PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 57—62.

OPÉRATEURS PARFAITS

Bogoljub Stanković et *Marija Skendžić*

(Communiqué le 20 septembre 1963)

Introduction

J. D. Weston [3] a construit un anneau des opérateurs parfaits et c'est le plus petit anneau avec unité, qui contient les opérations: composition avec une fonction $f(t)$,

$$f(t)=0\,(e^{ct}),\quad t\to\infty,\quad c\in R,$$

les dérivées, l'intégration et la translation.

Il a cherché aussi de lier le point de vue algébrique et analytique. Ainsi il peut correspondre à tout operateur parfait sa transformation de Laplace.

Le but de cette note est d'éviter la condition sur la croissance exponentielle des fonctions pour lesquelles les opérations mentionnées sont définies. Les fonctions considérées ici sont des fonctions localement sommables.

1. — Fonction parfaite et opérateur parfait

Soit noté par L l'ensemble des fonctions définies sur R, sommables sur $(0, w)$ pour tout $w>0$, s'annulant sur R^-. Avec les opérations d'addition, de composition et de multiplication par un nombre complexe, L a une structure d'algèbre.

Par D_0 soit noté le sous-espace vectoriel de L dont les éléments sont des fonctions $p(t)$ à propriétés:

1. $p(0)=0$
2. Pour tout k il existe $p^{(k)}(t)$ et $p^{(k)}(0)=0$.

D_0 est un idéal dans L; ces éléments soient appelés fonctions parfaites.

Tout élément $g(t)\in D_0$ définit un endomorphisme G par rapport à la structure d'espace vectoriel de D_0:

$$Gp(t)=\int_0^t g(u)\,p(t-u)\,du,\quad p(t)\in D_0.$$

L'ensemble des endomorphismes définis par les éléments de D_0 notons par $\mathcal{D}_0$.

L'endomorphisme A par rapport à la structure d'espace vectoriel de D_0 est un opérateur parfait, par définition, si pour tout $G\in\mathcal{D}_0$ on a:

$$A\,G\,p(t)=G\,A\,p(\mathrm{t}).$$

L'ensemble des opérateurs parfaits soit noté par $\mathcal{D}$.

Dans l'ensemble $\mathcal{D}$ on définit deux opérations internes: l'addition et la composition, et une opération externe: multiplication par les nombres complexes:

$$A+B=C, \quad \text{où} \quad Cp(t)=Ap(t)+Bp(t)$$

$$A\cdot B=C, \quad \text{où} \quad Cp(t)=A[Bp(t)]$$

$$\alpha A=B, \quad \text{où} \quad Bp(t)=A[\alpha p(t)]$$

où α est un nombre complexe et A, B, C sont les opérateurs parfaits.

Avec les opérations définies, $\mathcal{D}$ a une structure d'algèbre.

Voici quelques opérateurs qui sont en même temps parfaits: *La dérivée D*. Car on a:

$$D[Gp(t)]=D\int_0^t g(u)p(t-u)\,du=\int_0^t g(u)p'(t-u)\,du=G[Dp(t)].$$

La composition par une fonction $r(t)\in L$,

$$Rp(t)=\int_0^t r(u)p(t-u)\,du.$$

Dans le cas spécial, $r(t)=1$, nous avons l'opérateur d'intégration:

$$1p(t)=\int_0^t p(u)\,du$$

La translation $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda>0$. Elle peut être définie par une composition des opérateurs précédents.

Soit $q(\lambda, t)$ une fonction de L définie de manière que:

$$q(\lambda, t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t<\lambda \\ 1, & 0\leqslant\lambda\leqslant t\end{cases}$$

alors, $\mathcal{T}_\lambda=Q(\lambda)D$, parce que

$$Q(\lambda)Dp(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t<\lambda \\ \int_0^t p'(t-u)\,du, & 0\leqslant\lambda\leqslant t\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t<\lambda \\ p(t-\lambda), & 0\leqslant\lambda\leqslant t.\end{cases}$$

Cet opérateur étant la composition de deux opérateurs parfaits est aussi parfait.

2. La transformation de Laplace des fonctions localement sommables, au sens de Ditkin.

Il est bien connu que L est un anneau d'intégrité. Soit $\mathcal{L}$ un sous-anneau des fonctions qui possèdent la transformation de Laplace absolument convergente et J_n un idéal dans $\mathcal{L}$ des fonctions de la forme:

$$f_n(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant n \\ f(t), & t>n\end{cases}$$

Les éléments du quotient $\mathscr{L}/J_n$, c'est-à-dire les classes d'équivalence, nous allons noter par $\widehat{f_n}$. Du produit $\prod_{n \in N} \mathscr{L}/J_n$ on prend le sous-ensemble $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont des suites des classes d'équivalence $(\widehat{f_n})$ définies par une même fonction $f(t) \in L$ pour tout n.

Il n'est pas difficile à montrer que l'anneau $\mathfrak{M}$ et L sont isomorphe.

