

ÜBERTRAGUNG DER GÖRTLERSCHEN REIHE AUF DIE BERECHNUNG VON TEMPERATURGRENZSCHICHTEN AN ROTATIONSKÖRPERN

Vladan D. Dorđević

(Vorgelegt am 28. III. 1962)

Obwohl der Versuch eine allgemeine Methode für die Berechnung von Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in der Grenzschicht zu entwickeln — einigen Verfassern teilweise auch früher gelungen war, jedoch hat erst Görtler [1] in 1957 diese Aufgabe auf eine vom mathematischen, als auch vom Standpunkt der praktischen Anwendung befriedigende Weise gelöst.

Diese Methode die ursprünglich sich nur auf die ebene dynamische Grenzschicht bezog, hat Wrage [2], ein Jahr später, auf das Problem der Berechnung von ebenen Temperaturgrenzschichten übertragen. Saljnikov [3] ist dann in 1960 gelungen das ähnliche Verfahren für die Berechnung von dynamischen Grenzschichten an Rotationskörpern zu entwickeln.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass diese Methode kann, beim Erhalten aller ihren Vorteile [1] auch auf das Problem der Berechnung von Temperaturgrenzschichten an Rotationskörpern übertragen werden.

Differentialgleichungssystem, das die axialsymmetrischen Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichten an Rotationskörpern in einer stationären inkompressiblen Strömung bestimmt, lautet:

$$(1) \quad \begin{aligned} (ru)_x + (rv)_y &= 0 \\ uu_x + vv_y &= \nu u_{yy} + U(x)U'(x) \\ uT_x + vT_y &= \frac{\lambda}{\rho g c_p} T_{yy} + \frac{\nu}{g c_p} u_y^2 + \frac{1}{\rho g c_p} u p'(x) \end{aligned}$$

Dabei benutzt man das krummlinige Koordinatensystem x, y , das in Abb. 1 gezeichnet ist, in der x — die längs eines Meridians gemessene Länge, y — den Normalabstand zur Körperoberfläche und $r(x)$ — den jeweiligen Radius des Querschnittes bezeichnen.

Der Konturpunkt $x=0$ fällt mit dem vorderen Teilungspunkt der Strömung um den Rotationskörpern zusammen. In diesem System seien:

u bzw. v — die Geschwindigkeitskomponenten in x — bzw. y — Richtung,
 $U(x)$ — die gegebene Geschwindigkeitsverteilung der äusseren Potentialströmung,

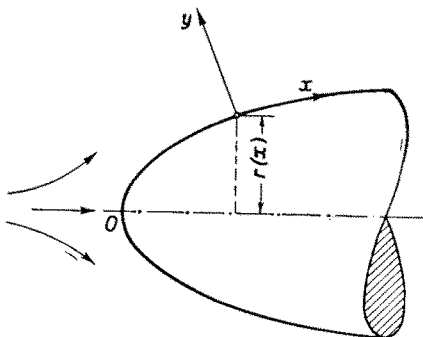


Abb. 1

$p(x)$ — die entsprechende Druckverteilung und

T — die Temperatur.

In den Differentialgleichungen (1) stellen

g — die Erdbeschleunigung

ρ — die Dichte

ν — die kinematische Zähigkeit

λ — die Wärmeleitfähigkeit und

c_p — die spezifische Wärme, dar.

Ausserdem Indices x, y kennzeichnen partielle Ableitungen nach den entsprechenden Variablen und $U'(x) = \frac{dU}{dx}$ bzw. $p'(x) = \frac{dp}{dx}$ bedeutet.

Obwohl in den Gleichungen (1) ρ als const. angenommen wird, wird in dritter Gleichung (1) dass die Kompressionswärme berücksichtigende Glied

$\frac{1}{\rho g c_p} u p'(x)$ behalten, was schon Wrage in seiner Arbeit [2] als zweckmässig

betrachtete. Aus der Tatsache dass in zweiter Gleichung (1) die Massenkräfte, unter anderem der Auftrieb, vernachlässigt sind, folgt, daß hier nur die Temperaturgrenzschichten in erzwungener Strömung behandelt sein werden. Dies bedeutet, daß man das Görtlersche Verfahren [1] zunächst auf die ersten zwei, die inkompressible Geschwindigkeitsgrenzschicht an einem Rotationskörper, bestimmenden Gleichungen (1) und auf die entsprechenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{für } y = 0 \\ u \rightarrow U(x) & \quad \text{für } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

übertragen könnte. Dies ist aber in der Arbeit [3] schon durchgeführt worden. Es bleibt also noch die dritte, die Temperaturgrenzschicht bestimmende Differentialgleichung (1) auf ähnliche Weise zu behandeln, was der Gegenstand vorliegender Arbeit darstellt.

