PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 89–95.

SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DANS UN SOUS-ENSEMBLE DES OPÉRATEURS DE J. MIKUSIŃSKI

Bogoljub Stanković

(Communiqué le 26 juin 1964)

Les équations différentielles dans le corps des opérateurs de J. Mikusiński, [1], qui soit noté par K, sont beaucoup plus faciles à traiter si on se limite à un sous-ensemble de K. Nous avons ici choisi l'ensemble $C_s(\lambda)$ ou plus tôt $\vec{C}_s(\lambda)$, définis et analysés dans un article déjà publié [3].

Nous allons donné, cependant, les définitions et les résultats démontrés dans l'article mentionné.

Soit C l'anneau des fonctions continues, définies sur l'intervalle $[0, \infty)$ avec les opérations d'addition et de composition. Dans C on définit une famille de semi-normes:

$$\|f\|_k = \underset{O \leq t \leq k}{\text{Max}} |f(t)|, \quad k \in N .$$

Pour $p \in R$, $\beta \geq 0$ et $0 < \sigma < 1$, avec F_β on note la fonction: $F_\beta(t) = t^{-p-\beta-1}\ \Phi(-p-\beta,\ -\sigma;\ -t^{-\sigma})$, $F_o = F$, où Φ est la fonction connue de E. M. Wright [4]

$$\Phi(\beta, \rho;\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\ \Gamma(\beta + \rho n)}, \quad -1 < \rho < 0.$$

C_s est une sous-algèbre commutative de K dont les éléments sont de la forme $s^\beta f$, $\beta \geqslant 0$ et $f \in C$; s est l'opérateur différentiel dans K, $s^\circ = I$, I est l'élément neutre pour l'opération multiplicative dans K. C_s contient les opérations les plus fréquentes: dérivée, intégrale, translation et composition par une fonction continue.

On définit aussi une famille de semi-normes:

$$\mathrm{N}_k(s^\beta f) \overset{\text{def.}}{=} \underset{O \leq t \leq k}{\text{Max}} \left| \int_0^t f(t-u) F_\beta(u)\, du \right|, \quad k \in N,$$

et la distance:

$$d(s^\beta f - s^\alpha g) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{N_k(s^\beta f - s^\alpha g)}{1 + N_k(s^\beta f - s^\alpha g)}$$

Ainsi C_s est devenu l'espace du type B_0^* de Mazur et Orlicz [2].

Soit $g \in C$ et $\eta \in C_s$, alors $N_k(g\eta) \leq k\ \|g\|_k\ N_k(\eta)$.

L'espace C_s n'est pas complet. L'espace du type B_o qui contient C_s est celui dont les éléments sont de la forme g/F, $g \in C$; on le note par $\vec{C}_s$.

L'espace $\vec{C}_s$ est complet; les semi-normes et la distance sont définies comme dans C_s.

L'opération externe pour $\vec{C}_s$, composition par des fonctions continues, est continue.

Par $C_s(\lambda)$ soit noté l'espace vectoriel des fonctions qui correspondent à tout $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ un élément $s^\beta f(\lambda)$, $f(\lambda, t)$ est continue sur D: $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$, $0 \leq t < \infty$. De même, $\vec{C}_s(\lambda)$ est l'espace vectoriel des fonctions de la forme $g(\lambda)/F$, $g(\lambda, t)$ continue sur D. Avec la famille de semi-normes:

$$N_k(\eta(\lambda)) = \operatorname*{Max}_{(\lambda, t) \in D_k} |y(\lambda, t)|, \quad \{y(\lambda, t)\} = F\eta(\lambda),$$

D_k: $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$, $O \leq t \leq k$, $k \in N$, l'espace $\vec{C}_s(\lambda)$ est isométrique à l'espace des fonctions continues sur D.

Si la suite $(\eta_n(\lambda)) \subset \vec{C}_s(\lambda)$ converge vers $\eta(\lambda)$ dans la topologie induite par la distance, alors on a dans $\vec{C}_s$:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} w(u)\, \eta_n(u)\, du = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w(u)\, \eta(u)\, du$$

pour tout $w(\lambda) = \{w(\lambda\, t)\}$, la fonction $w(\lambda, t)$ est continue sur D.

