PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 63—76.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES GÉNÉRALISÉES

Dragoslav S. Mitrinović et *Petar M. Vasić*

(Communiqué le 31 octobre 1963)

0. M. Ghermănescu [1] a étudié l'équation fonctionnelle linéaire suivante

$$af(x, y, z)+bf(y, z, x)+cf(z, x, y)=0,$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

Dans cet article nous déterminerons la solution générale de l'équation plus générale

$$af(x, y, z)+bf(y, z, x)+cf(z, x, y)=\alpha f(x, x, y)+\beta f(y, y, z)+\gamma f(z, z, x) \tag{0.1}$$

(a, b, c; α, β, γ sont des constantes réelles) qui sera nommée: *équation fonctionnelle linéaire généralisée*. Toutes les fonctions envisagées dans cette Note sont des fonctions réelles des variables réelles.

Par le même procédé on peut trouver la solution générale de l'équation (0.1), où le second membre est remplacé par l'une des expressions suivantes:

$$L_1 \equiv \alpha_1 f(x, x, z)+\beta_1 f(y, y, x)+\gamma_1 f(z, z, y),$$
$$L_2 \equiv \alpha_2 f(x, y, x)+\beta_2 f(y, z, y)+\gamma_2 f(z, x, z),$$
$$L_3 \equiv \alpha_3 f(x, z, x)+\beta_3 f(y, x, y)+\gamma_3 f(z, y, z),$$
$$L_4 \equiv \alpha_4 f(y, x, x)+\beta_4 f(z, y, y)+\gamma_4 f(x, z, z),$$
$$L_5 \equiv \alpha_5 f(z, x, x)+\beta_5 f(x, y, y)+\gamma_5 f(y, z, z),$$
$$L_6 \equiv \alpha_6 f(x, x, x)+\beta_6 f(y, y, y)+\gamma_6 f(z, z, z).$$

Plus généralement, par cette dénomination, sera considérée toute équation de la forme suivante:

$$af(x, y, z)+bf(y, z, x)+cf(z, x, y)=\alpha f(x, x, y)+\beta f(y, y, z)+\gamma f(z, z, x) + L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6,$$

où $L_1, L_2, \ldots, L_6$ sont donnés plus haut.

Pour l'équation (0.1) nous allons supposer que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$ (pour le cas où $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$, *voir* [1]) et $a^2+b^2+c^2>0$.

À partir de (0.1), en permutant cycliquement les variables x, y, z, on obtient les équations suivantes:

$$af(y, z, x)+bf(z, x, y)+cf(x, y, z)=\alpha f(y, y, z)+\beta f(z, z, x)+\gamma f(x, x, y), \tag{0.2}$$

$$af(z, x, y)+bf(x, y, z)+cf(y, z, x)=\alpha f(z, z, x)+\beta f(x, x, y)+\gamma f(y, y, z). \tag{0.3}$$

Il faut distinguer les deux cas suivants: 1° $\Delta \neq 0$, 2° $\Delta = 0$, où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

1. $\Delta \neq 0$. De (0.1), (0.2) et (0.3) on obtient

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} \alpha F(x, y) + \beta F(y, z) + \gamma F(z, x) & b & c \\ \alpha F(y, z) + \beta F(z, x) + \gamma F(x, y) & a & b \\ \alpha F(z, x) + \beta F(x, y) + \gamma F(y, z) & c & a \end{vmatrix}, \tag{1.1}$$

où $f(u, u, v) = \dfrac{1}{\Delta} F(u, v)$.

Pour que (1.1) soit une solution de l'équation (0.1), la condition suivante doit être remplie

$$\begin{aligned} &\alpha \{(\Delta - \Delta_2) F(x, y) - \Delta_3 F(y, x) - \Delta_1 F(x, x)\} \\ &+ \beta \{(\Delta - \Delta_2) F(y, z) - \Delta_3 F(z, y) - \Delta_1 F(y, y)\} \\ &+ \gamma \{(\Delta - \Delta_2) F(z, x) - \Delta_3 F(x, z) - \Delta_1 F(z, z)\} = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

avec

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ b & c & a \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

En permutant cycliquement les variables x, y, z dans (1.2), on obtient deux nouvelles équations. Le système de ces trois équations est compatible si, et seulement si, la condition suivante est remplie

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \vee_{\text{excl}} \alpha = \beta = \gamma.$$

Considérons, en premier lieu, le cas pour lequel on a $\alpha + \beta + \gamma = 0$. En faisant $x = y = z$, puisque $a + b + c \neq 0$, l'équation (0.1) fournit $F(x, x) \equiv 0$. En utilisant la dernière égalité, l'équation (1.2) pour $z = x$, se ramène à

$$[\alpha(\Delta - \Delta_2) - \beta \Delta_3] F(x, y) - [\alpha \Delta_3 - \beta(\Delta - \Delta_2)] F(y, x) = 0. \tag{1.3}$$

L'équation (1.3), si l'on fait la substitution suivante

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix},$$

se transforme en

$$-[\alpha \Delta_3 - \beta(\Delta - \Delta_2)] F(x, y) + [\alpha(\Delta - \Delta_2) - \beta \Delta_3] F(y, x) = 0. \tag{1.4}$$

Si l'on a

$$(\alpha^2 - \beta^2)[(\Delta - \Delta_2)^2 - \Delta_3^2] \neq 0,$$

de (1.3) et (1.4) on trouve $F(x, y) \equiv 0$.

