PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 97–98.

QUELQUES REMARQUES SUR MA NOTE „SUR UNE GÉNÉRALISATION DES MOYENNES QUASILINÉAIRES"[1]

Mahmud Bajraktarević

(Communiqué le 20 novembre 1964)

Dans la remarque 3 se rattachant au théorème 1 de ma note [2] on a dit que „le théorème 1 n'est démontré que pour les moyennes (1) considérées dans leur ensemble par rapport à $n=2, 3, \cdots$, $(t_1, \cdots, t_n) \in J^n$ et $(p_1, \cdots, p_n) \in P^n$. C'est pourquoi il ne doit pas nécessairement être valable, p. ex., pour un nombre n arbitrairement fixé ou pour $p_i = C > 0 \, (i = 1, \cdots, n)$."

Dans la présente note on va montrer que le théorème 1 de [2] reste valable même dans le cas où $(t_1, \cdots, t_n) \in J^n$ arbitraire, $p_i = C > 0 \, (i = 1, \cdots, n)$ pour tous les $n = 1, 2, \cdots$ considérés dans leur ensemble ([1], $th \cdot 1$) ainsi que dans le cas où l'entier $n \geqq 2$ est arbitrairement fixé avec $(t_1, \cdots, t_n) \in J^n$ et $(p_1, \cdots, p_n) \in P^n$ arbitraire. Pour le montrer il ne suffit que modifier (et préciser) un peu la démonstration correspondante donnée dans [2].

Considérons d'abord le premier cas. Evidemment on n'a qu'à prouver la nécessité des relations (6) de [2]. Or, en posant

$$t_1 = \cdots = t_r < t_{r+1} = \cdots = t_{r+s}, \quad r+s=n,$$

on déduit de la relation (5), avec $p_i = C > 0$, la relation

$$\varphi^{-1}\left(\frac{xf_1\varphi_1 + f_n\varphi_n}{xf_1 + f_n}\right) = \Psi^{-1}\left(\frac{x g_1 \Psi_1 + g_n \Psi_n}{x g_1 + g_n}\right) = t \in J$$

valable pour $x = \dfrac{r}{s}$ rationnel et, en passant aux limites, aussi pour x irrationnel. L'élimination de x donne la première relation (6) avec

$$(7a)\begin{cases} a = a(t_1, t_n) = f_1 g_n \Psi_n - f_n g_1 \Psi_1, & b = b(t_1, t_n) = f_n \varphi_n g_1 \Psi_1 - f_1 \varphi_1 g_n \Psi_n, \\ c = c(t_1, t_n) = f_1 g_n - f_n g_1, & d = d(t_1, t_n) = f_n \varphi_n g_1 - f_1 \varphi_1 g_n, \\ \qquad ad - bc = f_1 f_n g_1 g_n (\varphi_n - \varphi_1)(\Psi_n - \Psi_1) \neq 0. \end{cases}$$

Si $C = 0$, on a $d \neq 0$; si $d=0$, on a $c \neq 0$.

Les quantités a, b, c, d, définies par (7*a*) dans la première relation (6) peuvent être remplacées par les constantes $\bar{a} = a(A, B), \cdots, \bar{d} = d(A, B)$ puisqu'on peut faire $t_1 = A$, $t_n = B$ de sorte que la relation

$$\Psi = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d} = \frac{\bar{a}\varphi + \bar{b}}{\bar{c}\varphi + \bar{d}}$$

[1] Ces remarques sont écrites d'après les suggestions dues à M. J. A c z é l.

implique l'existense d'une fonction $q = q(t_1, t_n)$ telle que

$$a = \tilde{a}\, q, \cdots, \quad d = \tilde{d}\, q.$$

Des relation (7a) on tire alors la deuxième relation (6)

$$g = k f(\tilde{c}\, \varphi + \tilde{d}), \quad k = const \neq 0 .$$

Dans le deuxième cas, l'entier $n \geq 2$ étant arbitrairement fixé, on n'a qu'à poser

$$t_1 < t_2 = \cdots = t_n, \quad p_1 = x, \quad p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n-1}$$

et à poursuivre la démonstration comme dans le premier cas.

A la fin il est nécessaire de souligner que la partie de la remarque 3 de [2] se rattachant à ([3], th. 5) n'est pas complètement motivée du fait que ce théorème, étant valable pour tout entier $n > 2$ arbitrairement fixé avec $p_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots)$, n'est pas la conséquence du th. 1 de [2] ni des résultats considérés dans la présente note. Il est à remarquer que le th. 5 de [3] est récemment démontré par J. Aczél par une voie élémentaire sans dérivation.

RÉFÉRENCES

[1] J. Aczél und Z. Daróczy, *Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind.* Publ. Math. Debrecen 10, 1963.

[2] M. Bajraktarević, *Sur une généralisation des moyennes quasilinaires.* Publ. Inst. Math., Beograd 3 (17), 1963, 69—76.

[3] M. Bajraktarević, *Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes.* Glasnik mat. — fiz. i astr., Zagreb, 13, (1958), 243—248.