Enfin, soit M un sous-ensemble borné de $C_s(\lambda)$, dont les éléments sont également continus, alors l'ensemble $l\, M$ est compact.

1. L'équivalence de l'équation différentielle et intégrale

Considérons l'équation:

$$x'(\lambda) = a(\lambda)\, x(\lambda) + b(\lambda), \quad \lambda \in [\lambda', \lambda'']. \tag{1}$$

On peut montrer qu'elle est équivalente à une équation intégrale; plus précis:

Théorème 1. *Soient $a(\lambda)$ une fonction opératoire de la forme*

$a(\lambda) = p\{w(\lambda, t)\}$ et $b(\lambda) = r\ \{\beta(\lambda, t)\}$, où $p, r \in K$ et $w(\lambda, t)$, $\beta(\lambda, t)$

sont deux fonctions continues sur

$$D: \lambda' \leq \lambda \leq \lambda'',\ 0 \leq t < \infty.$$

Pour que $x(\lambda) = q\{\xi(\lambda, t)\}$ soit une solution de l'équation (1) *sous la condition initiale $x(\lambda_o) \in K$, il faut et il suffit que $x(\lambda)$ possède la dérivée au sens des opérateurs et qu'il satisfasse l'équation intégrale.*

$$x(\lambda) = x(\lambda_o) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} a(u)\, x(u)\, du + \int_{\lambda_0}^{\lambda} b(u)\, du. \tag{2}$$

Démonstration. — Supposons que $x(\lambda)$ est une solution de l'équation différentielle (1). D'après la définition de la dérivée d'une fonction opératoire,

$x(\lambda)$ est de la forme $x(\lambda)=q\{\xi(\lambda, t)\}$, $q \in K$, et $\xi_\lambda'(\lambda t)$ est une fonction continue sur D. L'équation (1) est maintenant:

$$q\{\xi_\lambda'(\lambda, t)\} = qp\{w(\lambda, t)\}\{\xi(\lambda, t)\} + b(\lambda)$$

d'où

$$q\{\xi(\lambda, t)\} = q\{\xi(\lambda_0, t)\} + qp\int_{\lambda_0}^{\lambda}\{w(u, t)\}\{\xi(u, t)\}\,du + \int_{\lambda_0}^{\lambda} b(u)\,du$$

et c'est l'équation intégrale (2).

Supposons maintenant que $x(\lambda)=q\xi(\lambda)$ satisfasse l'équation intégrale (2).

$q\xi(\lambda) = q\xi(\lambda_0)+qp\int_{\lambda_0}^{\lambda} w(u)\xi(u)\,du + r\int_{\lambda_0}^{\lambda}\beta(u)\,du$ les éléments $p, q, r \in K$ et peuvent être écrits

$$p = p_1/p_2,\ q = q_1/q_2,\ r = r_1/r_2,\quad p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in C.$$

C'est pourquoi on a:

$$p_2q_2r_2x(\lambda) = p_2q_2r_2x(\lambda_0) + p_1q_1r_2\int_{\lambda_0}^{\lambda} w(u)\xi(u)\,du + p_2q_2r_1\int_{\lambda_0}^{\lambda}\beta(u)\,du.$$

Le second membre de cet équation est représenté par une fonction qui possède la dérivée partielle par rapport à λ continue sur D.

2. L'existence de la solution des équations différentielles

Théorème 2. *Supposons que* $a(\lambda) = s^\beta w(\lambda) \in C_s(\lambda)$, $0 \leq \beta < 2$. *L'équation différentielle*

(3) $$x'(\lambda)+a(\lambda)x(\lambda) = 0, \qquad 0 \leq \lambda \leq \Lambda$$

a une solution dans $\bar{C}_s(\lambda)$ *pour la condition initiale* $x(0) \neq 0 \in K$.

Démonstration. — Sans aucune restriction on peut supposer que $x(0) = I$. (I est l'unité pour la deuxième opération dans K).

