-x^2}\, dx\right) \cdot dy \tag{14}$$

где: $\alpha = \sqrt{\frac{2-P}{P}}$ и $P < 2$.

Пользуясь формулой Мак-Лорена [3]

$$\int_0^{\alpha y} e^{-x^2}\, dx = \alpha y - \frac{(\alpha y)^3}{1\,!\,3} + \frac{(\alpha y)^5}{2\,!\,5} - \ldots . (-1)^{n-1}\frac{(\alpha y)^{2n-1}}{(n-1)\,!\,(2n-1)} +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{n\,!}\int_0^{\alpha y} e^{-\vartheta x^2} x^{2n}\, dx, \quad 0 < \vartheta < 1$$

и принимая во внимание что [3]:

$$\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2n+1}\, dy = \frac{n\,!}{2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

после интегрирования (14) получим:

$$m_1(P) = \frac{4}{\pi\alpha}\left[\frac{\alpha}{2\cdot 1} - \frac{\alpha^3}{2\cdot 5} + \ldots \ldots (-1)^{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{2(2n-1)} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1}{n\,!}\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot \left(\int_0^{\alpha y} e^{-\vartheta x^2} x^{2n}\, dx\right) \cdot dy\right], 0 < \vartheta < 1$$

Проведем оценку последнего члена только что полученного выражения.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n\,!}\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot \left(\int_0^{\alpha y} e_{-}^{\vartheta x^2} x^{2n}\, dx\right) \cdot dy\right| \leqslant \frac{1}{n\,!}\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot \left|\int_0^{\alpha y} e^{-\vartheta x^2} x^{2n}\, dx\right| \cdot dy <$$

$$< \frac{1}{n\,!}\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot \left(\int_0^{\alpha y} x^{2n}\, dx\right) \cdot dy = \frac{\alpha^{2n+1}}{2(2n+1)}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{2(2n+1)}=0$ если $|\alpha|\leqslant 1$,т о $m_1(P)$ можно представить в виде ряда:

(15) $$m_1(P)=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\alpha^4}{5}-\ \ldots\ldots\ (-1)^{n-1}\frac{\alpha^{2n-2}}{2n-1}+\ \ldots\ldots\right)$$

котрий сходится при всех $|\alpha|\leqslant 1$, то есть при всех $P\geqslant 1$.

Ряд (15) представляет развитие в ряд Мак-Лорена функции: $\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}$ и поэтому, при всех $P<2$, будет:

(16) $$m_1(P)=\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-P}{P}}}{\sqrt{\frac{2-P}{P}}}$$

В случае $P>2$ можно выражение (14) представить в виде:

(17) $$m_1(P)=\frac{4}{\pi\beta}\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\cdot\left(\int\limits_0^{\beta y}e^{x^2}\,dx\right)\cdot dy$$

в котором: $\beta=\sqrt{\frac{P-2}{P}}$ и $P>2$. Таким же образом как и в случае когда $P<2$, получается следующее развитие в ряд выражения (17):

(18) $$m_1(P)=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{\beta^2}{3}+\frac{\beta^4}{5}+\ \ldots\ldots\ +\frac{\beta^{2n-2}}{2n-1}+\ \ldots\ldots\right)$$

Этот ряд, сходящийся при $|\beta|\leqslant 1$, то есть при всех $P>2$, представляет развитие в ряд Мак-Лорена функции: $\frac{1}{\pi\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$. Поэтому, при всех $P>2$, будет:

(19) $$m_1(P)=\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{P-2}{P}}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{P-2}{P}}}{1-\sqrt{\frac{P-2}{P}}}$$

При $P=2$ выражения (16) и (19) неопределеннние. Однако, если потребуются их предельные величины для $P\to 2$, то оба дадут одно и то же значение: $m_1(2)=\frac{2}{\pi}$.