La condition

$$(\alpha^2 - \beta^2)[(\Delta - \Delta_2)^2 - \Delta_3^2] = 0 \tag{1.5}$$

conduit à $(\Delta-\Delta_2)^2-\Delta_3^2=0$. En effet, si dans l'équation (1.2) on met $z=y$, on obtient

$$(\alpha^2-\gamma^2)\,[(\Delta-\Delta_2)^2-\Delta_3^2]=0.$$

La dernière condition, avec (1.5), conduit à $\alpha=\beta=\gamma=0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$.

Dans le cas où $\Delta-\Delta_2=\Delta_3\ (\neq 0)$ l'équation (1.3) donne

$$(\alpha-\beta)\,\Delta_3\,\{F(x, y)-F(y, x)\}=0, \tag{1.6}$$

d'où, si l'on a $\alpha\neq\beta$, on trouve

$$F(x, y)=G(x, y)+G(y, x), \tag{1.7}$$

où G désigne une fonction arbitraire telle que $G(x, x)\equiv 0$.

Exemple[1]. La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)-2f(z, x, y)=-5f(x, x, y)+4f(y, y, z)+f(z, z, x)$$

est la fonction suivante

$$f(x, y, z)=G(x, y)+G(y, x)-2\,G(y, z)-2\,G(z, y)+G(z, x)+G(x, z)$$

G désignant une fonction arbitraire telle que $G(x, x)\equiv 0$.

Si l'on a $\Delta-\Delta_2=-\Delta_3\ (\neq 0)$, de (1.3) on obtient

$$(\alpha+\beta)\,\Delta_3\,\{F(x, y)+F(y, x)\}=0. \tag{1.8}$$

La solution générale de l'équation (1.8), dans le cas où $\alpha+\beta\neq 0$, est donnée par

$$F(x, y)=G(x, y)-G(y, x), \tag{1.9}$$

où G est une fonction quelconque.

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)+2f(z, x, y)=f(x, x, y)+2f(y, y, z)-3f(z, z, x)$$

a pour solution générale la fonction

$$f(x, y, z)=5\,G(x, y)-5\,G(y, x)-4\,G(y, z)+4\,G(z, y)-G(z, x)+G(x, z),$$

où G est une fonction quelconque.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que $\alpha\neq\beta$ et $\alpha+\beta\neq 0$. Dans le cas contraire, étant donné que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$, on a $\alpha\neq\gamma$ et $\alpha+\gamma\neq 0$. Donc, par un procédé analogue, on obtient (1.7) et (1.9).

La condition (1.2), dans le cas où $\Delta_3=\Delta-\Delta_2=0$, est remplie pour toute fonction $F(x, y)$ ayant la propriété $F(x, x)\equiv 0$.

Exemple. L'équation fonctionnelle suivante

$$f(x, y, z)+f(z, x, y)=f(y, y, z)-f(z, z, x)$$

a pour solution générale la fonction de la forme

$$f(x, y, z)=F(x, y)-F(y, z),$$

où F est une fonction arbitraire telle que $F(x, x)\equiv 0$.

---

[1] Tous les exemples, donnés dans cet article, sont résolus directement, sans utiliser les formules générales.

Si l'on a $(\Delta-\Delta_2)^2 \neq \Delta_3^2$, les équations (1.3) et (1.4) ont comme solution générale la solution triviale. D'après cela, de (1.1) on trouve

$$f(x, y, z) \equiv 0. \tag{1.10}$$

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)+f(y, z, x)=f(x, x, y)-f(z, z, x)$$

a $f(x, y, z) \equiv 0$ comme solution unique.

Passons à présent au cas $\alpha=\beta=\gamma$. Immédiatement on trouve

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3 \; (\neq 0).$$

L'équation cyclique (1.2) entraîne

$$(\Delta-\Delta_1) F(x, y)-\Delta_1 F(y, x)-\Delta_1 F(x, x)=\Delta_1 P(x)-\Delta_1 P(y), \tag{1.11}$$

où P est une fonction quelconque.

Dans le cas $\alpha=\beta=\gamma$, l'équation (0.1) pour $x=y=z$ devient

$$(a+b+c-3\alpha) F(x, x)=0. \tag{1.12}$$

Si l'on a $a+b+c=3\alpha$, on trouve $3\Delta_1=\Delta$ et la formule (1.11) reçoit la forme que voici:

$$2F(x, y)-F(y, x)=P(x)-P(y)+R(x),$$

avec $F(x, x)=R(x)$.

De là, en permutant les variables x et y, on obtient

$$-F(x, y)+2F(y, x)=P(y)-P(x)+R(y).$$

En résolvant ces équations, on a

$$F(x, y)=\frac{1}{3}\{P(x)-P(y)+2R(x)+R(y)\}.$$

En utilisant la dernière égalité, de (1.1) on tire

$$f(x, y, z)=Q(x)+Q(y)+Q(z), \tag{1.13}$$

avec $Q(x)=\Delta_1 R(x)$.

