PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 29—41.

# ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE GÉNÉRALISÉE

*Dragoslav S. Mitrinović*

(Communiqué le 19 sep embre 1963)

## 1. Introduction

Soient $S$ un ensemble non vide quelconque et $M$ un groupe abélien additif.

L'équation fonctionnelle cyclique

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p) + f(x_2, x_3, \ldots, x_p, x_{p+1}) + \cdots \\ & + f(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n) + f(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \cdots \\ & + f(x_n, x_1, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1}) = 0 \qquad (p \leqslant n),\end{aligned}$$

où $f: S^p \to M$ désigne une fonction inconnue, a été résolue [1] sous la condition suivante:

Hypothèse H. *Dans le groupe $M$ l'équation*

$$mX = A \quad (m,\ \textit{nombre naturel} \leqslant n,\ A \in M,\ X \in M)$$

*possède, par rapport à $X$, une solution unique.*

L'objet de la présente Note sont deux cas particuliers de l'équation fonctionnelle plus générale

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p) + f_2(x_2, x_3, \ldots, x_p, x_{p+1}) + \cdots \\ & + f_{n-p+1}(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ & + f_{n-p+2}(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \cdots \\ & + f_n(x_n, x_1, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1}) = 0,\end{aligned}$$

où les fonctions $f_k: S^p \to M$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sont inconnues.

L'équation (1.2) a été résolue [2] dans le cas où $n \geqslant 2p - 1$.

Suivant une méthode qui sera exposée dans les paragraphes suivants nous avons obtenu, entre autres, les résultats suivants:

La solution générale de l'équation

$$(1.3)\qquad f_1(x_1, x_2, x_3) + f_2(x_2, x_3, x_4) + f_3(x_3, x_4, x_1) + f_4(x_4, x_1, x_2) = 0$$

est donnée par

$$
(1.4)\qquad
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2) - F_2(x_2, x_3) + H_1(x_3, x_1),\\
f_2(x_2, x_3, x_4) &= F_2(x_2, x_4) - F_3(x_3, x_4) + H_2(x_4, x_2),\\
f_3(x_3, x_4, x_1) &= F_3(x_3, x_4) - F_4(x_4, x_1) - H_1(x_3, x_1),\\
f_4(x_4, x_1, x_2) &= F_4(x_4, x_1) - F_1(x_1, x_2) - H_2(x_4, x_2),
\end{aligned}
$$

où $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $H_1$, $H_2$ désignent des fonctions à valeurs prises dans $M$.

La solution générale de l'équation

$$
(1.5)\qquad f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) + f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) + f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) + f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) = 0
$$

est donnée par

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= F_4(x_1, x_2, x_3) - F_5(x_2, x_3, x_4) + G_3(x_1, x_2, x_4) - G_5(x_3, x_4, x_1),\\
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) &= F_5(x_2, x_3, x_4) - F_1(x_3, x_4, x_5) + G_4(x_2, x_3, x_5) - G_1(x_4, x_5, x_2),\\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) &= F_1(x_3, x_4, x_5) - F_2(x_4, x_5, x_1) + G_5(x_3, x_4, x_1) - G_2(x_5, x_1, x_3),\\
f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) &= F_2(x_4, x_5, x_1) - F_3(x_5, x_1, x_2) + G_1(x_4, x_5, x_2) - G_3(x_1, x_2, x_4),\\
f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) &= F_3(x_5, x_1, x_2) - F_4(x_1, x_2, x_3) + G_2(x_5, x_1, x_3) - G_4(x_2, x_3, x_5),
\end{aligned}
$$

en désignant par $F_\nu$ et $G_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) des fonctions à valeurs $\in M$.

Les équations (1.3) et (1.5) rentrent dans le cas difficile de l'équation (1.2), caractérisé par la condition $p < n < 2p - 1$.

Nous avons aussi démontré qu'on peut obtenir la solution générale de l'équation

$$
(1.6)\qquad f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_4, x_1) + f(x_4, x_1, x_2) = 0,
$$

en partant de la solution (1.4) de l'équation (1.3), avec $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$, ce qui justifie que (1.3) est vraiment une généralisation de l'équation (1.6). En déterminant la solution en question, l'hypothèse H, pour $m = 2$, s'impose.