Легко заметить что $\beta=i\alpha$. Если учесть известную формулу (4) теории функций комплексного переменого:

$$\operatorname{arctg} z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

то тогда можно выражения (16) и (19) объединить в одно, действительное для всех P. Окончательно будем иметь:

(20) $$m_1(P) = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\gamma}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2-P}{P}} \text{ при всех } P$$

3) *Задача об охлаждении*

Решим теперь задачу об охлаждении. Пусть решением задачи будет температура T_{12} (y, t). Для ее определения воспользуемся дифференциальным уравнением:

(21) $$\frac{\partial T_{12}}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial y^2} = \frac{1}{t}\frac{U_\infty^2}{4gc_p} f_1'^2(\eta)$$

с граничными условиями:

для $y=0$ $T_{12}=T_w$ и для $y=\infty$ $T_{12}=T_\infty$

Так как уравнение (21) линейное, его решение будем искать в виде следующей суммы решения задачи о термометре и новой неизвестной функции $N_1(\eta; P)$:

(22) $$T_{12} = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{gc_p} M_1(\eta; P) + [(T_w - T_\infty) - (T_{1e} - T_\infty)]\, N_1(\eta; P)$$

причем для функции $N_1(\eta; P)$ будем иметь однородное дифференциальное уравнение:

(23) $$N_1'' + 2P\eta N_1' = 0$$

с граничными условиями:

$$N_1(0; P) = 1. \quad N_1(\infty; P) = 0$$

Его решением будет:

(24) $$N_1(\eta; P) = \frac{\int_\eta^\infty [f_1'(\xi)]^P \, d\xi}{\int_0^\infty [f_1'(\xi)]^P \, d\xi}$$

которое в частном случае для $P=1$, подобно как и в задаче о термометре, получает вид:

$$N_1(\eta; 1) = 1 - f_1(\eta)$$

Нужно отметить что функция N_1 $(\eta; P)$ в выражении вида:

(25) $$T_{12} = T_\infty + (T_w - T_\infty)\, N_1(\eta; P)$$

представляет решение задачи об охлаждении для случая когда пренебрегается тепло возникающее в пограничном слое вследствие трения, то есть когда полагается что правая сторона уравнения (21) равна нулю. В выражении (22) однако, она является решением задачи об охлаждении в самом общем случае течения.

Для вычисления количества тепла переходящего от пластинки к жидкости и наоборот, будет необходим градиент температуры на пластинке. Так как $M_1'(0; P) = 0$, выражение (22) даст:

$$-\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0} = (\Delta T)_0 \left[1 - \theta \cdot m_1(P)\right] \left(-\frac{dN_1}{d\eta}\right)_{\eta=0} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$$

Здесь положенно $T_w - T_\infty = (\Delta T)_0$ и $\dfrac{U_\infty^2}{g\, c_p (\Delta T)_0} = \theta$, где θ — так называемый температурный критерий.

Так как из выражения (24) следует что:

$$\left(-\frac{dN_1}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \frac{[f_1'(0)]}{\int\limits_0^\infty [f_1'(\xi)]^P d\xi} = 2\sqrt{\frac{P}{\pi}}$$

то окончательно будет:

$$-\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0} = (\Delta T)_0 \left[1 - \theta \cdot m_1(P)\right] \sqrt{\frac{P}{\pi\nu}}\, t^{-\frac{1}{2}} \tag{26}$$

Легко заметить, что касается направления перехода тепла, что могут наступить три характерных случая.

а) Если $T_w < T_\infty$ будет $(\Delta T)_0 < 0$ и $\theta < 0$. Из выражения (26) следует что тогда градиент температуры на пластинке положительный, а это значит что пластинка, несмотря на другие условия течения, будет всегда нагреваться.

б) Если $T_w = T_\infty$ будет $(\Delta T)_0 = 0$ и выражение (26) переходит в:

$$-\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{U_\infty^2}{g\, c_p} m_1(P) \sqrt{\frac{P}{\pi\nu}}\, t^{-\frac{1}{2}} \tag{27}$$

откуда видно что, также как и в случае а), пластинка будет всегда нагреваться.

Если теперь пренебрежем теплом возникающим в пограничном слое вследствие трения, то тогда из выражения (25) видно, что градиент температуры на пластинке будет равен нулю и она не будет ни нагреваться, ни охлаждаться. Потому, в случае когда $T_w = T_\infty$, причиной нагревания пластинки является именно возникновение тепла вследствие трения. Это тепло, в случае когда $T_w > T_\infty$, будет играть еще боллее значительную роль.