Exemple. La solution générale de l'équation suivante

$$2f(x, y, z)+f(y, z, x)=f(x, x, y)+f(y, y, z)+f(z, z, x)$$

est donnée par

$$f(x, y, z)=Q(x)+Q(y)+Q(z) \qquad (Q, \text{ une fonction arbitraire}).$$

Si l'on a $a+b+c \neq 3\alpha$, il faut que $F(x, x) \equiv 0$ et la formule (1.11) devient

$$(\Delta-\Delta_1) F(x, y)-\Delta_1 F(y, x)=\Delta_1 P(x)-\Delta_1 P(y). \tag{1.14}$$

On en déduit

$$-\Delta_1 F(x, y)+(\Delta-\Delta_1) F(y, x)=\Delta_1 P(y)-\Delta_1 P(x).$$

La dernière égalité avec (1.14) donne

$$F(x, y)=\frac{\Delta_1\{P(x)-P(y)\}}{\Delta},$$

avec l'hypothèse $\Delta \neq 2\Delta_1$. Alors, l'égalité (1.1) devient

$$f(x, y, z) \equiv 0. \tag{1.15}$$

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z) + 2f(y, x, z) - f(z, x, y) = f(x, x, y) + f(y, y, z) + f(z, z, x)$$

a pour solution générale $f(x, y, z) \equiv 0$.

Si $\Delta = 2\Delta_1$, on peut mettre (1.14) sous la forme suivante:

$$F(x, y) - P(x) = F(y, x) - P(y).$$

La solution générale de la dernière équation est

$$F(x, y) = P(x) + G(x, y) + G(y, x), \tag{1.16}$$

où P et G sont des fonctions quelconques, mais telles que

$$G(x, x) = -\frac{1}{2} P(x).$$

Donc, on peut mettre (1.16) sous la forme suivante:

$$F(x, y) = G(x, y) + G(y, x) - 2G(x, x)$$

et la formule (1.1) devient

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & G(x, y) + G(y, x) + G(y, z) + G(z, y) + G(z, x) + G(x, z) \\ & - 2G(x, x) - 2G(y, y) - 2G(z, z), \end{aligned} \tag{1.17}$$

où nous avons remplacé $G(x, y)\Delta_1$ par $G(x, y)$.

Exemple. Toutes les solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z) + 2f(y, z, x) + 3f(z, x, y) = 3f(x, x, y) + 3f(y, y, z) + 3f(z, z, x)$$

sont de la forme

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & G(x, y) + G(y, x) - 2G(x, x) + G(y, z) + G(z, y) - 2G(y, y) \\ & + G(z, x) + G(x, z) - 2G(z, z). \end{aligned}$$

Dans le cas où

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

de (1.2) on trouve

$$(\Delta - \Delta_2) F(x, y) - \Delta_3 F(y, x) - \Delta_1 F(x, x) = 0. \tag{1.18}$$

Supposons à présent que l'on ait $\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 \neq 0$. Dans ce cas, au moyen de la substitution $y = x$, l'équation (1.18) se réduit à $F(x, x) \equiv 0$. Vu la dernière égalité, l'équation (1.18) devient

$$(\Delta - \Delta_2) F(x, y) - \Delta_3 F(y, x) = 0.$$

On a aussi

$$-\Delta_3 F(x, y) + (\Delta - \Delta_2) F(y, x) = 0.$$

Le système des équations précédentes est compatible si, et seulement si, la condition suivante est remplie: $(\Delta - \Delta_2)^2 = \Delta_3^2$.

Si l'on a $\Delta - \Delta_2 = \Delta_3$ $(\neq 0)$, on obtient

$$F(x, y) = G(x, y) + G(y, x), \tag{1.19}$$

où G doit satisfaire à $G(x, x) \equiv 0$.

Exemple. Toute solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z) + f(z, x, y) = 2f(x, x, y) + f(y, y, z),$$

est donnée par la fonction

$$f(x, y, z) = G(x, y) + G(y, x) + 3G(y, z) + 3G(z, y) - G(z, x) - G(x, z),$$

où G est une fonction quelconque telle que $G(x, x) \equiv 0$.

Dans le cas où $\Delta - \Delta_2 = -\Delta_3$ $(\neq 0)$, la solution générale est

$$F(x, y) = G(x, y) - G(y, x). \tag{1.20}$$

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(y, z, x) + f(z, x, y) = -f(x, x, y) - f(y, y, z)$$

a comme solution générale la fonction

$$f(x, y, z) = G(z, x) - G(x, z) \qquad (G, \text{ une fonction arbitraire}).$$

Enfin, pour $\Delta - \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, la condition unique à laquelle doit satisfaire la fonction F est $F(x, x) \equiv 0$.

Exemple. La fonction $f(x, y, z) = F(x, y) + F(y, z)$ $(F(x, x) \equiv 0)$ est la solution générale de l'équation suivante

$$f(z, x, y) = f(x, x, y) + f(z, z, x).$$

La condition $(\Delta - \Delta_2)^2 \neq \Delta_3^2$ aboutit à $F(x, y) \equiv 0$.