La méthode que nous avons employée pour résoudre les équations indiquées plus haut est élémentaire, mais elle exige de calculs compliqués. Nous essayerons de simplifier ladite méthode pour obtenir la solution générale de l'équation (1.2) dans le cas difficile pour tout $p$ et $n$ ($p < n < 2p - 1$).

A notre connaissance, les équations fonctionnelles dont il s'agit dans cet article ne sont pas étudiées dans la littérature mathématique.

Certains des résultats indiqués ici sont brièvement donnés dans une Note, publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 257, 1963, p. 2951—2952.

## 2. L'équation fonctionnelle

## $f_1(x_1, x_2, x_3) + f_2(x_2, x_3, x_4) + f_3(x_3, x_4, x_1) + f_4(x_4, x_1, x_2) = 0$

Considérons l'équation fonctionnelle à quatre fonctions inconnues

$$
(2.1)\qquad f_1(x_1, x_2, x_3) + f_2(x_2, x_3, x_4) + f_3(x_3, x_4, x_1) + f_4(x_4, x_1, x_2) = 0,
$$

où les variables $x_1, x_2, x_3, x_4$ se succèdent cycliquement comme dans l'équation (1.6).

Si l'on fait, l'une après l'autre, les substitutions suivantes[1]

$$x_4 = \overset{0}{x}_4, \quad x_1 = \overset{0}{x}_1, \quad x_2 = \overset{0}{x}_2, \quad x_3 = \overset{0}{x}_3,$$

on obtient respectivement:

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2) + G_1(x_2, x_3) + H_1(x_3, x_1), \\ f_2(x_2, x_3, x_4) &= F_2(x_2, x_3) + G_2(x_3, x_4) + H_2(x_4, x_2), \\ f_3(x_3, x_4, x_1) &= F_3(x_3, x_4) + G_3(x_4, x_1) + H_3(x_1, x_3), \\ f_4(x_4, x_1, x_2) &= F_4(x_4, x_1) + G_4(x_1, x_2) + H_4(x_2, x_4). \end{aligned}$$

Les fonctions $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$, $f_3(u, v, w)$, $f_4(u, v, w)$, données par (2.2), représentent une solution de (2.1) si, et seulement si, l'on a

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} & F_1(x_1, x_2) + F_2(x_2, x_3) + F_3(x_3, x_4) + F_4(x_4, x_1) \\ & + G_1(x_2, x_3) + G_2(x_3, x_4) + G_3(x_4, x_1) + G_4(x_1, x_2) \\ & + H_1(x_3, x_1) + H_2(x_4, x_2) + H_3(x_1, x_3) + H_4(x_2, x_4) = 0. \end{aligned}$$

Lorsque l'on considère deux des variables $x_1, x_2, x_3, x_4$ comme constantes prises arbitrairement dans $S$, l'équation (2.3) conduit à six équations suivantes:

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} F_1(x_1, x_2) + G_4(x_1, x_2) &= A_1(x_1) + B_1(x_2), \\ F_2(x_2, x_3) + G_1(x_2, x_3) &= A_2(x_2) + B_2(x_3), \\ F_3(x_3, x_4) + G_2(x_3, x_4) &= A_3(x_3) + B_3(x_4), \\ F_4(x_4, x_1) + G_3(x_4, x_1) &= A_4(x_4) + B_4(x_1), \\ H_1(x_3, x_1) + H_3(x_1, x_3) &= A_5(x_3) + B_5(x_1), \\ H_2(x_4, x_2) + H_4(x_2, x_4) &= A_6(x_4) + B_6(x_2). \end{aligned}$$

Vu (2.4), les formules (2.2) deviennent

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2) - F_2(x_2, x_3) + H_1(x_3, x_1) + A_2(x_2) + B_2(x_3), \\ f_2(x_2, x_3, x_4) &= F_2(x_2, x_3) - F_3(x_3, x_4) + H_2(x_4, x_2) + A_3(x_3) + B_3(x_4), \\ f_3(x_3, x_4, x_1) &= F_3(x_3, x_4) - F_4(x_4, x_1) - H_1(x_3, x_1) + A_4(x_4) + B_4(x_1) \\ &\quad + A_5(x_3) + B_5(x_1), \\ f_4(x_4, x_1, x_2) &= F_4(x_4, x_1) - F_1(x_1, x_2) - H_2(x_4, x_2) + A_1(x_1) + B_1(x_2) \\ &\quad + A_6(x_4) + B_6(x_2). \end{aligned}$$