в) Если $T_w > T_\infty$ будет $(\Delta T)_0 > 0$ и $\theta > 0$. Из выражения (26) видно что тогда направление перехода тепла в каждом конкретном случае зависит от величины произведения $\theta \cdot m_1(P)$. Если $\theta \cdot m_1(P) < 1$, то тогда будет $\left(\dfrac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$, что значит что пластинка охлаждается. Если $\theta \cdot m_1(P) = 1$ будет $\left(\dfrac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ и тогда характер распределения температуры отвечает распределению в задаче о термометре. Если же $\theta \cdot m_1(P) > 1$ то тогда будет $\left(\dfrac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0} > 0$. В этом случае пластинка нагревается несмотря на то что $T_w > T_\infty$. Кроме этого следует заметить что из-за $\theta \cdot m_1(P) > 1$, при определенной разности температур $(\Delta T)_0$, скорость обтекания U_∞ относительно велика, а этим самым и количество тепла выделяющееся вследствие трения в пограничном слое. Это тепло в состоянии нарушить процесс охлаждения пластински, нормально наступающий при $T_w > T_\infty$.

Только что описанное явление известно и в теории стационарного течения [2].

Теперь вычислим ту минимальную разность температур $T_w - T_\infty$ обеспечивающую при определенных условиях течения охлаждение пластинки.

Пусть пластинку обтекает воздух со скоростью $U_\infty = 200 \frac{m}{s}$. Для воздуха, в весьма широких пределах изменения температуры, $P = 0{,}7$ и $c_p = 0{,}24 \frac{k\,\mathrm{cal}}{kp°C}$.

Из выражения (20) следует что $m_1(0{,}7) = 0{,}435$, а из условия $\theta \cdot m_1(P) < 1$ получим:

$$T_w - T_\infty > 17{,}2°$$

Этот результат хорошо совпадает с соответствующим результатом полученым в случае стационарного движения [2] при тех же условиях течения. Это и надо было ожидать, так как в случае нестационарного движения происходящего „рывком“, стационарное состояние устанавливается весьма быстро.

Поток тепла от пластинки к жидкости, согласно закону фурье, будет:

$$q(t) = -\lambda \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Совокупное количество тепла переходящее в течение времени τ с единици поверхности пластинки к жидкости будет:

$$Q = \int_0^\tau q(t)\, dt$$

откуда следует:

$$Q = 2\lambda \sqrt{\frac{P}{\pi\nu}} (\Delta T)_0 \left[1 - \theta \cdot m_1(P)\right] \tau^{\frac{1}{2}}$$

Чтобы получить решение первого приближения в самом общем случае движения, т.е. в случае плоского обтекания тела произвольной форми, надо только во всех результатах, которие получаются в случае обтекания пластинки, вместо постоянной скорости U_∞ положить переменную скорость обтекания произвольного контура: $U(x)$.

Из-за очень сложных выражений для первого приближения задачи о термометре и задачи об охлаждении в случае произвольных чисел Прандтля $P = \frac{\nu}{a}$, при определении второго приближения остановимся только на числе $P = 1$, имеющее самое большое практическое значение. В этом случае решение первого приближения сводится к очень простому виду.

Пусть решением первого приближения задачи о термометре будет температура $T_{11}(x, y, t)$. Тогда, в случае $P=1$, получим (8):

$$T_{11}=T_{\infty}+\frac{U^2(x)}{g\,c_p}M_1(\eta) \tag{28}$$

где: $M_1(\eta)=\frac{1}{2}(1-erf^2\eta)$. Собственная температура тела будет:

$$T_{1e}=T_{\infty}+\frac{U^2(x)}{gc_p}m_1 \tag{29}$$

где: $m_1\equiv M_1(0)=\frac{1}{2}$

Если решение первого приближения задачи об охлаждении обозначим через $T_{12}(x, y, t)$, то тогда получим (22):

$$T_{12}=T_{11}+\overline{T}_1 \tag{30}$$

$$\text{где: } \overline{T}_1=[(T_w-T_{\infty})-(T_{1e}-T_{\infty})]\;N_1(\eta) \tag{31}$$

и: $$N_1(\eta)=1-erf(\eta)$$

Теперь можем перейти к определению второго приближения.