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z) + f(y, z, x) = f(x, x, y)$$

a, pour solution générale, $f(x, y, z) \equiv 0$.

Passons à présent au cas $\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 = 0$. De (1.18), en permutant x et y, on trouve

$$-\Delta_3 F(x, y) + (\Delta - \Delta_2) F(y, x) - \Delta_1 F(y, y) = 0.$$

En utilisant la dernière égalité et l'équation (1.18), sous l'hypothèse $(\Delta - \Delta_2)^2 \neq \Delta_3^2$, on obtient

$$F(x, y) = \frac{(\Delta - \Delta_2) R(x) + \Delta_3 R(y)}{\Delta_1 + 2\Delta_3} \tag{1.21}$$

avec la notation $F(x, x) = R(x)$.

Exemple. Toute solution de l'équation fonctionnelle suivante

$$-2f(x, y, z) + f(y, z, x) = -f(z, z, x)$$

est donnée par

$$f(x, y, z) = 2R(x) + R(y) + 2R(z) \qquad (R, \text{ une fonction arbitraire}).$$

Dans le cas $\Delta - \Delta_2 = \Delta_3$ $(\neq 0)$, on obtient $\Delta_1 = 0$. Alors, l'équation (1.18) devient

$$F(x, y) = G(x, y) + G(y, x). \tag{1.22}$$

Exemple. La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)+f(y, z, x)=2f(x, x, y)-f(y, y, z)+f(z, z, x)$$

est

$$f(x, y, z)=2F(z, x)-F(y, z)+2F(x, z)-F(z, y) \qquad (F, \text{ une fonction arbitraire}).$$

Si l'on a $\Delta-\Delta_2=-\Delta_3\ (\neq 0) \Rightarrow \Delta_1=-2\Delta_3$, l'équation (1.18) devient

$$F(x, y)+F(y, x)=2F(x, x). \tag{1.23}$$

Si l'on y permute x et y, on obtient

$$F(x, y)+F(y, x)=2F(y, y). \tag{1.24}$$

En confrontant les équations (1.23) et (1.24), on trouve $F(x, x)=F(y, y)=N$ ($=$const) et l'équation (1.23) donne

$$F(x, y)=G(x, y)-G(y, x)+N. \tag{1.25}$$

Exemple. La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)+2f(z, x, y)=2f(x, x, y)-2f(y, y, z)+3f(z, z, x)$$

est déterminée par

$$f(x, y, z)=2F(x, y)-F(z, x)-2F(y, x)+F(x, z)+N \quad (F, \text{ une fonction arbitraire; } N=\text{const})$$

Enfin, la condition $\Delta-\Delta_2=\Delta_3=0$ entraîne $\Delta_1=0$ et alors l'équation (1.18) est satisfaite pour toute fonction F.

Exemple. La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$2f(x, y, z)+3f(y, z, x)+f(z, x, y)=f(x, x, y)+2f(y, y, z)+3f(z, z, x)$$

est

$$f(x, y, z)=F(y, z) \qquad (F, \text{ une fonction arbitraire}).$$

2. Étant donné que

$$\Delta\equiv(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\},$$

on a

$$\Delta=0 \Rightarrow a+b+c=0 \vee_{\text{excl}} a=b=c.$$

Considérons le cas où $a=b=c$. De (0.1) et (0.2) on tire

$$(\alpha-\gamma)F(x, y)+(\beta-\alpha)F(y, z)+(\gamma-\beta)F(z, x)=0, \tag{2.1}$$

avec la notation $f(x, x, y)=F(x, y)$. Si l'on a $\alpha=\beta=\gamma$, la condition (2.1) est remplie pour toute fonction F. Dans le cas où $\alpha=\beta=\gamma\ (\neq 0)$, l'équation (0.1) s'écrit

$$\{af(x, y, z)-\alpha f(x, x, y)\}+\{af(y, z, x)-\alpha f(y, y, z)\} + \{af(z, x, y)-\alpha f(z, z, x)\}=0. \tag{2.2}$$

C'est l'équation cyclique dont la solution générale est

$$f(x, y, z)=\frac{\alpha}{a}F(x, y)+u(x, y, z)-u(y, z, x) \tag{2.3}$$

avec la notation $f(x, x, y)=F(x, y)$.

En portant (2.3) dans (2.2), il vient

$$\left\{\alpha F(x, y)-\frac{\alpha^2}{a} F(x, x)-\alpha u(x, x, y)+\alpha u(x, y, x)\right\}$$

$$+\left\{\alpha F(y, z)-\frac{\alpha^2}{a} F(y, y)-\alpha u(y, y, z)+\alpha u(y, z, y)\right\}$$

$$+\left\{\alpha F(z, x)-\frac{\alpha^2}{a} F(z, z)-\alpha u(z, z, x)+\alpha u(z, x, z)\right\}=0 .$$

C'est l'équation cyclique dont la solution générale est

$$F(x, y)=\frac{\alpha}{a} F(x, x)+u(x, x, y)-u(x, y, x)+\frac{a}{\alpha} R(x)-\frac{a}{\alpha} R(y),$$

où la fonction R est arbitraire.

