

DIE „ÄHNLICHEN“ LÖSUNGEN DER GRENZSCHICHTGLEICHUNGEN FÜR DEN FALL DER ZUSAMMEN MIT DER GRUNDSTRÖMUNG GLEICHMÄSSIG SCHNELLROTIERENDEN SCHAUFELN

Viktor Saljnikov

(Vorgelegt am 13 Mai 1964)

Bei den Untersuchungen in Strömungsmaschinen nimmt man meistens an, daß durch das Schaufelrad sich eine ideale Flüssigkeit bewegt, womit man die Möglichkeit verliert den Zähigkeitseinfluß auf einige bei diesen Durchströmungen auftretenden charakteristischen Erscheinungen näher zu erklären. In dieser Arbeit wird daher erster Schritt der vorgesehenen stufenweisen Grenzschichtuntersuchung an Schaufeln radialer schnellrotierenden Strömungsmaschinen vorgenommen. Es werden nämlich die Differentialgleichungen der „ähnlichen“ Lösungen betrachtet, falls abgeleitet und die Form der Schaufeln bestimmt, bei denen diese Lösungen möglich sind.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe geht man von den Differentialgleichungen für die stationären inkompressiblen und laminaren Grenzschichten an krummlinigen Wänden aus, die, mit einer hinreichend großen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \text{const.}$ zusammen mit der Grundströmung, gleichmäßig rotieren. Sie lauten

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

wobei

$$(2) \quad U(x, y) = U_0(x, 0) \pm 2 \omega y$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \pm 2 \omega$$

ist. In den Gleichungen (1) und (2), welche Verf. in einer früheren Arbeit [1] abgeleitet hat, gelten die in der Grenzschicht üblichen und aus der Abb. 1 zu entnehmenden Bezeichnungen.

Nach dem Einsetzen (2) in (1) erhält man folgendes System von Differentialgleichungen

$$(3) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_0 U_0' \pm 2 \omega (U_0' y + V)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

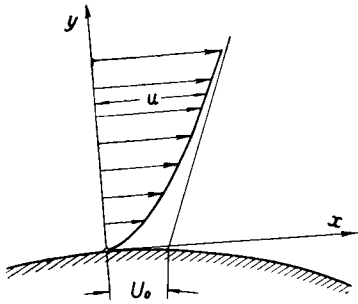


Abb. 1

wobei die entsprechenden Randbedingungen auf Grund von (2) lauten

$$(4) \quad \begin{aligned} y=0 & : u=0, \quad v=0 \\ y=\infty & : u=U_0 \pm 2\omega y \end{aligned}$$

Führt man die Stromfunktion ψ durch die üblichen Ausdrücke

$$(5) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$(6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = U_0 U_0' \pm 2\omega \left[U_0' y - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=\infty} \right]$$

während die Kontinuitätsgleichung identisch befriedigt wird. Die Randbedingungen für ψ haben dabei die folgende Form

$$(7) \quad \begin{aligned} y=0 & : \psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ y=\infty & : \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 \pm 2\omega y; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \pm 2\omega. \end{aligned}$$

Jetzt werden die „ähnlichen“ Lösungen der Grenzschichtgleichungen (6) mit den Randbedingungen (7) gesucht, bzw. wird die Form von denjenigen Körperkonturen bestimmt, bei denen sich die Geschwindigkeitsprofile $u(x, y)$ an zwei verschiedenen Stellen x nur durch einen Maßstabsfaktor für die Koordinate y und die Geschwindigkeit u unterscheiden.