Wenn man in diese Gleichung die neuen Veränderlichen des axialsymmetrischen Problems [3].

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{L^2}} \int_0^x U(x) r^2(x) dx, \quad \eta = \frac{U(x) r(x) y}{\sqrt{L} / 2 \xi}$$

einführt, wobei L — eine charakteristische Länge darstellt, dann erhält man die Gleichung

$$(2) \quad \frac{1}{P} T_{\eta\eta} - 2\xi F_{\eta} T_{\xi} + (2\xi F_{\xi} + F) T_{\eta} = \frac{U^2(\xi)}{g c_p} [F_{\eta} \beta(\xi) - F_{\eta}^2]$$

in welcher P — die Prandtlsche Zahl bedeutet.

$F(\xi, \eta)$ und $\beta(\xi)$ stellen dabei die in der Arbeit [3] auf folgende Weise definierten dimensionlose Stromfunktion und Hauptfunktion der axialsymmetrischen Grenzschicht dar:

$$F(\xi, \eta) = \frac{r(x) \psi(x, y)}{\sqrt{L} / 2 \xi}, \quad \beta(\xi) = \frac{2 \xi \nu L^2 U'(x)}{U^2(x) r^2(x)}$$

wo $\psi(x, y)$ — die durch die Ausdrücke

$$u = \frac{1}{r} (\psi r)_y, \quad \vartheta = - \frac{1}{r} (\psi r)_x$$

eingeführte Stromfunktion kennzeichnet.

Die erhaltene Gleichung (2) stimmt mit der entsprechenden Differentialgleichung des ebenen Falls [2] überein, obwohl die Veränderlichen ξ, η und die Funktionen $\beta(\xi)$ und $F(\xi, \eta)$ in einer anderen Form dort definiert wurden.

Görtler [1] und Saljnikov [3] zeigten aber, dass unabhängig davon, bei aller für die Praxis wichtigen ebenen als auch axialsymmetrischen Problemen, die entsprechenden Hauptfunktionen in der Form folgender Potenzreihen:

$$(3) \quad \beta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \dots$$

und:

$$(4) \quad F(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \xi + \beta_3 \xi^{\frac{3}{2}} + \dots$$

dargestellt werden können. Dabei β_0 nimmt die Werte 0,1 und $\frac{1}{2}$ an, während

die anderen Koeffizienten β_i ($i = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) von speziellen Daten jedes

jeweiligen Problems abhängen. Die entsprechenden dimensionlosen Stromfunktionen lauten:

$$(5) \quad F(\xi, \eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) \xi + F_2(\eta) \xi^2 + \dots$$

und:

$$(6) \quad F(\xi, \eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) \xi^{\frac{1}{2}} + F_0(\eta) \xi + F_3(\eta) \xi^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Die Funktion $U(\xi)$ die in der Gleichung (2) erscheint, hat auch die selbe Form:

$$U(\xi) = U_0 \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} \beta(\xi) d\xi \right] \quad \text{mit } U_0 = U(\xi_0)$$

für die ebenen, als auch für die axialsymmetrischen Problemen.

Dies bedeutet was die Behandlung der Gleichung (2) und der entsprechenden Differentialgleichung des ebenen Falls betrifft, daß man rein formal die Probleme der Temperaturgrenzschicht nicht auf die ebenen und axialsymmetrischen verteilen soll, sondern auf diejenigen denen die Hauptfunktion in der Form (3) bzw. (4) entspricht. Die Klassifikation der Temperaturgrenzschichtprobleme kann also folgendermaßen durchgeführt werden.

I. Der in der Form (3) dargestellten Hauptfunktion entsprechen die folgenden Probleme:

1. für $\beta_0 = 0$ — die ebene Umströmung einer Platte bzw. einer mit vorderer Spitze versehenen Kontur und die axialsymmetrische Umströmung ringförmiger Rotationskörper mit vordere Spitze der Kontur.

2. Für $\beta_0 = 1$ — die ebene Umströmung symmetrischer Konturen mit vorderem Staupunkt und die axialsymmetrische Umströmung symmetrischer Ringflügel.