L'ensemble des transformations de Laplace des fonctions appartenant à la classe $(\widehat{f_n(t)})$ nous allons noter par $(\widehat{\varphi_n(z)})$. V. A. Ditkin [1] a montré que ce sont aussi des classes d'équivalences et que l'ensemble $\overline{\mathfrak{M}}$ dont les éléments sont de la forme $(\widehat{\varphi_n(z)})$ est isomorphe à L et par suite isomorphe aussi à $\mathfrak{M}$. Ce fait donne la possibilité de définir la transformation de Laplace généralisée pour tout élément de L, c'est-à-dire de $\mathfrak{M}$:

$$LTf(t) = LT(\widehat{f_n(t)}) = (\widehat{\varphi_n(z)}).$$

Si la fonction $f(t) \in L$ possède sa transformation de Laplace absolument convergente, elle se trouve dans toute classe $\widehat{\varphi_n(z)}$; c'est pourquoi on note l'élément correspondant de $\overline{\mathfrak{M}}$ seulement par $(\widehat{\varphi(z)})$.

L'anneau $\overline{\mathfrak{M}}$ est un anneau d'intégrité et on le peut „immerger" dans un corps $\overline{\mathcal{M}}$ dont les éléments on écrit

$$\frac{(\widehat{\varphi_n(z)})}{(\widehat{\gamma_n(z)})}.$$

3. La transformation de Laplace d'opérateur parfait

Pour l'opérateur parfait A et les fonctions parfaites $p(t)$ et $g(t)$ soit satisfaite la relation:

$$Ap(t) = g(t),$$

alors

$$LT\,Ap(t) = LT\,g(t).$$

Par définition, la transformation de Laplace d'opérateur parfait A, on la note par $\overline{A}$, est:

$$\overline{A} = \frac{(\widehat{\gamma_n(z)})}{(\widehat{\pi_n(z)})}.$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer la proposition suivante:

P r o p o s i t i o n. *La définition de la transformation de Laplace d'un opérateur ne dépend pas de la fonction choisie $p(t)$.*

D é m o n s t r a t i o n. — Soient $p(t)$ et $h(t)$ deux fonctions parfaites et distinctes telles que:

$$Ap(t) = g(t) \quad \text{et} \quad Ah(t) = r(t).$$

D'après la définition de la transformation de Laplace

$$\bar{A} = \frac{(\widehat{\gamma_n(z)})}{(\widehat{\pi_n(z)})} \quad \text{et} \quad \bar{A} = \frac{(\widehat{\chi_n(z)})}{(\widehat{\rho_n(z)})}.$$

Il faut montrer que c'est le même élément de $\overline{\mathcal{M}}$.

On commence par l'identité:

$$Ph(t) = Hp(t)$$

$$A\,[P\,h(t)[= A\,[H\,p(t)]$$

$$P\,[A\,h(t)[= H\,[A\,p(t)[$$

$$(\widehat{\pi_n(z)}) \cdot (\widehat{\rho_n(z)}) = (\widehat{\chi_n(z)}) \cdot (\widehat{\gamma_n(z)})$$

et notre proposition est démontrée.

4. Les propriétés des opérateurs parfaits

Premièrement nous allons démontrer une propriété des fonctions parfaites.

Théorème 1. *Pour que* $(\widehat{\pi_n(z)})$ *soit la transformation de Laplace d'une fonction parfaite* $p(t)$, *il faut et il suffit que pour tout* k *entier il existe dans toute classe* $(\widehat{\pi_n(z)}$ *au moins une fonction* $\eta(n, k, z)$ *telle que*

1. *Elle est holomorphe dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant a$.
2. *Il existe un nombre* c_k *positif tel que*

$$|z^k \eta(n, k, z)| < M \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \geqslant c_k.$$

Démonstration. — Soit $p(t)$ une fonction parfaite, $(\widehat{\pi_n(z)})$ sa transformation de Laplace. Considérons la fonction:

$$y(n, k, t) = \begin{cases} p(t), & 0 \geqslant t < n \\ \sum\limits_{m=0}^{k-1} \dfrac{(t-n)^m}{m!} p^{(m)}(n), & t \geqslant n. \end{cases}$$

Sa transformation de Laplace est:

$$\eta(n, k, z) = \int_0^n e^{-zt} p(t)\, dt + \int_n^\infty e^{-zt} \frac{(t-n)^m}{m!} p^{(m)}(n)\, dt.$$

Il est clair que c'est un élément de la classe $\widehat{\pi_n(z)}$. Mais, pour la fonction $\eta(n, k, z)$, d'après un calcul élémentaire, on obtient:

$$\eta(n, k, z) = \frac{1}{z^k} \int_0^n e^{-zt} p^{(k)}(t)\, dt$$

et on a donc bien:

$$|z^k \eta(n, k, z)| = \left|\int_0^n e^{-zt} p^{(k)}(t)\, dt\right| < M, \text{ pour } \operatorname{Re} z > 0.$$

Nous avons supposé $k > 0$, mais le cas $k < 0$ est trivial.