Nous savons, d'après le théorème 1 que l'équation (3) est équivalente à

(4) $$x(\lambda) = I+\int_0^{\lambda} a(u)x(u)\,du,\ 0 \leq \lambda \leq \Lambda.$$

On peut construire la suite:

$$x_n(\lambda) = I,\quad 0 \leq \lambda \leq \Lambda/n$$

$$x_n(\lambda) = I+\int_0^{\lambda-\Lambda/n} a(u)x_n(u)\,du,\ \lambda > \Lambda/n;$$

cette suite appartient à $C_s(\lambda)$. Nous allons montrer qu'elle est bornée et que ses éléments sont également continus.

Pour n fixe on a sur l'intervalle $\frac{k}{n}\Lambda < \lambda \leq \frac{k+1}{n}\Lambda$, $k = 1, 2, \cdots, (n-1)$:

$$x_n(\lambda) = I + s\beta \int_0^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du + s^{2\beta} \int_{\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du \int_0^{u-\Lambda/n} w(u_1)\, du_1 +$$

$$+ \cdots + s^{k\beta} \int_{\frac{k-1}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du \int_{\frac{k-2}{n}\Lambda}^{u-\Lambda/n} w(u_1)\, du_1 \cdots \int_0^{u_{k-2}-\Lambda/n} w(u_{k-1})\, du_{k-1}.$$

Cette relation n'est pas difficile à montrer. Pour $k = 1$ elle est:

$$x_n(\lambda) = I + s\beta \int_0^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du\,.$$

Supposons que la relation (5) est vraie pour $k = m$. On a alors, pour $k = m+1$, c'est-à-dire sur l'intervalle $\frac{m+1}{n}\Lambda < \lambda \leqq \frac{m+2}{n}\Lambda$:

$$x_n(\lambda) = I + s\beta \int_0^{\Lambda/n} + \int_{\Lambda/n}^{2\Lambda/n} + \cdots + \int_{\frac{m}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, x_n(u)\, du$$

$$= x_n\left(\frac{m+1}{n}\right)\Lambda + s\beta \int_{\frac{m}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, x_n(u)\, du$$

$$= I + s\beta \int_0^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du + s^{2\beta} \int_{\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du \int_0^{u-\Lambda/n} w(u_1)\, du_1 +$$

$$+ \cdots + s^{(m+1)\beta} \int_{\frac{m}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du \int_{\frac{m-1}{n}\Lambda}^{u-\Lambda/n} w(u_1)\, du_1 \cdots \int_0^{u_{k-1}-\Lambda/n} w(u_k)\, du_k \cdot$$

D'après la supposition, la fonction $w(\lambda, t)$ est bornée sur D_k; soit M_k une borne de cette fonction. On peut majorer la norme

$$N_k\left(s^{j\beta} \int_{\frac{j-1}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du \int_{\frac{j-2}{n}\Lambda}^{u-\Lambda/n} w(u_1)\, du_1 \cdots \int_0^{u_{j-2}-\Lambda/n} w(u_{j-1})\, du_{j-1}\right) \leq$$

$$\leq \underset{(\lambda,t)\in D_k}{\mathrm{Max}} \left| s^{j\beta} F \int_{\frac{j-1}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\, du \cdots \int_0^{u_{j-2}\Lambda/n} w(u_{j-1})\, du_{j-1} \right|$$

$$\leq k \| F_{j\beta} \|_k \frac{M_k^j}{(j-1)!} \; \frac{\Lambda^j}{j!} \cdot$$

En utilisant aussi la majoration pour F, on obtient

$$\leq \frac{2}{\sigma} \Gamma \left(\frac{j\beta + p + 1}{\sigma}\right) \left(\cos \frac{\sigma\pi}{2}\right)^{\frac{-j\beta + p + 1}{\sigma}} \frac{M_k^j \, \Lambda^j}{(j-1)!\, j!}$$

$$= 0 \left(j^{-\left(2 - \frac{\beta}{\sigma}\right) j}\right), \quad 0 \leq \beta < 2 \cdot$$

On a choisi σ tel que $\frac{\beta}{\sigma} < 2 \cdot$

Il nous ne reste que la majoration de la suite $x_n(\lambda)$.