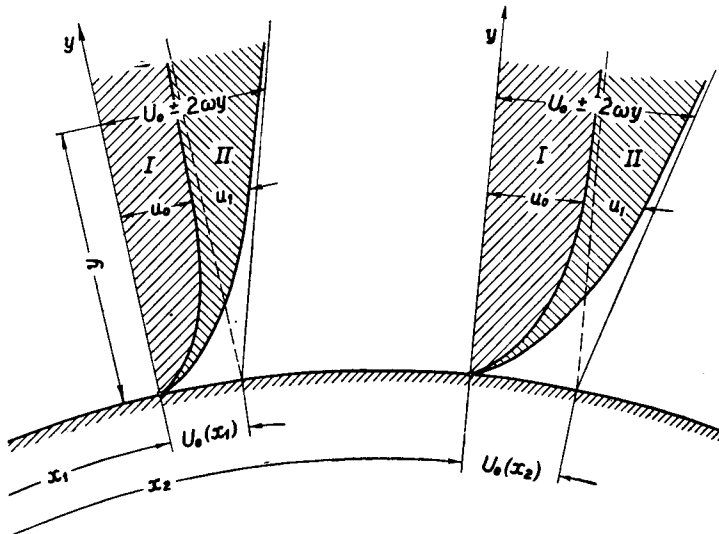


Abb. 2

Kann man zeigen, daß die gleichzeitige Befriedigung der Ähnlichkeitsbedingungen (15), (16) und Randbedingungen (7), nur durch die Geschwindigkeits-

profilverteilung erreicht werden kann, und zwar auf das, auch ohne Rotation des Strömungsfeldes ($\omega = 0$), bestehende Teil I (s. Abb. 2) und auf das, als Folge der Rotation, hervorgerufene Teil II.

Dementsprechend wird den Ansatz

$$(8) \quad u = u_0 \pm u_1$$

eingeführt, und die Stromfunktion ψ in folgender Reihenform

$$(9) \quad \psi(x, v) = \frac{L U_0(x) g(x)}{\sqrt{Re}} (f_0 \pm f_1 \Omega + \dots) = \frac{L U_0 g}{\sqrt{Re}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Omega^n$$

dargestellt, wobei

$f_n(\xi, \eta)$ — die dimensionlose Stromfunktion,

L — die charakteristische Länge,

$g(x)$ — der dimensionlose Maßstab,

$Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$ — die Reynoldssche Zahl und

$U_0(x)$ — die Potentialgeschwindigkeitsverteilung unmittelbar an der krummlinigen Kontur für den Fall idealer Flüssigkeitsströmung, sind.

Die, bei der Bestimmung „ähnlicher“ Grenzschichtlösungen im Falle des nicht rotierenden Strömungsfeldes ($\omega = 0$), eingeführten Koordinaten ξ und η [2], welche auch für unseres Problem übernommen werden, lauten folgendermaßen:

$$(10) \quad \xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad \eta = \frac{y \sqrt{Re}}{L g(x)}$$

Die dimensionlose Größe Ω , nach welcher die Stromfunktion ψ in die Potenzreihe (9) entwickelt wurde, stellt ein Maß für das Verhältnis zwischen der Neigung des Geschwindigkeitsprofils der Grundströmung 2ω und dem durchschnittlichen Geschwindigkeitsgradient in der Grenzschicht (s. Abb. 1) dar. Dabei wird angenommen, daß die Grenzschichtdicke proportional mit $Lg(x)$ ist, und daß am Rande der Grenzschicht in erster Näherung $U \sim U_0$ gilt. Die, in der oben angegebenen Arbeit [1] eingeführte und als „Drehungszahl“ bezeichnete Größe Ω kann daher auf Grund obiger Definition und der Koordination (10) in folgender Form dargestellt werden

$$(11) \quad \Omega = \frac{2\omega}{U_0(x) / \frac{L g(x)}{\sqrt{Re}}} = \frac{2\omega L g(x)}{U_0(x) \sqrt{Re}}$$

Begnügt man sich mit der Genauigkeit, welche die ersten zwei Glieder der Entwicklung (9) liefern, so erhält man

$$(12) \quad \psi(x, y) = \frac{L U_0 g}{\sqrt{Re}} (f_0 \pm \Omega f_1)$$

woraus folgt

$$(13) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 (f_0' \pm \Omega f_1')$$