En utilisant la dernière égalité, dans le cas où $\alpha=a$, l'équation (2.3) conduit à

$$\text{(2.4)} \quad f(x, y, z)=u(x, y, z)-u(y, z, x)+u(x, x, y)-u(x, y, x)+S(x)-R(y),$$

où l'on a $F(x, x)=S(x)-R(x)$.

Exemple. Toute solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y)=f(x, x, y)+f(y, y, z)+f(z, z, x)$$

est

$$f(x, y, z)=u(x, y, z)-u(y, z, x)+u(x, x, y)-u(x, y, x)+S(x)-R(y) .$$

Pour $\alpha \neq a$, à partir de (0.1), il vient $F(x, x) \equiv 0$. Vu la dernière égalité l'équation (2.3) se transforme en

$$\text{(2.5)} \quad f(x, y, z)=u(x, y, z)-u(y, z, x)+\frac{\alpha}{a}\{u(x, x, y)-u(x, y, x)\}+R(x)-R(y) .$$

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$2 f(x, y, z)+2 f(y, z, x)+2 f(z, x, y)=f(x, x, y)+f(y, y, z)+f(z, z, x)$$

a pour solution générale la fonction suivante

$$f(x, y, z)=u(x, y, z)-u(y, z, x)+\frac{1}{2}\{u(x, x, y)-u(x, y, x)\}+R(x)-R(y) .$$

Supposons maintenant que tous les trois paramètres α, β, γ ne soient pas égaux entre eux. Soit, par exemple, $\alpha \neq \gamma$. Alors, à partir de (2.1), pour $z=z^0$ ($=$const), on obtient

$$\text{(2.6)} \quad F(x, y)=G(x)+H(y),$$

où nous avons employé les notations

$$G(x)=-\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\gamma} F(z^0, x), \quad H(y)=-\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma} F(y, z^0) .$$

Si dans (2.1) on porte $F(x, y)$, donné à l'aide de (2.6), et si l'on pose $x=u$, $y=z=y^0$ ($=$const), et après cela $x=z=y^0$, $y=u$, on obtient l'une après l'autre les égalités

$$\text{(2.7)} \quad (\alpha-\gamma)\{G(u)-G(y^0)\}+(\gamma-\beta)\{H(u)-H(y^0)\}=0,$$

$$\text{(2.8)} \quad (\beta-\alpha)\{G(u)-G(y^0)\}+(\alpha-\gamma)\{H(u)-H(y^0)\}=0 .$$

Étant donné que

$$\begin{vmatrix} \alpha-\gamma & \gamma-\beta \\ \beta-\alpha & \alpha-\gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\} \neq 0,$$

de (2.7) et (2.8) on trouve $G(u)=G(y^0)$ et $H(u)=H(y^0)$, ou bien

(2.9) $$F(x, y) = M \ (=\text{const}).$$

Alors, l'équation (0.1) devient

(2.10) $$\{f(x, y, z)-N\}+\{f(y, z, x)-N\}+\{f(z, x, y)-N\}=0,$$

avec

$$N=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)M}{3a}.$$

La solution générale de l'équation cyclique (2.10) est

(2.11) $$f(x, y, z)=u(x, y, z)-u(y, z, x)+N.$$

Pour que (2.11) soit une solution de l'équation (0.1), la condition suivante doit être remplie

(2.12) $$\alpha\{u(x, x, y)-u(x, y, x)\}+\beta\{u(y, y, z)-u(y, z, y)\} \\ +\gamma\{u(z, z, x)-u(z, x, z)\}=0,$$

car, à partir de (2.10) et (2.9), on a $M=N$.

Pour que l'équation (2.12) ait des solutions non triviales par rapport à $u(x, x, y)-u(x, y, x)$, la condition suivante doit être remplie:

(2.13) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons supposé que $\alpha\neq\gamma$. Donc, en partant de (2.13) on obtient

(2.14) $$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Alors, en faisant, dans l'égalité (2.12), $z=z^0$, on trouve

(2.15) $$u(x, x, y)-u(x, y, x)=P(x)+Q(y),$$

avec

$$P(x)=-\frac{\gamma}{\alpha}\{u(z^0, z^0, x)-u(z^0, x, z^0)\}, \quad Q(y)=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}\{u(y, y, z^0)-u(y, z^0, y)\}.$$

Si l'on pose $x=y$ dans (2.15), on trouve $P(x)=-Q(x)$. D'après cela, la formule (2.15) devient

(2.16) $$u(x, x, y)-u(x, y, x)=P(x)-P(y).$$

En portant (2.16) dans (2.12) et mettant à profit (2.14), on obtient

$$(2\alpha+\gamma)P(y)+(\gamma-\alpha)P(x)+(-2\gamma-\alpha)P(z)=0.$$

De là, étant donné que $\alpha\neq\gamma$, on arrive à $P(x)=M$ ($=$const). Donc, l'équation (2.16) fournit

(2.17) $$u(x, x, y)-u(x, y, x)=0.$$

Cette équation impose à la fonction $u(x, y, z)$ des restrictions seulement dans les plans $y=x$ et $z=x$. De là, en posant $u(x, y, x)=g(x, y)$, on obtient

$$(2.18)\qquad u(x, y, z)=\begin{cases} u(x, y, z) & ((y\neq x \wedge z\neq x)\vee(y=x=z)), \\ g(x, y) & (z=x\neq y), \\ g(x, z) & (y=x\neq z), \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions quelconques.