II. Der in der Form (4) dargestellten Hauptfunktion $\beta(\xi)$ gehören die folgenden Probleme:

1. für $\beta_0 = 1$ — die ebene Umströmung asymmetrischer Konturen mit vorderem Staupunkt und die axialsymmetrische Umströmung asymmetrischer Ringflügel.

2. für $\beta_0 = \frac{1}{2}$ — die axialsymmetrische Umströmung voller Rotationskörper mit vorderen Staupunkt.

Der Fall $\beta_0 = 0$ hat in dieser Klasse keine praktische Bedeutung.

In seinen Untersuchungen des Temperaturgrenzschichtproblems, Wrage [2] hat sich nur auf diejenigen ebenen Fälle beschränkt, die der in der Form (3) dargestellten Hauptfunktion $\beta(\xi)$ entsprechen. Aus der oben durchgeführten Klassifikation folgt aber daß man seine Rezultate auf einige axialsymmetrischen Probleme auch anwenden kann.

Nun werden wir uns auf diejenigen Temperaturgrenzschichtproblemen ausführlicher aufhalten, bei denen man die Hauptfunktion $\beta(\xi)$ in der Form (4) darstellen kann. Dabei wird man sich, wie in der Arbeit [2] auf die Prandtlsche Zahl $P=1$ beschränken, die wie bekannt, ziemlich gut den Gasen entspricht.

Anstatt der Temperatur $T(\xi, \eta)$ führen wir in die Differentialgleichung (2) bei der Behandlung des sogenannten Thermometerproblems die in der selben Form wie in [2] definierten Funktion $R(\xi, \eta)$ ein. Dies gilt auch für die Funktion $H(\xi, \eta)$ des Kühlungs — bzw. Heizungsproblems die aus dem ebenen Fall übernommen wird. Auf diese Weise, außer anderer Vorteile dieser Funktionsdarstellung (s. [2]) erreicht man damit, daß die Differentialgleichungen für die einzelnen universellen Funktionen unseres Problems stimmen mit entsprechenden Gleichungen aus der Arbeit [2] überein, was die spätere Vertafelung dieser Funktionen wesentlich erleichtern kann.

Die für die Bestimmung der Funktion:

$$(7) \quad R(\xi, \eta) = 2gc_p \frac{T - T_1}{U^2 \bar{\xi}}$$

dienende Differentialgleichung, wobei $T_1(x)$ — die Temperatur außerhalb der Grenzschicht darstellt, lautet:

$$(8) \quad A[R] = 2 [\beta(\xi) F_{\eta} R - F_{\eta}^2 R_{\eta}]$$

mit den Randbedingungen:

$$R_{\eta}(\xi, 0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} R(\xi, \eta) = 0$$

Dabei wurde zur Vereinfachung der Operator $A[X]$ gemäß

$$A[X] \equiv X_{\eta\eta} - 2\xi F_{\eta} X_{\xi} + (2\xi F_{\xi} + F) X_{\eta}$$

eingeführt.

Setzt man nun die in unserem Fall geltenden Funktionen

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \xi^{\frac{k}{2}}, \quad F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \left(\eta\right) \xi^{\frac{k}{2}}$$

und die in ähnlicher Form dargestellten Funktion

$$R(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \left(\eta\right) \xi^{\frac{k}{2}}$$

in die Differentialgleichung (8) ein, so erhält man vermittels Koeffizientenvergleich das rekursiv lösbar Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten-Funktionen $R_k(\tau)$:

$$R_0'' + F_0 R_0' - 2\beta_0 F_0' R_0 = -2F_0'' F_0'' \quad (\text{für } k=0)$$

und:

$$A_k \left[R_k \right] = R_k'' + F_0 R_k' - (k + 2\beta_0) F_0' R_k = \varphi_k \quad (\text{für } k=1, 2, 3, \dots)$$

mit den rechten Seite:

$$\begin{aligned} \varphi_k = & -2 \sum_{i=0}^k F_i F_{k-i}'' - \sum_{i=0}^{k-i} (k-i+1) F_{k-i} R_i' + \sum_{i=0}^{k-1} i F_{k-i} R_i' + \\ & + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{m=0}^{k-i} \frac{\beta_{k-i-m}}{2} F_m' \right) R_i \end{aligned}$$