$$N_k(x_n(\lambda)) \leq N_k(I) + N_k\left(s^{\beta} \int_0^{\lambda - \Lambda/n} w(u)\, du\right) + \cdots +$$

$$+ N_k\left(s^{k\beta} \int_{\frac{k-1}{n}\Lambda}^{\lambda - \Lambda/n} w(u)\, du \int_{\frac{k-2}{n}\Lambda}^{u - \Lambda/n} w(u_1)\, du_1 \cdots \int_0^{u_{k-2} - \Lambda/n} w(u_{k-1})\, du_{k-1}\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 0 \left(j^{-\left(1 - \frac{\beta}{\sigma}\right) j}\right), \quad 0 \leq \beta < 2 \cdot$$

Montrons maintenant que les éléments de la suite $x_n(\lambda)$ sont également continus. Soit $\lambda_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_k(x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)) = {} & \mathrm{N}_k\left(\int_{\lambda_0 - \Lambda/n}^{\lambda - \Lambda/n} w(u)\, s^{\beta}\, x_n(u)\, du\right) \\
= {} & \operatorname*{Max}_{O \leq t \leq k} \left| \int_{\lambda_0 - \Lambda/n}^{\lambda - \Lambda/n} w(u)\, \mathrm{F}_{\beta}\, x_n(u)\, du \right| \\
\leq {} & M_k \int_{\lambda_0 - \Lambda/n}^{\lambda - \Lambda/n} \operatorname*{Max}_{(u,t) \in D_k} \left| F_{\beta - 1}\, x_n(u) \right| du \\
\leq {} & M_k\, C_k\, |\lambda - \lambda_0|
\end{aligned}$$

où $C_k = \operatorname*{Max}_{(\lambda, t) \in D_k} \left| F_{\beta-1}\, x_n(\lambda) \right|$. Cette constante existe toujours car $x_n(\lambda)$ reste bornée indépendant de p .

En cas $\lambda_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_k\left(x_n(\lambda) - x_n(0)\right) = {} & \mathrm{N}_k\left(\int_0^{\lambda} w(u)\, s^{\beta}\, x_n(u)\, du\right) \\
\leq {} & M_k\, C_k\, \lambda\ .
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout λ, $\lambda_0 \in [o, \Lambda]$ on a

$$\mathrm{N}_k\left(x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)\right) \leq M_k\, C_k\, |\lambda - \lambda_o|\ ,$$

c'est-à-dire les éléments de la suite $x_n(\lambda)$ sont également continus sur l'intervalle $[0, \Lambda]$.

D'après la proposition qui nous donne les conditions quand un sous-ensemble dans $\bar{C}_s(\lambda)$ soit compact, la suite $(l\,x_n(\lambda))$ est compacte et on peut extraire une sous-suite $(lx_{k_n}(\lambda))$ qui converge dans $\bar{C}_s(\lambda)$ avec la limite $lx(\lambda)$. La fonction opératoire $x(\lambda)$ satisfait la condition initiale $x(0)=I$, car elle est satisfaite par tous les éléments de la suite.

Nous allons montrer que $x(\lambda)$ est une solution de l'équation intégrale (4), c'est-à-dire de l'équation différentielle (3):

$$l\,x_{k_n}(\lambda)=l+\int_0^{\lambda-\Lambda/k_n} a(u)\,l\,x_{k_n}(u)\,du$$

$$=l+\int_0^{\lambda} a(u)\,l\,x_{k_n}(u)\,du-\int_{\lambda-\Lambda/k_n}^{\lambda} a(u)\,l\,x_{k_n}(u)\,du$$

Enfin, nous montrons que la dernière intégrale tende vers zéro quand $n\to\infty$:

$$N_k\Big(\int_{\lambda-\Lambda/k_n}^{\lambda} a(u)\,l\,x_{k_n}(u)\,du\Big)=N_k\Big(\int_{\lambda-\Lambda/k_n}^{\lambda} w(u)\,s^{\beta-1}x_{k_n}(u)\,du\Big)$$
$$\leq M_k\;C_k\,\Lambda/_{k_n}\ .$$

En utilisant la proposition qui nous permet d'entrer sous le signe d'intégrale avec la limite, la démonstration du théorème est achevée.