II Второе приближение

1) *Задача о термометре*

Если решение второго приближения задачи о термометре обозначим с $T_{21}(x, y, t)$, то тогда уравнение для определения этой температуры получит следующий вид:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T_{21}}{\partial y^2}=\frac{2\nu}{gc_p}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}-u_1\frac{\partial T_{11}}{\partial x}-v_1\frac{\partial T_{11}}{\partial y} \tag{32}$$

с граничными условиями:

$$\text{для } y=0\;\frac{\partial T_{21}}{\partial y}=0 \text{ и для } y=\infty \quad T_{21}=0$$

Принимая во внимание выражения для составляющих скоростей u_1, v_1 и u_2 [1] и выражение (28) для температуры T_{11} из (32) следует:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T_{21}}{\partial y^2}=\frac{U^2U'}{gc_p}[erf^3\eta+\mathrm{E}(\eta)\,erf\,\eta+F(\eta)] \tag{33}$$

где:

$$E(\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\eta^2-\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right]e^{-2\eta^2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]e^{-\eta^2}-1$$

и:

$$F(\eta)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)\eta\,e^{-3\eta^2}+\frac{1}{\pi}\left[2\left(1+\frac{4}{3\pi}-\sqrt{\pi}\right)\eta^2+\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta+\right.$$

$$+\left(1+\frac{4}{3\pi}+\sqrt{\pi}\right)\Big]e^{-2\eta^2}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\eta\, e^{-\eta^2}$$

Если решение уравнения (33) предположим в форме:

$$T_{21}=t\,\frac{U^2(x)\,U'(x)}{gc_p}\,M_2(\eta) \tag{34}$$

то тогда для определения функции $M_2(\eta)$ получим следующее обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$M_2''+2\eta M_2'-4M_2=-4\left[erf^3\eta+E(\eta)\,erf\,\eta+F(\eta)\right] \tag{35}$$

с граничными условиями:

$$M_2'(0)=M_2(\infty)=0$$

Общим решением однородной части этого уравнения, часто встречающимся в теории нестационарного скоростного пограничного слоя, будет [1]:

$$M_{2h}=C_1(1+2\eta^2)+C_2\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+2\eta^2)\,erf\,\eta+\eta\,e^{-\eta^2}\right]$$

Если частное решение уравнения (35) предположим в виде:

$$M_{2p}=X(\eta)\,erf^3\eta+Y(\eta)\,erf^2\eta+Z(\eta)\,erf\,\eta+G(\eta)$$

то тогда для определения неизвестных функций $X(\eta)$, $Y(\eta)$, $Z(\eta)$, и $G(\eta)$ получим следующую систему уравнений:

$$X''+2\eta X'-4X\equiv A[X]=-4$$

$$A[Y]=-\frac{12}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\cdot X'$$

$$A[Z]=-4E(\eta)-\frac{24}{\pi}e^{-2\eta^2}\cdot X-\frac{8}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\cdot X'$$

$$A[G]=-4F(\eta)-\frac{8}{\pi}e^{-2\eta^2}\cdot Y-\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\cdot Z'$$

В этой работе не будем останавливаться на подробном изложении способа решения полученной системы уравнений, а только напомним что решение системы можно получить в замкнутом виде*.

Из выражений:

$$M_2'(0)\equiv M_{2h}'(0)+M_{2p}'(0)=0$$

$$M_2(\infty)\equiv M_{2h}(\infty)+M_{2p}(\infty)=0$$

можно теперь определить постоянние C_1 и C_2.

---

[1] Более подробно об этом было изложено автором в его магистерской дисертации принятой на Природно-Математическом Белградском факультете 28 июня 1963 года.