und den Randbedingungen

$$R_k(0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_k(\tau) = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Um die Differentialgleichungen für $k=1, 2, 3, \dots$ von den die speziellen Daten jedes jeweiligen Problems enthaltenden Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ zu befreien, sollen die Koeffizientenfunktionen R_k in der Form folgender linearen Kombinationen

$$\begin{aligned} R_1 &= \langle \langle r_{11} \rangle \rangle \\ R_2 &= \langle \langle r_{11}, r_{12} \rangle \rangle \\ R_3 &= \langle \langle r_{11}, r_{12}, r_{13} \rangle \rangle \\ R_4 &= \langle \langle r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14} \rangle \rangle \end{aligned}$$

dargestellt werden. Die Klammern $\langle \rangle$ stehen dabei als Abkürzung für die Summe über die universellen Funktionen r_{ik}, \dots, r_{ir} mit Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$.

Für die universellen Funktionen mit ganzzahligen Indizen erhält man die selben Differentialgleichungen wie in der Arbeit [2]. Die Differentialgleichungen für die übrigen universellen Funktionen werden im Anhang angegeben.

Die erste Differentialgleichung (für $k=0$) aber, kann nicht vom Einfluss des Koeffizienten β_0 befreit werden, da sie außer dem Koeffizienten selbst, die Funktion $F(\tau)$ der Geschwindigkeitsgrenzschicht enthält, welche für das jeweilige β_0 berechnet werden soll.

Bei der Behandlung des Kühlungs — bzw Heizungsproblems führt man die sogenannte „Zusatzfunktion“ $H(\zeta, \tau)$ folgendermassen

$$(9) \quad T(\xi, \tau) = T_1 + \frac{U^2(\xi)}{2gc_p} R(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)$$

ein, wobei die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(10) \quad A[H] = 0$$

mit den Randbedingungen

$$H(\xi, 0) = H_w(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\xi^k}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} H(\xi, \tau) = 0$$

Die Koeffizienten α_k ($k=0, 1, 2, \dots$) erhält man aus dem Ausdruck (9), nach Einsetzen der Bernoullischen Gleichung:

$$T_1 + \frac{U^2}{2gc_p} = T_t = \text{const.}$$

auf folgende Weise:

$$T(\xi, 0) = T_w(\xi) = T_t + \frac{U^2}{2gc_p} [R(\xi, 0) - 1] + H_w(\xi)$$

In beiden in Betracht kommenden Fällen: $\beta_0 = 1$ und $\beta_0 = \frac{1}{2}$ muß die Temperaturverteilung an der Wand $T_w(\xi)$ in folgender Reihenform

$$T_w(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k \frac{\xi^k}{2}$$

darstellbar sein. Da aber die Funktion $T_w(\xi)$ fast immer vorgegeben ist, der letzte Ausdruck stellt eine Beschränkung für die möglichen Temperaturverteilungen an der Wand dar, welche praktisch keine Bedeutung hat.

Führt man nun die Differentialgleichung (10) die in der folgenden Reihenform dargestellten Funktion $H(\xi, \tau)$:

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\tau) \frac{\xi^k}{2}$$

ein, so erhält man nach dem Koeffizientenvergleich das rekursiv lösbares Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten — Funktionen $H_k(\tau)$

$$H_0'' + F_0 H_0' = 0 \quad (\text{für } k=0)$$

und

$$B_k \left[\frac{H_k}{2} \right] = \frac{H_k''}{2} + F_0 \frac{H_k'}{2} - k F_0' \frac{H_k}{2} = \psi_k \quad \text{für } k=1, 2, 3, \dots$$

mit der rechten Seite:

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left[i F_{k-i}' \frac{H_i}{2} - (k-i+1) F_{k-i} \frac{H_i'}{2} \right]$$

und den Randbedingungen:

$$H_k(0) = \alpha_k, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} H_k(\eta) = 0 \quad k=0, 1, 2, 3, \dots$$