Soit maintenant $(\widehat{\pi_n(z)})$ un élément de $\overline{\mathfrak{M}}$ tel que pour tout k entier, dans toute classe de cette suite, il existe une fonction $\eta(n, k, z)$, holomorphe dans un demi-plan et telle que:

$$|z^k \eta(n, k, z)| < M, \quad \operatorname{Re} z \geqslant c_k.$$

Il faut montrer que $(\widehat{\pi_n(z)})$ est la transformation de Laplace d'une fonction parfaite $p(t)$.

D'après la supposition on a:

$$|z^{m+2} \eta(n, m+2, z)| < M, \quad \operatorname{Re} z \geqslant c_{m+2}.$$

La fonction

$$g(z) = z^{m+2} \eta(n, m+2, z)$$

est une fonction holomorphe et bornée dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geqslant c_{m+2}$. D'après un théorème connu (Doetsch, p. 263), il existe une fonction $x(t)$ telle que

$$\frac{g(z)}{z^2} = \int_0^\infty e^{-zt} x(t)\, dt.$$

Notre fonction peut être maintenant écrite:

$$\eta(n, m+2, z) = g(z) \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^m} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-zt} x(t)\, dt \int_0^\infty e^{-zt} \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t (t-u)^{m-1} x(u)\, du\, dt.$$

Cette fonction

$$\int_0^t (t-u)^{m-1} x(u)\, du$$

à la dérivée d'ordre m où m peut être un entier positif quelconque.

Théorème II. *Pour qu'un élément*

$$\frac{(\widehat{\gamma_n(z)})}{(\widehat{\pi_n(z)})} \in \overline{\mathcal{M}}$$

soit la transformation de Laplace d'un opérateur parfait, il faut et il suffit que:

1. *dans toute classe de* $(\widehat{\gamma_n(z)})$ *il existe au moins une fonction* $\omega(n, z)$ *telle que* $\dfrac{\omega(n, z)}{\pi(z)}$ *soit une fonction holomorphe* dans un demi-plan $\operatorname{Re} z \geqslant a$;

2. *pour au moins un entier* k

$$\left| z^k \frac{\omega(n, z)}{\pi(z)} \right| < M, \quad \operatorname{Re} z > c.$$

Démonstration. — Soit A un opérateur parfait et

$$\overline{A}=\frac{(\widehat{\gamma_n(z)})}{(\widehat{\pi(z)})}$$

On choisit la fonction parfaite $p(t)$ telle qu'elle possède la transformation de Laplace classique ne s'annulant pas dans un demi-plan. Il est sûr que telle fonction existe. Dans ces conditions la fonction $\frac{\omega(n, z)}{\pi(z)}$ est une fonction holomorphe dans un demi-plan Re $z \geqslant a$.

Quant à la deuxième condition du théorème, sa démostration est au fond la même que chez J. D. Weston [4].

Soit maintenant $\frac{(\widehat{\gamma_n(z)})}{(\widehat{\pi(z)})}$ un élément de $\overline{\mathcal{M}}$ tel que dans toute classe $\widehat{\gamma_n(z)}$ il existe une fonction $\omega(n, z)$, $\frac{\omega(n, z)}{\pi(z)}$ étant holomorphe dans un demi-plan et pour au moins un k entier et c, on a

$$|X(z)|=\left|\frac{\omega(n, z)}{\pi(z)}\right|<M\cdot\frac{1}{|z^k|}$$

Si on écrit maintenant $U(z)=z^j X(z)$, ou $j=\min(k-2, -2)$, on a

$$\omega(n, z)=U(z)\cdot\frac{1}{z^j}\pi(z).$$

D'après les propriétés de la fonction $U(z)$, elle est la transformation de Laplace d'une fonction $x(t)$ et $z^{-j}\pi(z)$ est la transformation de Laplace de la fonction $p^{(-j)}(t)$. Par suite

$$Ap(t)=x(t)\,p^{(-j)}(t)$$

c'est-à-dire $A=XD^{-j}$. Une conséquence directe du théorème II est que tout opérateur parfait est de la forme FD^k, où F est l'opérateur parfait défini par la fonction $f\in L$. Ou encore, les opérateurs parfaits font le plus petit anneau dans le corps des opérateurs de Mikusiński, qui contient convolution avec une fonction de L, dérivée d'ordre k, D^k, intégration et translation.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] В. А. Диткин: *К теории операционого исчисления,* Докл. Ак. Наук СССР Т 123. № 3 (1958) 395—396.

[2] G. Doetsch: *Handbuch der Laplace-Transformation,* Verlag Birkhäuser, Basel (1959).

[3] J. D. Weston: *An extension of the Laplace — Transform calculus. Rend. del Circolo matematico di Palermo,* Fasc. III, serie II, t. VI (1957), 325—333.

[4] J. D. Weston: *Characterizations of Laplace — Transforms and perfect operators,* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 3 (1959) 348—354.