Théorème 3. *Supposons*:

$$1.\qquad b(\lambda)=\frac{\{g(\lambda,t)\}}{q}\in\bar{C}_s(\lambda)\ ;$$

$$\lambda\in[0,\,\Lambda]$$

$$2.\qquad a(\lambda)=s^{\beta}\{w(\lambda,t)\}\in C_s(\lambda)\ ;$$

$$3.\qquad 0\leq\beta<2\ .$$

Ces conditions remplies, l'équation

$$x'(\lambda)=a(\lambda)\,x(\lambda)+b(\lambda) \tag{5}$$

a une solution sous la condition initiale $x(0)=0$.

Démonstration. – Comme le théorème précédent on peut démontrer ce théorème aussi directement. On construit la suite $x_n(\lambda)$:

$$x_n(\lambda)=0\ ,\quad 0\leq\lambda\leq\Lambda/n$$

$$x_n(\lambda)=\int_0^{\lambda-\Lambda/n} a(u)\,x_n(u)\,du+\int_0^{\lambda-\Lambda/n} b(u)\,du\ ,\quad \lambda>\Lambda/n\ .$$

Sur l'intervalle $\frac{k}{n}\Lambda<\lambda\leq\frac{k+1}{n}\Lambda$ on a:

$$x_n(\lambda) = s^{(k-1)\beta} \int\limits_{\frac{k-1}{n}\Lambda}^{\lambda-\Lambda/n} w(u)\ du \cdots \int\limits_{\lambda/n}^{u_{k-3}-\Lambda/n} w(u_{k-2})\, du_{k-2} \int\limits_{0}^{u_{k-2}-\Lambda/n} b(u_{k-1})\ du_{k-1}$$

$$+ \cdots + s\beta \int\limits_{\Lambda/n}^{\lambda-\Lambda/n} w\ (u)\ du \int\limits_{0}^{u-\Lambda/n} b\,(u_1)\ du_1 + \int\limits_{0}^{\lambda-\Lambda/n} b\,(u)\ du.$$

La fonction $g(\lambda, t)$ étant bornée sur D_k pour tout $k \in N$, la suite $(q\, x_n(\lambda))$ est une suite bornée dans $C_s(\lambda)$ et ses éléments sont également continus. Pour démontrer cela, on utilise le même procédé comme pour le théorème précédent.

On sait maintenant qu'il existe une sous-suite $\left(l\, q\, x_{k_n}(\lambda)\right)$ qui converge dans $\bar{C}_s(\lambda)$. Soit $l\, q\, x(\lambda)$ la limite de cette suite, alors $x(\lambda)$ est une solution de l'équation (5) avec les conditions initiale $x(0) = 0$.

L'opérateur $l\, q\, x(\lambda)$ satisfait l'équation:

$$q\, x'(\lambda) = a(\lambda)\ l\ q\ x(\lambda) + g(\lambda)$$

car la suite $\left(l\, q\, x_{k_n}(\lambda)\right)$ converge dans $\bar{C}_s(\lambda)$. D'où :

$$x'(\lambda) = a(\lambda)\ x(\lambda) + b(\lambda)$$

La méthode utilisée dans cet article est intéressante parce qu'elle peut donner des résultats aussi pour le système d'équations différentielles. Ce sera le sujet d'un autre article.

BIBLIOGRAPHY

[1] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire,* Studia Math. T. XI (1950), 41—70.

[2] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires I, II,* Studia Math. T. X (1948), 184—208 et T. XIII (1953), 137—179.

[3] B. Stanković, *L'espace C_s le sous-espace des opérateurs de J. Mikusiński,* Bull. de l'Ac. Sc. et des Arts, classe sc. math. et nat, Sc. math, nouvelle série, Beograd, № 5, sous presse.

[4] E. Wright, *The generalized Bessel function of order greater than one,* Quart. J Math. Oxford Series, V. 11 (1940), 36-48.