Um die Differentialgleichungen für $k=1, 2, 3, \dots$ und die entsprechenden Randbedingungen von den speziellen Daten jedes jeweiligen Problems enthaltenden Koeffizienten α_k und β_k befreien zu können, werden die Koeffizien-

tenfunktionen H_k in der Form folgender linearen Kombinationen

$$H_0 = \langle \langle h^0 \rangle \rangle$$

$$H_{\frac{1}{2}} = \langle \langle h^{\frac{1}{2}}, h_1^0 \rangle \rangle$$

$$H_1 = \langle \langle h^1, h_{11}^0, h_{12}^0, h_{1\frac{1}{2}}^1 \rangle \rangle$$

$$H_3 = \langle \langle h^{\frac{3}{2}}, h_{111}^0, h_{112}^0, h_{121}^0, h_{1\frac{1}{2}}^1, h_{1\frac{1}{2}}^2, h_{1\frac{1}{2}}^3 \rangle \rangle$$

$$H_2 = \langle \langle h^2, h_{1111}^0, h_{1112}^0, h_{1121}^0, h_{11\frac{1}{2}}^1, h_{11\frac{1}{2}}^2, h_{11\frac{1}{2}}^3, h_{1\frac{1}{2}}^4 \rangle \rangle$$

usw. dargestellt. Die Klammern stehen dabei als Abkürzung für die Summe über die universellen Funktionen $h_{rs}^i \dots$ mit Koeffizienten $\alpha_i \beta_r \beta_s \beta_r$. Die universellen Funktionen mit obigem Index „0“ stimmen mit den zur Berechnung der Querströmungskomponente am schiebenden Zylinder dienenden universellen Funktionen $w_{jk} \dots$ (s. [1]) überein. Für die universellen Funktionen mit ganzzahligen Indizes andererseits, erhält man dieselben Gleichungen wie in der Arbeit [2]. Für die übrigen universellen Funktionen werden die entsprechenden Differentialgleichungen im Anhang angegeben.

Auf diese Weise sind jetzt fast für die Praxis wichtigen ebenen und axial-symmetrischen Probleme der Temperaturgrenzschicht umfasst. Die numerischen Beispiele dieser Methode sollen erst nach der Vertafelung von universellen Funktionen berechnet werden, die im Institut für angewandte Mathematik und Mechanik in Freiburg an elektronischer Rechenanlage durchgeführt wird.

SCHRIFTTUM

[1] Görtler H., *A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows*, Journ. of Math. and Mech., Vol. 6, No. 1, January, 1957.

[2] Wrage E., *Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Temperaturgrenzschichten*, DVL Bericht Nr. 81, 1958.

[3] Saljnikov V., *Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern*, DVL Bericht Nr. 133, 1960.

ANHANG

Die Differentialgleichungen für die universellen Funktionen des Thermometerproblems lauten:

$$A_2 \left[\begin{matrix} r_1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_1'' - 2 f_1 R_0' + 2 \left(F_0' + \beta_0 f_1' \right) R_0$$

$$A_1 \left[\begin{matrix} r_1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_1'' - 2 f_1'' - 3 R_0' f_1' - 2 f_1 r_1' - f_1' r_1 - \\ + 2 f_1' R_0 + 2 F_0' r_1 + 2 \beta_0 f_1' R_0 + 2 \beta_0 f_1' r_1$$

$$A_3 \left[\begin{matrix} r_1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_1'' - 4 f_1' f_1'' - 4 R_0' f_1' - 3 r_1' f_1' - 2 f_1 r_1' + \\ + f_1' \left(r_1 + 2 R_0 \right) + 2 f_1' \left(r_1 + r_1 \right) + 2 \beta_0 \left(R_0 f_1' + r_1 f_1' + \right. \\ \left. + r_1 f_1' \right) + 2 F_0' r_1$$

$$A_3 \left[\begin{matrix} r_1 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_1'' - 4 f_1' f_1'' - 4 R_0' f_1' - 3 r_1' f_1' - 2 f_1 r_1' + \\ + f_1' \left(r_1 + 2 R_0 \right) + 2 f_1' \left(r_1 + R_0 \right) + 2 \beta_0 \left(R_0 f_1' + r_1 f_1' + r_1 f_1' \right) + \\ + 2 F_0' r_1 + 2 F_0' r_1$$

$$A_2 \left[\begin{matrix} r_3 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_3'' - 4 R_0' f_3' + 2 F_0' R_0 + 2 \beta_0 R_0 f_3'$$

$$A_2 \left[\begin{matrix} r_1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_1'' - 4 f_1' f_1'' - 2 f_1'' f_1' - 5 R_0' f_1' - \\ - 4 r_1' f_1' - 3 f_1 r_1' - 2 f_1 r_1' + f_1' \left(r_1 + 2 R_0 \right) + \\ + 2 f_1' \left(r_1 + r_1 \right) + f_1' \left(3 r_1 + 2 r_1 \right) + 2 \beta_0 \left(R_0 f_1' + \right. \\ \left. + r_1 f_1' + r_1 f_1' \right) + 2 F_0' r_1$$