Dans le cas où $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, à partir de (2.12), on trouve immédiatement (2.17). Donc, dans ce cas la fonction u est aussi donnée par (2.18).

Exemple. La fonction (2.11), où la fonction u est donnée par (2.18), est la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y)=f(x, x, y)-f(y, y, z).$$

Passons maintenant au cas

$$(2.19)\qquad a+b+c=0.$$

L'équation (0.1) devient

$$(2.20)\qquad a\{f(x, y, z)-f(z, x, y)\}-b\{f(z, x, y)-f(y, z, x)\} = \alpha F(x, y)+\beta F(y, z)+\gamma F(z, x),$$

avec $f(x, x, y)=F(x, y)$. Nous avons aussi, d'après (0.2) et (0.3), les équations suivantes:

$$(2.21)\qquad a\{f(y, z, x)-f(x, y, z)\}-b\{f(x, y, z)-f(z, x, y)\} = \alpha F(y, z)+\beta F(z, x)+\gamma F(x, y),$$

$$(2.22)\qquad a\{f(z, x, y)-f(y, z, x)\}-b\{f(y, z, x)-f(x, y, z)\} = \alpha F(z, x)+\beta F(x, y)+\gamma F(y, z).$$

En additionnant, membre à membre, les égalités (2.20), (2.21) et (2.22), on parvient à

$$(\alpha+\beta+\gamma)\{F(x, y)+F(y, z)+F(z, x)\}=0.$$

Dans le cas où $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, la condition suivante doit être remplie:

$$F(x, y)+F(y, z)+F(z, x)=0.$$

C'est l'équation cyclique dont la solution générale est

$$(2.23)\qquad F(x, y)=P(x)-P(y).$$

Supposons que l'on ait $a\neq b$. Alors, d'après (2.20), (2.21) et (22.2), en utilisant (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} & f(z, x, y) \\ & \quad +\frac{a^2\{\alpha P(x)+\beta P(y)+\gamma P(z)\}+b^2\{\gamma P(x)+\alpha P(y)+\beta P(z)\}+ab\{\beta P(x)+\gamma P(y)+\alpha P(z)\}}{a^3-b^3} \\ & = f(x, y, z) \\ & \quad +\frac{a^2\{\alpha P(y)+\beta P(z)+\gamma P(x)\}+b^2\{\gamma P(y)+\alpha P(z)+\beta P(x)\}+ab\{\beta P(y)+\gamma P(z)+\alpha P(x)\}}{a^3-b^3}. \end{aligned}$$

La dernière équation a comme solution générale la fonction suivante:

$$(2.24)\qquad f(x,y,z)$$

$$+\frac{a^2\{\alpha P(y)+\beta P(z)+\gamma P(x)\}+b^2\{\gamma P(y)+\alpha P(z)+\beta P(x)\}+ab\{\beta P(y)+\gamma P(z)+\alpha P(x)\}}{a^3-b^3}$$

$$=G(x,y,z)+G(y,z,x)+G(z,x,y).$$

Étant donné que $f(x,x,y)=P(x)-P(y)$, de (2.24) on obtient

$$(2.25)\qquad P(x)-P(y)+R(x,x,y)=G(x,x,y)+G(x,y,x)+G(y,x,x),$$

avec

$$(2.26)\qquad R(x,y,z)$$

$$=\frac{a^2\{\alpha P(y)+\beta P(z)+\gamma P(x)\}+b^2\{\gamma P(y)+\alpha P(z)+\beta P(x)\}+ab\{\beta P(y)+\gamma P(z)+\alpha P(x)\}}{a^3-b^3}.$$

La solution générale de l'équation (2.25), avec les notations

$$G(x,y,x)=K(x,y),\qquad G(y,x,x)=L(y,x),$$

est

$$(2.27)\qquad \begin{aligned} G(x,y,z)&=H(x,y,z) && (y\neq x\wedge y\neq z\wedge z\neq x),\\ &=K(x,y) && (z=x\neq y),\\ &=L(x,y) && (z=y\neq x),\\ &=P(x)-P(z)+R(x,x,z)-K(x,z)-L(z,x) && (y=x\neq z),\\ &=\frac{1}{3}R(x,x,x) && (x=y=z),\end{aligned}$$

où H, K, L, P sont des fonctions quelconques et R une fonction donnée par la formule (2.26).

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(x,y,z)-f(y,z,x)=f(x,x,y)$$

a comme solution générale la fonction (2.24), où G est donné par (2.27).