Для того чтобы найти второе приближение собственной температуры тела неопходимо иметь следующее значение функции $M_2(\eta)$ для $\eta = 0$:

$$M_2(0) \equiv m_2 \approx 0{,}1$$

Таким образом, если остановимся на первых двух приближениях, температура задачи о термометре и собственная температура тела соответственно будут:

$$T = T_{11} + T_{21} = T\infty + \frac{U^2(x)}{gc_p}[M_1(\eta) + tU'(x)M_2(\eta)] \tag{36}$$

$$T_e \equiv T_{1e} + T_{2e} = T\infty + \frac{U^2(x)}{gc_p}[m_1 + t\,U'(x)\,m_2] \tag{37}$$

2) *Задача об охлаждении*

Пусть решением второго приближения задачи об охлаждении будет неизвестная температура $T_{22}(x, y, t)$. Для ее определения имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial y^2} = \frac{2\nu}{g\,c_p}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y} - u_1\frac{\partial T_{12}}{\partial x} - v_1\frac{\partial T_{12}}{\partial y} \tag{38}$$

с граничными условиями:

$$\text{для } y = 0 \quad T_{22} = 0 \quad \text{и для } y = \infty \quad T_{22} = 0$$

Если в этом уравнении положить что: $T_{12} = T_{11} + \overline{T}_1$ то тогда и решение уравнения (38) надо предположить в форме:

$$T_{22} = T_{21} + \overline{T}_2 \tag{39}$$

Уравнение для температуры $\overline{T}_2$ получается теперь в несколько упрощенном виде:

$$\frac{\partial \overline{T}_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \overline{T}_2}{\partial y^2} = -u_1\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial y} \tag{40}$$

Граничные условия для температуры $\overline{T}_2$ следуют из выражения (39), граничных условий для температуры T_{22} и выражения (34) для температуры T_{21}. На основании этих граничных условий написанных в следующей форме:

$$\text{для } y = 0 \quad \overline{T}_2 = -t\frac{U^2(x)\,U'(x)}{g\,c_p}m_2 \quad \text{и для } y = \infty \quad \overline{T}_2 = 0$$

можно заключить что решение уравнения (40) надо искать в виде:

$$\overline{T}_2 = -t\,\frac{U^2(x)\,U'(x)}{g\,c_p}m_2 \cdot N_2(\eta) \tag{41}$$

где $N_2(\eta)$ — новая неизвестная функция. При этом граничными условиями для нее будут:

$$N_2(0) = 1 \quad N_2(\infty) = 0$$

Учитывая в уравнении (40) выражения для u_1 и v_1 [1] и виражените (31) для $\overline{T}_1$, получим следующее уравнение для определения функции N_2 (η):

$$A\,[N_2]=40\left[-erf^2\eta+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\, e^{-\eta^2}\right)erf\,\eta-\frac{1}{\pi}(e^{-\eta^2}-e^{-2\eta^2}\right]+ \tag{42}$$
$$+\frac{80}{\sqrt{\pi}}\frac{T_w-T_\infty}{U^2(x)}g\,c_p\left[-\eta\, e^{-\eta^2}\,erf\,\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-\eta^2}e--^{2\eta^2})\right]$$

Если решение этого уравнения представим в виде:

$$N_2(\eta)=\overset{*}{N}_2(\eta)+\frac{80}{\sqrt{\pi}}\frac{T_w-T_\infty}{U^2(x}gc_p\cdot\overset{**}{N}_2(\eta) \tag{43}$$

то тогда, для определения функций $\overset{*}{N}_2(\eta)$ и $\overset{**}{N}_2(\eta)$ получим окончательно следующие уравнения:

$$A\,[\overset{*}{N}_2]=40\left[-erf^2\eta+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\, e^{-\eta^2}\right)erf\,\eta-\frac{1}{\pi}(e^{-\eta^2}-e^{-\eta^2})\right] \tag{44}$$

$$A\,[\overset{**}{N}_2]=-\eta\, e^{-\eta^2}\,erf\,\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-\eta^2}-e^{-2\eta^2}) \tag{45}$$

с граничными условиями:

$$\overset{*}{N}_2(0)=1 \qquad \overset{*}{N}_2(\infty)=0$$
$$\overset{**}{N}_2(0)=0 \qquad \overset{**}{N}_2(\infty)=0$$