Pour que (2.5) soit une solution de (2.1), il faut et il suffit que

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} & A_1(x_1) + B_4(x_1) + B_5(x_1) \\ & + A_2(x_2) + B_1(x_2) + B_6(x_2) \\ & + A_3(x_3) + A_5(x_3) + B_2(x_3) \\ & + A_4(x_4) + A_6(x_4) + B_3(x_4) = 0. \end{aligned}$$

---

[1] $\overset{\nu}{x}_1, \overset{\nu}{x}_2, \overset{\nu}{x}_3, \ldots$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ sont des constantes arbitraires appartenant à l'ensemble $S$.

En considérant, dans l'équation fonctionnelle (2.6), les trois des variables $x_1, x_2, x_3, x_4$ comme constantes arbitraires, on obtient les quatre équations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&A_1(x)+B_4(x)+B_5(x)=k_1,\\
&A_2(x)+B_1(x)+B_6(x)=k_2,\\
&A_3(x)+A_5(x)+B_2(x)=k_3,\\
&A_4(x)+A_6(x)+B_3(x)=k_4,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

où $k_1, k_2, k_3, k_4$, avec $k_1+k_2+k_3+k_4=0$, désignent des constantes à valeurs $\in S$.

Les formules (2.5), vu (2.7), deviennent

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_2)&=F_1(x_1, x_2)-F_2(x_2, x_3)+H_1(x_3, x_1)+A_2(x_2)+B_2(x_3),\\
f_2(x_2, x_3, x_4)&=F_2(x_2, x_3)-F_3(x_3, x_4)+H_2(x_4, x_2)+A_3(x_3)+B_3(x_4),\\
f_3(x_3, x_4, x_1)&=F_3(x_3, x_4)-F_4(x_4, x_1)-H_1(x_3, x_1)+A_4(x_4)-B_2(x_3)\\
&\qquad -A_3(x_3)-A_1(x_1)+k_1+k_3,\\
f_4(x_4, x_1, x_2)&=F_4(x_4, x_1)-F_1(x_1, x_2)-H_2(x_4, x_2)+A_1(x_1)-B_3(x_4)\\
&\qquad -A_2(x_2)-A_4(x_4)+k_1+k_4,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

avec $k_1+k_2+k_3+k_4=0$.

Introduisons maintenant les nouvelles notations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&F_1'(x_1, x_2)=F_1(x_1, x_2)+A_2(x_2),\\
&F_2'(x_2, x_3)=F_2(x_2, x_3),\\
&F_3'(x_3, x_4)=F_3(x_3, x_4)-A_3(x_3),\\
&F_4'(x_4, x_1)=F_4(x_4, x_1)-A_4(x_4)+A_1(x_1)-k_1-k_3,\\
&H_1'(x_3, x_1)=H_1(x_3, x_1)+B_2(x_3),\\
&H_2'(x_4, x_2)=H_2(x_4, x_2)+B_3(x_4).
\end{aligned}
$$

Les formules (2.8) s'écrivent alors comme suit (les accents sont supprimés):

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3)&=F_1(x_1, x_2)-F_2(x_2, x_3)+H_1(x_3, x_1),\\
f_2(x_2, x_3, x_4)&=F_2(x_2, x_3)-F_3(x_3, x_4)+H_2(x_4, x_2),\\
f_3(x_3, x_4, x_1)&=F_3(x_3, x_4)-F_4(x_4, x_1)-H_1(x_3, x_1),\\
f_4(x_4, x_1, x_2)&=F_4(x_4, x_1)-F_1(x_1, x_2)-H_2(x_4, x_2).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

D'après ce qui précède, on peut énoncer le résultat suivant:

Théorème 1. — *Si $S$ est un ensemble non vide arbitraire et $M$ un groupe additif, toutes les fonctions*

$$f_k : S^3 \to M \qquad (k=1, 2, 3, 4),$$

*satisfaisant à l'équation* (2.1), *sont données par:*

$$
\begin{aligned}
f_1(u, v, w)&=F_1(u, v)-F_2(v, w)+H_1(w, u),\\
f_2(u, v, w)&=F_2(u, v)-F_3(v, w)+H_2(w, u),\\
f_3(u, v, w)&=F_3(u, v)-F_4(v, w)-H_1(u, w),\\
f_4(u, v, w)&=F_4(u, v)-F_1(v, w)-H_2(u, w),
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