Dans le cas $a=b$, l'équation (2.20) a la forme que voici:

$$af(y,z,x)-af(z,x,y)-\alpha P(x)-\beta P(y)-\gamma P(z)$$

$$=af(z,x,y)-af(x,y,z)-\alpha P(y)-\beta P(z)-\gamma P(x).$$

La dernière équation entraîne

$$(2.28)\qquad af(z,x,y)-af(x,y,z)-\alpha P(y)-\beta P(z)-\gamma P(x)$$

$$=Q(x,y,z)+Q(y,z,x)+Q(z,x,y).$$

En partant de (2.28), on obtient, par permutation cyclique des variables x, y, z, deux nouvelles équations qui ajoutées à (2.28) donnent

$$3\{Q(x,y,z)+Q(y,z,x)+Q(z,x,y)\}=-(\alpha+\beta+\gamma)\{P(x)+P(y)+P(z)\}.$$

Vu la dernière égalité, l'équation (2.28) prend la forme que voici

$$af(z, x, y) - R(y, z) = af(x, y, z) - R(z, x), \tag{2.29}$$

où

$$R(y, z) = \frac{2\alpha - \beta - \gamma}{3} P(y) - \frac{2\gamma - \alpha - \beta}{3} P(z). \tag{2.30}$$

La solution de l'équation (2.29) est

$$f(x, y, z) = \frac{1}{a} \{R(z, x) + G(x, y, z) + G(y, z, x) + G(z, x, y)\}. \tag{2.31}$$

Étant donné que $f(x, x, y) = P(x) - P(y)$, on a

$$a\{P(x) - P(y)\} = R(y, x) + G(x, x, y) + G(x, y, x) + G(y, x, x). \tag{2.32}$$

En posant $G(x, y, x) = K(x, y)$ et $G(y, x, x) = L(y, x)$, à partir de

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= H(x, y, z) && (y \neq x \wedge y \neq z \wedge z \neq x), \\ &= K(x, y) && (z = x \neq y), \\ &= L(x, y) && (z = y \neq x), \\ &= aP(x) - aP(z) - R(z, x) - K(x, z) - L(z, x) && (y = x \neq z), \\ &= -\frac{1}{3} R(x, x) && (x = y = z), \end{aligned} \tag{2.33}$$

où H, K, L, P sont des fonctions quelconques et R une fonction donnée par (2.30).

Exemple. La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z) + f(y, z, x) - 2f(z, x, y) = f(x, x, y)$$

est la fonction (2.31) où G et R sont donnés par (2.33) et (2.30).

Passons à présent au cas $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Si l'on a $a \neq b$, de (2.20), (2.21) et (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} &f(z, x, y) - \frac{a^2\{\alpha F(z, x) - \beta F(y, z)\} + b^2\{\alpha F(x, y) - \beta F(z, x)\} + ab\{\alpha F(y, z) - \beta F(x, y)\}}{a^3 - b^3} \\ &= f(x, y, z) - \frac{a^2\{\alpha F(x, y) - \beta F(z, x)\} + b^2\{\alpha F(y, z) - \beta F(x, y)\} + ab\{\alpha F(z, x) - \beta F(y, z)\}}{a^3 - b^3}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

La solution générale de l'équation (2.34) est donnée par

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= G(x, y, z) + G(y, z, x) + G(z, x, y) \\ &+ \frac{a^2\{\alpha F(x, y) - \beta F(z, x)\} + b^2\{\alpha F(y, z) - \beta F(x, y)\} + ab\{\alpha F(z, x) - \beta F(y, z)\}}{a^3 - b^3}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Si l'on fait $x = y = x'$, $z = y'$, étant donné que $f(x, x, y) = F(x, y)$, la formule (2.35), après omission de l'accent, devient

$$F(x, y) = R(x, x, y) + G(x, x, y) + G(x, y, x) + G(y, x, x), \tag{2.36}$$

avec

(2.37)
$$R(x, y, z) = \frac{a^2\{\alpha F(x, y) - \beta F(z, x)\} + b^2\{\alpha F(y, z) - \beta F(x, y)\} + ab\{\alpha F(z, x) - \beta F(y, z)\}}{a^3 - b^3}.$$

De là, si l'on pose $G(x, y, x) = K(x, y)$, $G(y, x, x) = L(y, x)$, on obtient

(2.38)
$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= H(x, y, z) && (y \neq x \wedge y \neq z \wedge z \neq x), \\ &= K(x, y) && (z = x \neq y), \\ &= L(x, y) && (z = y \neq x), \\ &= F(x, z) - R(x, x, z) - K(x, z) - L(z, x) && (y = x \neq z), \\ &= \frac{1}{3}\{F(x, x) - R(x, x, x)\} && (x = y = z), \end{aligned}$$

où H, F, K, L sont des fonctions arbitraires et R donné par (2.37).

Exemple. L'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z) - f(y, z, x) = f(x, x, y) - 2f(y, y, z) + f(z, z, x)$$

a comme solution générale la fonction (2.35), où G est donnée par (2.38) et R par (2.37).