$$A_2 \left[\begin{matrix} r_1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right] = -4 F_0'' f_1'' - 4 f_1' f_1'' - 4 f_1'' f_1' - 5 R_0' f_1' - 4 f_1 r_1' - \\ - 3 f_1 r_1' - 3 f_1 r_1' - 2 f_1 r_1' + f_1' \left(r_1 + 2 R_0 \right) + 2 f_1' \left(r_1 + R_0 \right) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 f_1' \left(r_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + r_{\frac{1}{2}} \right) + f_1' \left(3 r_{\frac{1}{2}} + 2 r_1 + 2 r_{\frac{1}{2}} \right) + 2 F_0' \left(r_{\frac{1}{2}} + r_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \right) + \\
 &+ 2 \beta_0 \left(R_0 f_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}' + f_{\frac{1}{2}}' r_1 + f_{\frac{1}{2}}' r_1 + f_1' r_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + f_1' r_{\frac{1}{2}} \right) \\
 A_2 \left[r_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}} \right] &= -4 F_0' f_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}'' - 4 f_1' f_3'' - 4 R_0' f_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}' - 4 f_3' r_1' - 2 f_1' r_3' + \\
 &+ f_3' \left(r_{\frac{1}{2}} + 2 R_0 \right) + f_1' \left(3 r_{\frac{3}{2}} + 2 R_0 \right) + 2 F_0' \left(r_{\frac{1}{2}} + r_{\frac{3}{2}} \right) + \\
 &+ 2 \beta_0 \left(R_0 f_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}' + f_3' r_{\frac{1}{2}} + f_1' r_{\frac{3}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen:

$$r' \dots (0) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} r \dots (\eta) = 0$$

Die Differentialgleichungen für die universellen Funktionen des Heizungs- bzw. Kühlungsproblems lauten:

$$\begin{aligned}
 B_{\frac{1}{2}} \left[h^2 \right] &= 0 \\
 B_1 \left[h^{\frac{1}{2}} \right] &= f_1' h^{\frac{1}{2}} - 2 f_1 h^{\frac{1}{2}'} \\
 B_{\frac{3}{2}} \left[h^{\frac{3}{2}} \right] &= 0 \\
 B_{\frac{3}{2}} \left[h^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \right] &= f_1' h^{\frac{1}{2}} - 3 f_1 h^{\frac{1}{2}'} + 2 f_1' h^{\frac{1}{2}} - 2 f_1 h^{\frac{1}{2}'} \\
 B_{\frac{3}{2}} \left[h_1^{\frac{1}{2}} \right] &= f_1' h^{\frac{1}{2}} - 3 f_1 h^{\frac{1}{2}'} \\
 B_{\frac{3}{2}} \left[h^{\frac{1}{2}} \right] &= 2 f_1' h^{\frac{1}{2}} - 2 f_1 h^{\frac{1}{2}'} \\
 B_2 \left[h^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} \right] &= f_1' h^{\frac{1}{2}} - 4 f_1 h^{\frac{1}{2}'} + 2 f_1' h^{\frac{1}{2}} - 3 f_1 h^{\frac{1}{2}'} + \\
 &+ 3 f_1' h^{\frac{1}{2}} - 2 f_1 h^{\frac{1}{2}'}
 \end{aligned}$$

$$B_2 \left[h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] = f_{\frac{1}{2}}' h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 4 f_{\frac{1}{2}} h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2 f_1' h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 3 f_1 h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 3 f_1' h_1^{\frac{1}{2}} - 2 f_1 h_1^{\frac{1}{2}}$$

$$B_2 \left[h_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] = f_{\frac{3}{2}}' h_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} - 4 f_{\frac{3}{2}} h_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$B_2 \left[h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] = 2 f_{\frac{1}{2}}' h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 3 f_{\frac{1}{2}} h_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 3 f_1' h_1^{\frac{1}{2}} - 2 f_1 h_1^{\frac{1}{2}}$$

$$B_2 \left[h_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \right] = 3 f_{\frac{1}{2}}' h_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 2 f_{\frac{1}{2}} h_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

mit den Randbedingungen:

$$h^i(0) = 1 \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} h^i(\tau) = 0$$

$$h^i \dots (0) = 0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} h^i \dots (\tau) = 0$$