*où $F_1, F_2, F_3, F_4, H_1, H_2$ désignent des fonctions à valeurs appartenant à $M$.*

## 3. L'équation fonctionnelle

$$\boldsymbol{f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) + f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) + f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) + f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) = 0}$$

Envisageons à présent l'équation fonctionnelle à cinq fonctions inconnues

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) + f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) + f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) + f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{3.1}$$

Si l'on y pose successivement

$$x_5 = x_5^0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad x_3 = x_3^0, \quad x_4 = x_4^0,$$

on obtient respectivement

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= F_5(x_2, x_3, x_4) + G_5(x_3, x_4, x_1) + H_5(x_4, x_1, x_2) + I_5(x_1, x_2, x_3),\\
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) &= F_1(x_3, x_4, x_5) + G_1(x_4, x_5, x_2) + H_1(x_5, x_2, x_3) + I_1(x_2, x_3, x_4),\\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) &= F_2(x_4, x_5, x_1) + G_2(x_5, x_1, x_3) + H_2(x_1, x_3, x_4) + I_2(x_3, x_4, x_5),\\
f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) &= F_3(x_5, x_1, x_2) + G_3(x_1, x_2, x_4) + H_3(x_2, x_4, x_5) + I_3(x_4, x_5, x_1),\\
f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) &= F_4(x_1, x_2, x_3) + G_4(x_2, x_3, x_5) + H_4(x_3, x_5, x_1) + I_4(x_5, x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour que (3.2) soit une solution de l'équation (3.1), il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned}
&F_1(x_3, x_4, x_5) + G_1(x_4, x_5, x_2) + H_1(x_5, x_2, x_3) + I_1(x_2, x_3. x_4)\\
&+ F_2(x_4, x_5, x_1) + G_2(x_5, x_1, x_3) + H_2(x_1, x_3, x_4) + I_2(x_3, x_4, x_5)\\
&+ F_3(x_5, x_1, x_2) + G_3(x_1, x_2, x_4) + H_3(x_2, x_4, x_5) + I_3(x_4, x_5, x_1)\\
&+ F_4(x_1, x_2, x_3) + G_4(x_2, x_3, x_5) + H_4(x_3, x_5, x_1) + I_4(x_5, x_1, x_2)\\
&+ F_5(x_2, x_3, x_4) + G_5(x_3, x_4, x_1) + H_5(x_4, x_1, x_2) + I_5(x_1, x_2, x_3) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Si l'on y fait successivement les dix substitutions suivantes:

1° $x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0;$ 2° $x_1 = x_1^0, \quad x_3 = x_3^0;$

3° $x_1 = x_1^0, \quad x_4 = x_4^0;$ 4° $x_1 = x_1^0, \quad x_5 = x_5^0;$

5° $x_2 = x_2^0, \quad x_3 = x_3^0;$ 6° $x_2 = x_2^0, \quad x_4 = x_4^0;$

7° $x_2 = x_2^0, \quad x_5 = x_5^0;$ 8° $x_3 = x_3^0, \quad x_4 = x_4^0;$

9° $x_3 = x_3^0, \quad x_5 = x_5^0;$ 10° $x_4 = x_4^0, \quad x_5 = x_5^0,$

on parvient a dix équations suivantes:

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
F_1(x_3, x_4, x_5) + I_2(x_3, x_4, x_5) &= \overset{1}{g}_{12}(x_3, x_4) + \overset{2}{g}_{12}(x_4, x_5) + \overset{3}{g}_{12}(x_5, x_3),\\
G_1(x_4, x_5, x_2) + H_3(x_2, x_4, x_5) &= \overset{1}{g}_{13}(x_2, x_4) + \overset{2}{g}_{13}(x_4, x_5) + \overset{3}{g}_{13}(x_5, x_2),\\
H_1(x_5, x_2, x_3) + G_4(x_2, x_3, x_5) &= \overset{1}{g}_{14}(x_2, x_3) + \overset{2}{g}_{14}(x_3, x_5) + \overset{3}{g}_{14}(x_5, x_2),\\
F_5(x_2, x_3, x_4) + I_1(x_2, x_3, x_4) &= \overset{1}{g}_{15}(x_2, x_3) + \overset{2}{g}_{15}(x_3, x_4) + \overset{3}{g}_{15}(x_4, x_2),\\
F_2(x_4, x_5, x_1) + I_3(x_4, x_5, x_1) &= \overset{1}{g}_{23}(x_1, x_4) + \overset{2}{g}_{23}(x_4, x_5) + \overset{3}{g}_{23}(x_5, x_1),\\
G_2(x_5, x_1, x_3) + H_4(x_3, x_5, x_1) &= \overset{1}{g}_{24}(x_1, x_3) + \overset{2}{g}_{24}(x_3, x_5) + \overset{3}{g}_{24}(x_5, x_1),\\
G_5(x_3, x_4, x_1) + H_2(x_1, x_3, x_4) &= \overset{1}{g}_{25}(x_1, x_3) + \overset{2}{g}_{25}(x_3, x_4) + \overset{3}{g}_{25}(x_4, x_1),\\
F_3(x_5, x_1, x_2) + I_4(x_5, x_1, x_2) &= \overset{1}{g}_{34}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{34}(x_2, x_5) + \overset{3}{g}_{34}(x_5, x_1),\\
H_5(x_4, x_1, x_2) + G_3(x_1, x_2, x_4) &= \overset{1}{g}_{35}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{35}(x_2, x_4) + \overset{3}{g}_{35}(x_4, x_1),\\
F_4(x_1, x_2, x_3) + I_5(x_1, x_2, x_3) &= \overset{1}{g}_{45}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{45}(x_2, x_3) + \overset{3}{g}_{45}(x_3, x_1).
\end{aligned}
$$

Les formules (3.2), vu les équations (3.4), deviennent:

$$
(3.5)\qquad
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= F_5(x_2, x_3, x_4) - F_4(x_1, x_2, x_3) + G_5(x_3, x_4, x_1) - G_3(x_1, x_2, x_4)\\
&\quad + \overset{1}{g}_{45}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{45}(x_2, x_3) + \overset{3}{g}_{45}(x_3, x_1) + \overset{1}{g}_{35}(x_1, x_2)\\
&\quad + \overset{2}{g}_{35}(x_2, x_4) + \overset{3}{g}_{35}(x_4, x_1),\\
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) &= F_1(x_3, x_4, x_5) - F_5(x_2, x_3, x_4) + G_1(x_4, x_5, x_2) - G_4(x_2, x_3, x_5)\\
&\quad + \overset{1}{g}_{15}(x_2, x_3) + \overset{2}{g}_{15}(x_3, x_4) + \overset{3}{g}_{15}(x_4, x_2) + \overset{1}{g}_{14}(x_2, x_3)\\
&\quad + \overset{2}{g}_{14}(x_3, x_5) + \overset{3}{g}_{14}(x_5, x_2),\\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) &= F_2(x_4, x_5, x_1) - F_1(x_4, x_4, x_5) + G_2(x_5, x_1, x_3) - G_5(x_3, x_4, x_1)\\
&\quad + \overset{1}{g}_{12}(x_3, x_4) + \overset{2}{g}_{12}(x_4, x_5) + \overset{3}{g}_{12}(x_5, x_3) + \overset{1}{g}_{25}(x_1, x_3)\\
&\quad + \overset{2}{g}_{25}(x_3, x_4) + \overset{3}{g}_{25}(x_4, x_1),\\
f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) &= F_3(x_5, x_1, x_2) - F_2(x_4, x_5, x_1) + G_3(x_1, x_2, x_4) - G_1(x_4, x_5, x_2)\\
&\quad + \overset{1}{g}_{23}(x_1, x_4) + \overset{2}{g}_{23}(x_4, x_5) + \overset{3}{g}_{23}(x_5, x_1) + \overset{1}{g}_{13}(x_2, x_4)\\
&\quad + \overset{2}{g}_{13}(x_4, x_5) + \overset{3}{g}_{13}(x_5, x_2),\\
f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) &= F_4(x_1, x_2, x_3) - F_3(x_5, x_1, x_2) + G_4(x_2, x_3, x_5) - G_2(x_5, x_1, x_3)\\
&\quad + \overset{1}{g}_{34}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{34}(x_2, x_5) + \overset{3}{g}_{34}(x_5, x_1) + \overset{1}{g}_{24}(x_1, x_3)\\
&\quad + \overset{2}{g}_{24}(x_3, x_5) + \overset{3}{g}_{24}(x_5, x_1).
\end{aligned}
$$