Уравнения (42) и (43) весьма похожи с уравнением (35) для определения функции $M_2(\eta)$ и потому не будем остановливатся на подробном их решении, а приведем только величины необходимые для вычисления теплового потока на теле. Это первые производные функций $\overset{*}{N}_2(\eta)$ и $\overset{**}{N}_2(\eta)$ для $\eta=0$. Их значения будут:

$$\overset{*}{N}{}_2'(0)=-6{,}210 \quad и\ \overset{**}{N}{}_2'(0)=0{,}038 \tag{46}$$

Так как тепловой поток пропорционален градиенту температуры на теле, займемся его определением. Из выражения (39), если учесть граничное условие на теле для второго приближения задачи о термометре T_{21} следует:

$$-\left(\frac{\partial T_{22}}{\partial y}\right)_{y=0}=-\left(\frac{\partial \overline{T}_2}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Дальше, принимая во внимание выражения (41) и (43) будем иметь:

$$-\left(\frac{\partial \overline{T}_2}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{m_2}{2\sqrt{\nu}}\frac{U^2(x)\,U'(x)}{g\,c_p}N_2'(0)\sqrt{t}$$

и:

$$N_2'(0)=\overset{*}{N}{}_2'(0)+\frac{80}{\sqrt{\pi}}\frac{T_w-T_\infty}{U^2(x)}g\,c_p\cdot\overset{**}{N}{}_2'(0)$$

Учитывая еще значения (46), окончательно получим:

$$-\left(\frac{\partial T_{22}}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{(\Delta T)_0\, U'(x)}{\sqrt{\nu}}\left[0{,}085-0{,}310\,\frac{U^2(x)}{g\,c_p\,(\Delta T)_0}\right]\sqrt{t} \tag{47}$$

где: $(\Delta T)_0 \equiv T_w - T_\infty$

Легко заметить что, в зависимости от отдельных условий течения, этот градиент, также как и градиент который даст первое приближение задачи об охлажении, может быть положительным, отрицательным или равен нулю. Совокупный градиент который дадут первое и второе приближение вместе будет:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=-\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)_{y=0}-\left(\frac{\partial T_{22}}{\partial y}\right)_{y=0}$$

или, если учесть выражения для отдельных градиентов (47), после некоторых преобразований:

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}&=\frac{(\Delta T)_0}{\sqrt{\nu t}}\left\{\left[0{,}564-0{,}282\,\frac{U^2(x)}{g\,c_p\,(\Delta T)_0}\right]+\right.\\&\left.+\,U'(x)\left[0{,}085-0{,}310\frac{U^2(x)}{g\,c_p\,(\Delta T_0)}\right]t\right\}\end{aligned} \tag{48}$$

Таким образом следуя закону Фурье можно теперь определить тепловой поток на теле:

$$q(x,t)=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

а потом, пользуясь следующим интеграляным виражением и количество тепла, переходящее в течение времени τ от пояса длины l и ширины цилиндрического тела равной единице, на жидкость, или наоборот:

$$Q=\int_0^l\int_0^\tau q(x,t)\,dx\,dt$$

3) *Обтекание окрестности передней критической точки цилиндрического тела*

Интересно бы было в качестве примера проанализировать выражение (48) в некотором конкретном случае. По этому рассмотрим обтекание окрестности передней критической точки цилиндрического тела.

Скорость потенциального потока может быть представлена в виде:

$$U(x)=c\,\frac{x}{R}\equiv c\,\overset{*}{x}$$

где R — радиус кривизни контура в критической точке, а c — постоянная, имеющая на пр. в случае обтекания круглого цилиндра, значение двойной скорости в бесконечности.

Если значения для $U(x)$ и $U'(x)$ подставить в выражение (48), то тогда после некоторых преобразований, получим:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{0,282\,c^2}{g\,c_p\sqrt{\nu t}}\left[\frac{2,000}{\theta}-\overset{*}{x}{}^2+\frac{1,100\,c}{R}\left(\frac{0,274}{\theta}-\overset{*}{x}{}^2\right)t\right] \tag{49}$$

где: $\theta=\dfrac{c^2}{g\,c_p\,(\Delta\,T)_0}$ — так называемый температурный критерий.