Der Vergleich des Ausdruckes (13) mit (8) ergibt dann

$$(14) \quad u_0 = U_0 f_0' \quad ; \quad u_1 = U_0 \Omega f_1'$$

Nun kann man das Ähnlichkeitsgesetz auf die folgende Weise ausdrücken

$$(15) \quad \frac{u_0 \left[x_1, \frac{y}{g(x_1)} \right]}{U_0(x_1)} = \frac{u_0 \left[x_2, \frac{y}{g(x_2)} \right]}{U_0(x_2)} ,$$

$$(16) \quad \frac{u_1 \left[x_1, \frac{y}{g(x_1)} \right]}{\Omega(x_1) U_0(x_1)} = \frac{u_1 \left[x_2, \frac{y}{g(x_2)} \right]}{\Omega(x_2) U_0(x_2)}$$

Dies bedeutet aber, daß man die Ähnlichkeit von Teilen I sowie von Teilen II der Geschwindigkeitsprofilen an zwei verschiedenen Stellen x (s. Abb. 2) getrennt verlangen soll. Aus dem Vergleich von (14), (15) und (16) schließt man weiter daß dies erreicht wird, wenn die dimensionlosen Funktionen f_0 und f_1 unabhängig von der Koordinaten ξ werden.

Setzt man nun die Stromfunktion ψ (12) in die Differentialgleichung (6) ein, so erhält man, mit Rücksicht auf (10) und (11), nach dem Koeffizientenvergleich zwei Differentialgleichungen.

Die erste Gleichung lautet

$$(17) \quad f_0''' + \alpha f_0 f_0'' + \beta (1 - f_0'^2) = \frac{U_0}{U_\infty} g^2 \left(f_0' \frac{\partial f_0'}{\partial \xi} - f_0'' \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right)$$

wobei

$$(18) \quad \alpha = \frac{Lg}{U_\infty} \frac{d}{dx} (U_0 g) , \quad \beta = \frac{Lg^2}{U_\infty} U_0'$$

bedeutet.

Wenn man, in der Übereinstimmung mit obigem Schluß, voraussetzt, daß die Funktion f_0 von der Koordinate ξ unabhängig ist, dann erhält man aus (17) folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$(19) \quad f_0''' + \alpha f_0 f_0'' + \beta (1 - f_0'^2) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(20) \quad \begin{array}{l} \eta = 0 : \quad f_0 = 0 \quad ; \quad f_0' = 0 \\ \eta = \infty : \quad f_0' = 1 \end{array}$$

welche zunächst von V. M. FALKNER und S. W. SKAN [3] gewonnen wurde und deren Lösungen D. R. HARTREE [4] später ausführlich untersucht hat. Dabei wurde festgestellt, daß die „ähnlichen“ Lösungen der Differentialgleichung (19), für verschiedene Werte von β und beim normierten Faktor $\alpha = 1$, die Verteilung der Geschwindigkeitskomponente u in der Grenzschicht an den Keilförmigen Körpern mit dem Keilwinkel $\pi\beta$ (s. Abb. 3) bestimmen.

Die zweite Differentialgleichung kann man nach gewissen Transformationen in folgender Form schreiben

$$(21) \quad f_1''' + \alpha f_0 f_1'' - \alpha f_0' f_1' - 2(\beta - \alpha) f_0'' f_1 + \eta \beta + (\alpha - \beta) \eta f_0'(\infty) - \alpha f_0(\infty) = \frac{U_0 g^2}{U_\infty} \left\{ -f_0'' \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_1'}{\partial \xi} f_0' + f_1' \frac{\partial f_0'}{\partial \xi} \pm \frac{\partial f_1'}{\partial \xi} f_1' - f_1'' \frac{\partial f_0}{\partial \xi} + \frac{\partial f_0(\infty)}{\partial \xi} \right\}$$

Setzt man nun voraus, daß, außer Funktion f_0 , die Funktion f_1 auch von der Koordinate ξ unabhängig ist, und führt man aus (20) die Randbedingung $f'(\infty) = 1$ und den Faktor $\alpha = 1$ ein, so erhält man aus (21) die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$(22) \quad f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' - 2(\beta - 1) f_0'' f_1 = [f_0(\infty) - \eta] \eta = \infty$$

mit den Randbedingungen

$$(23) \quad \begin{array}{l} \eta = 0 : \quad f_1' = 0 \quad , \quad f_1 = 0 \\ \eta = \infty : \quad f_1' = \eta \quad , \quad f_1'' = 1 \end{array}$$

welche mit der, für die Bestimmung der nullten Funktion $F_{1,0}$ der GÖRTLERSchen Reihe [1]

$$(24) \quad F_1(\xi, \eta) = F_{1,0}(\eta) + F_{1,1}(\eta) \xi + F_{1,2}(\eta) \xi^2 + \dots,$$

dienenden Differentialgleichung übereinstimmt.