Si l'on a $\alpha + \beta + \gamma = 0 \wedge a = b\ (\neq 0)$, l'équation (2.20) prend la forme suivante

$$f(y, z, x) - f(z, x, y) + \frac{\alpha}{a} F(z, x) - \frac{\beta}{a} F(y, z)$$
$$= f(z, x, y) - f(x, y, z) + \frac{\alpha}{a} F(x, y) - \frac{\beta}{a} F(z, x).$$

Cette équation a pour solution générale la fonction suivante:

(2.39)
$$f(z, x, y) - f(x, y, z) + \frac{\alpha}{a} F(x, y) - \frac{\beta}{a} F(z, x)$$
$$= Q(x, y, z) + Q(y, z, x) + Q(z, x, y).$$

A partir de la dernière équation on obtient, par permutation cyclique des variables x, y, z, deux nouvelles équations, qui ajoutées à (2.39), donnent

$$(\alpha - \beta)\{F(x, y) + F(y, z) + F(z, x)\} = 3a\{Q(x, y, z) + Q(y, z, x) + Q(z, x, y)\}.$$

En appliquant la dernière égalité, l'équation (2.39) se ramène à

$$f(z, x, y) - \frac{1}{3a}\{-2\beta F(y, z) - \beta F(x, y) - \alpha F(x, y) + \alpha F(z, x)\}$$
$$= f(x, y, z) - \frac{1}{3a}\{-2\beta F(z, x) - \beta F(y, z) - \alpha F(y, z) + \alpha F(x, y)\}.$$

La dernière équation a pour solution générale la fonction

(2.40)
$$f(x, y, z) = R(x, y, z) + G(x, y, z) + G(y, z, x) + G(z, x, y),$$

où nous avons employé la notation

(2.41)
$$R(x, y, z) = \frac{1}{3a}\{-2\beta F(z, x) - \beta F(y, z) - \alpha F(y, z) + \alpha F(x, y)\}.$$

Étant donné que $f(x, x, y) = F(x, y)$, avec les notations $G(x, y, x) = K(x, y)$ et $G(y, x, x) = L(y, x)$, on obtient (2.38), où H, F, K, L sont des fonctions quelconques et R donné par (2.41).

Exemple. La solution générale de l'équation

$$f(x, y, z) + f(y, z, x) - 2f(z, x, y) = 2f(x, x, y) - f(y, y, z) - f(z, z, x)$$

est la fonction (2.40) suivie de (2.38) et (2.41).

En résumé, on a le tableau suivant

	Conditions à vérifier		Solution générale de (0.1)	Conditions supplémentaires
$\Delta \neq 0$	$\alpha+\beta+\gamma=0$	$\Delta-\Delta_2=\Delta_3\ (\neq 0)$	(1.1)	(1.7) avec $G(x, x)\equiv 0$
		$\Delta-\Delta_2=-\Delta_3\ (\neq 0)$	(1.1)	(1.9)
		$\Delta-\Delta_2=\Delta_3=0$	(1.1)	$F(x, x)\equiv 0$
		$(\Delta-\Delta_2)^2 \neq \Delta_3^2$	(1.10)	
	$\alpha=\beta=\gamma$	$a+b+c=3\alpha$	(1.1)	(1.13)
		$a+b+c\neq 3\alpha,\ \Delta\neq 2\Delta_1$	(1.1)	(1.15)
		$a+b+c\neq 3\alpha,\ \Delta=2\Delta_1$	(1.1)	(1.17)
	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$	$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3\neq 0 \\ \Delta-\Delta_2=\Delta_3\ (\neq 0) \end{array}\right\}$	(1.1)	(1.19) avec $G(x, x)\equiv 0$
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3\neq 0 \\ \Delta-\Delta_2=-\Delta_3\ (\neq 0) \end{array}\right\}$	(1.1)	(1.20)
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3\neq 0 \\ \Delta-\Delta_2=\Delta_3=0 \end{array}\right\}$	(1.1)	$F(x, x)\equiv 0$
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3\neq 0 \\ (\Delta-\Delta_2)^2\neq \Delta_3^2 \end{array}\right\}$	(1.10)	
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3=0 \\ (\Delta-\Delta_2)^2\neq \Delta_3^2 \end{array}\right\}$	(1.1)	(1.21)
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3=0 \\ \Delta-\Delta_2=\Delta_3\ (\neq 0) \end{array}\right\}$	(1.1)	(1.22)
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3=0 \\ \Delta-\Delta_2=-\Delta_3\ (\neq 0) \end{array}\right\}$	(1.1)	(1.25)
		$\left.\begin{array}{l} \Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3=0 \\ \Delta-\Delta_2=\Delta_3=0 \end{array}\right\}$	(1.2)	
$\Delta=0$	$a=b=c$	$\alpha=\beta=\gamma=a$	(2.4)	
		$\alpha=\beta=\gamma\neq a$	(2.5)	
		dans les autres cas	(2.11)	(2.18)
	$a+b+c=0$	$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma\neq 0 \\ a\neq b \end{array}\right\}$	(2.24)	(2.27)
		$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma\neq 0 \\ a=b\ (\neq 0) \end{array}\right\}$	(2.31)	(2.33) avec (2.30)
		$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ a\neq b \end{array}\right\}$	(2.35)	(2.38) avec (2.37)
		$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ a=b\ (\neq 0) \end{array}\right\}$	(2.40)	(2.38) avec (2.41)

RÉFÉRENCE

[1] M. Ghermănescu: *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires.* Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 68, 1940, p. 109—128.