Pour que (3.4) soit une solution de l'équation (3.1), la condition suivante doit être remplie:

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{g}_{45}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{45}(x_2, x_3) + \overset{3}{g}_{45}(x_3, x_1) + \overset{1}{g}_{35}(x_1, x_2) + \overset{2}{g}_{35}(x_2, x_4) + \overset{3}{g}_{35}(x_4, x_1)\\
&+ \overset{1}{g}_{15}(x_2, x_3) + \overset{2}{g}_{15}(x_3, x_4) + \overset{3}{g}_{15}(x_4, x_2) + \overset{1}{g}_{14}(x_2, x_3) + \overset{2}{g}_{14}(x_3, x_5) + \overset{3}{g}_{14}(x_5, x_2)
\end{aligned}
$$

$$+ g^{1}_{12}(x_3, x_4) + g^{2}_{12}(x_4, x_5) + g^{3}_{12}(x_5, x_3) + g^{1}_{25}(x_1, x_3) + g^{2}_{25}(x_3, x_4) + g^{3}_{25}(x_4, x_1)$$
$$+ g^{1}_{23}(x_1, x_4) + g^{2}_{23}(x_4, x_5) + g^{3}_{23}(x_5, x_1) + g^{1}_{13}(x_2, x_4) + g^{2}_{13}(x_4, x_5) + g^{3}_{13}(x_5, x_2)$$
$$+ g^{1}_{34}(x_1, x_2) + g^{2}_{34}(x_2, x_5) + g^{3}_{34}(x_5, x_1) + g^{1}_{24}(x_1, x_3) + g^{2}_{24}(x_3, x_5) + g^{3}_{24}(x_5, x_1) = 0.$$

Si les trois des variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sont prises comme constantes, on parvient à dix équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&g^{1}_{45}(x_1, x_2) + g^{1}_{35}(x_1, x_2) + g^{1}_{34}(x_1, x_2) = A_1(x_1) + B_1(x_2),\\
&g^{2}_{45}(x_2, x_3) + g^{1}_{14}(x_2, x_3) + g^{1}_{15}(x_2, x_3) = A_2(x_2) + B_2(x_3),\\
&g^{3}_{45}(x_3, x_1) + g^{1}_{25}(x_1, x_3) + g^{1}_{24}(x_1, x_3) = A_3(x_3) + B_3(x_1),\\
&g^{2}_{35}(x_2, x_4) + g^{3}_{15}(x_4, x_2) + g^{1}_{13}(x_2, x_4) = A_4(x_4) + B_4(x_2),\\
&g^{3}_{35}(x_4, x_1) + g^{3}_{25}(x_4, x_1) + g^{1}_{23}(x_1, x_4) = A_5(x_1) + B_5(x_4),\\
&g^{2}_{15}(x_3, x_4) + g^{1}_{12}(x_3, x_4) + g^{2}_{25}(x_3, x_4) = A_6(x_3) + B_6(x_4),\\
&g^{2}_{14}(x_3, x_5) + g^{3}_{12}(x_5, x_3) + g^{2}_{24}(x_3, x_5) = A_7(x_3) + B_7(x_5),\\
&g^{3}_{14}(x_5, x_2) + g^{3}_{13}(x_5, x_2) + g^{2}_{34}(x_2, x_5) = A_8(x_5) + B_8(x_2),\\
&g^{2}_{12}(x_4, x_5) + g^{2}_{23}(x_4, x_5) + g^{2}_{13}(x_4, x_5) = A_9(x_4) + B_9(x_5),\\
&g^{3}_{23}(x_5, x_1) + g^{3}_{34}(x_5, x_1) + g^{3}_{24}(x_5, x_1) = A_{10}(x_5) + B_{10}(x_1).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