Приравнивая градиент (49) нулю, мы получим то мгновение времени $\bar{t}$, в котором на определенном месте в окрестности критической точки направление перехода тепла меняет знак.

$$\bar{t}=\frac{R}{1,100\,c}\,\frac{\dfrac{2,000}{\theta}-\overset{*}{x}{}^2}{\overset{*}{x}{}^2-\dfrac{0,274}{\theta}} \tag{50}$$

Пусть будет $\theta>0$, т.е. $(\Delta\,T)_0\equiv T_w-T_\infty>0$. Из выражения (50) следует тогда что градиент температуры становится равен нулю в точке $\overset{*}{x}=\sqrt{\dfrac{2,000}{\theta}}$ в самом начале движения: $\bar{t}=0$. В точке $\overset{*}{x}=\sqrt{\dfrac{0,274}{\theta}}$ градиент температуры будет равен нулю только по источению времени $\bar{t}=\infty$, что другими словами значит, что это никогда не случится. Это заключение действительно и для точек удовлетворяющих неравенствам:

$$\overset{*}{x}>\sqrt{\frac{2,000}{\theta}}\quad\text{и}\quad\overset{*}{x}<\sqrt{\frac{0,274}{\theta}}$$

так как этим точкам из выражения (50) отвечает отрицательное время! Следовательно, тепловой поток меняет знак в течение времени только в интервале:

$$\sqrt{\frac{0,274}{\theta}}<\overset{*}{x}\leq\sqrt{\frac{2,000}{\theta}} \tag{51}$$

Из выражения (49) легко увидеть что для $\overset{*}{x}\leq\sqrt{\dfrac{0,274}{\theta}}$ градиент температуры на теле всегда отрицательный, т.е. что в непосредственной окрестности критической точки тело всегда охлаждается. Если же $\overset{*}{x}>\sqrt{\dfrac{2,000}{\theta}}$ то тогда градиент температуры всегда положительный, что другими словами значит, что в этой области тело нагревается вопреки условию $T_w>T_\infty$. Как и при обтекании плоской пластинки, это обстоятельство можно объяснит интенсивным выделением тепла в пограничном слое на известном расстоянии от критической точки, на котором скорость обтекания становится сравнительно болшой. Это тепло препятствует процессу охлаждения тела, нормально наступающему в условиях когда $T_w>T_\infty$.

На верхей границе интервала (51) градиент температуры, как мы уже подчеркнули, внезапно исчезает (становится равен нулю), после чего точка в которой градиент температуры равен нулю начинает приближатся к нижней границе интервала (51). Таким образом интервал с положительным температурным градиентом увеличавается и следовательно область нагревания в течение времени расширятся. Хотя точка никогда не достигает нижную границу интервала (51), все же, по истечении очень большого интервала времени, можно сказать что охлаждается только область $\overset{*}{x} \leq \sqrt{\frac{0,274}{\theta}}$. Очевидно, и в то же время естественно, что при больших значениях температурного критерия, отвечающих большим скоростям течения и сравнительно малым разностям температуры тела и жидкости в бесконечности, эта область очень незначительна.

В случае если $T_w = T_\infty$, в выражении (49) исчезают все члены которые температурный критерий θ содержают в знаменателе. Следовательно, градиент температуры на теле будет во всех точках всегда положительным, т.е. другими словами, рассматриваемая окрестность критической точки будет нагреваться. Причиной нагревания в этом случае, также как и в случае обтекания пластинки, будет только тепло возникающее в пограничном слое вследствие трения.

Этот же случай наступает и когда $T_w < T_\infty$, т.е. $\theta < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лойцянский Л. Г., *Ламинарный пограничный слой*, ФМ Москва 1962.

[2] Шлихтинг Г., *Теория пограничного слоя*, ИЛ Москва 1965.

[3] Кашанин Р., *Виша математика* II—2 ,НК Београд 1950.

[4] Маркушевич И. А., *Краткий курс теории аналитических функций*, ФМ Москва 1961.