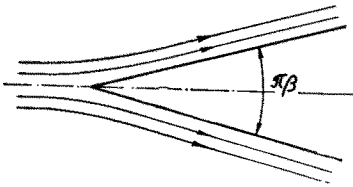


Abb. 3

Die Übereinstimmung dieser zwei Differentialgleichungen bestätigt den Schluß, der, schon auf Grund von der Differentialgleichung (22) selbst, gezogen werden könnte, daß auch in Falle der, zusammen mit der Grundströmung, gleichmäßig schnellrotierenden Konturen, die „ähnlichen“ Lösungen der Grenzschichtgleichungen nur auf den keilförmigen Schaufeln möglich sind, wobei der Parameter β seine ursprüngliche Bedeutung behält.

Für $\beta = 0$, was dem Fall der Plattenumströmung entspricht, die Gleichung (22) lautet

$$(25) \quad f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' + 2 f_0'' f_1 = [f_0(\infty) - \eta] \eta = \infty$$

mit den Randbedingungen

$$(26) \quad \begin{array}{l} \eta = 0 : \quad f_1' = 0 \quad , \quad f_1 = 0 \\ \eta = \infty : \quad f_1' = \eta \quad , \quad f_1'' = 1 \end{array}$$

Bei der Lösung des gleichen Problems TING-YI-LI [5] hat die folgende Differentialgleichung

$$(27) \quad 2 f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' + 2 f_0'' f_1 = 0$$

mit den gleichen Randbedingungen (26) erhalten. Der Faktor 2 vor dem ersten Glied der Gleichung (27) erscheint dabei infolge unterschiedlicher Form der in beiden Fällen benutzten Koordinate η . Bei Umrechnung der Gleichung (27) auf die in dieser Arbeit eingeführte Koordinate η , würde dieser Faktor verschwinden.

Aus dem Vergleich mit der Gleichung (25) folgt weiter, daß auf der rechten Seite der Gleichung (27) das Glied $[f_0(\infty) - \eta]_{\eta=\infty}$ erscheint nicht, weil man von Anfang

an das entsprechende Glied $\pm 2\omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=\infty}$ in der Gleichung (6) als vernach-

lässigbare Größe betrachtet. Da man in dieser Arbeit aber, die Fälle mit hinreichend großen Winkelgeschwindigkeiten ω untersucht, dieses Glied soll behalten werden.

Die nähere Untersuchung der Differentialgleichung (22) für verschiedene Keilwinkeln $\pi\beta$ keilförmiger Körper, geht aus dem Rahmen dieser Arbeit hervor, und daher wird sie den Gegenstand weiterer Forschung darstellen.

SCHRIFTTUM

[1] V. Saljnikov, *Entwicklung einer Reihenmethode zur Berechnung laminarer inkompressibler Grenzschichten bei Strömungen um eine krummlinige Wand mit konstanter Drehung* — ZAMM — Sonderheft (Gamm—Tagung—Bon) Band 42/1962.

[2] H. Schlichting, *Grenzschichttheorie* — Braun—Verlag—Karlsruhe 1959.

[3] V. M. Falkner, S. W. Skan, *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, Phil. Mag. 12,865(1931), ARC Report 1314 (1930).³

[4] D. R. Hartree, *On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer* — Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, Part II, 223 (1937).

[5] Ting — Yi — Li, *Simple Shear Flow Past a Flat Plate in an Incompressible Fluid of Small Viscosity* — Journal of the Aeronautical Sciences — Vol. 22, No. 9, September 1955.