D'après (3.6), les formules (3.5) reçoivent la forme que voici:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}& F_5(x_2, x_3, x_4) - F_4(x_1, x_2, x_3) + G_5(x_3, x_4, x_1)\\
&- G_3(x_1, x_2, x_4) - g^{1}_{34}(x_1, x_2) + g^{2}_{45}(x_2, x_3) - g^{1}_{25}(x_1, x_3)\\
&- g^{1}_{24}(x_1, x_3) - g^{3}_{15}(x_4, x_2) - g^{1}_{13}(x_2, x_4) - g^{3}_{25}(x_4, x_1)\\
&- g^{1}_{23}(x_1, x_4) + A_1(x_1) + A_3(x_3) + A_4(x_4) + A_5(x_1)\\
&+ B_1(x_2) + B_3(x_1) + B_4(x_2) + B_5(x_4),\\
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) = {}& F_1(x_3, x_4, x_5) - F_5(x_2, x_3, x_4) + G_1(x_4, x_5, x_2)\\
&- G_4(x_2, x_3, x_5) - g^{2}_{45}(x_2, x_3) + g^{2}_{15}(x_3, x_4) + g^{3}_{15}(x_4, x_2)\\
&- g^{3}_{12}(x_5, x_3) - g^{2}_{24}(x_3, x_5) - g^{3}_{13}(x_5, x_2) - g^{2}_{34}(x_2, x_5)\\
&+ A_2(x_2) + A_7(x_3) + A_8(x_5) + B_2(x_3) + B_7(x_5) + B_8(x_2),\\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) = {}& F_2(x_4, x_5, x_1) - F_1(x_3, x_4, x_5) + G_2(x_5, x_1, x_3)\\
&- G_5(x_3, x_4, x_1) - g^{2}_{15}(x_3, x_4) + g^{2}_{12}(x_4, x_5) + g^{3}_{12}(x_5, x_3)\\
&+ g^{1}_{25}(x_1, x_3) + g^{3}_{25}(x_4, x_1) + A_6(x_3) + B_6(x_4),\\
f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) = {}& F_3(x_5, x_1, x_2) - F_2(x_4, x_5, x_1) + G_3(x_1, x_2, x_4)\\
&- G_1(x_4, x_5, x_2) + g^{1}_{23}(x_1, x_4) + g^{3}_{23}(x_5, x_1) - g^{2}_{12}(x_4, x_5)\\
&+ g^{1}_{13}(x_2, x_4) + g^{3}_{13}(x_5, x_2) + A_9(x_4) + B_9(x_5),\\
f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) = {}& F_4(x_1, x_2, x_3) - F_3(x_5, x_1, x_2) + G_4(x_2, x_3, x_5)\\
&- G_2(x_5, x_1, x_3) + g^{1}_{34}(x_1, x_2) + g^{2}_{34}(x_2, x_5) - g^{3}_{23}(x_5, x_1)\\
&+ g^{1}_{24}(x_1, x_3) + g^{2}_{24}(x_3, x_5) + A_{10}(x_5) + B_{10}(x_1).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Introduisons maintenant les nouvelles notations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&F_1'(x_3, x_4, x_5) = F_1(x_3, x_4, x_5) + g_{15}^{2}(x_3, x_4) - g_{12}^{3}(x_5, x_3),\\
&F_2'(x_4, x_5, x_1) = F_2(x_4, x_5, x_1) + g_{12}^{2}(x_4, x_5),\\
&F_3'(x_5, x_1, x_2) = F_3(x_5, x_1, x_2) + g_{23}^{3}(x_5, x_1),\\
&F_4'(x_1, x_2, x_3) = F_4(x_1, x_2, x_3) + g_{34}^{1}(x_1, x_2) + g_{24}^{1}(x_1, x_3),\\
&F_5'(x_2, x_3, x_4) = F_6(x_2, x_3, x_4) + g_{45}^{2}(x_2, x_3) - g_{15}^{3}(x_4, x_2),\\
&G_1'(x_4, x_5, x_2) = G_1(x_4, x_5, x_2) - g_{13}^{3}(x_5, x_2),\\
&G_3'(x_1, x_2, x_4) = G_3(x_1, x_2, x_4) + g_{13}^{1}(x_2, x_4) - g_{23}^{1}(x_1, x_4),\\
&G_4'(x_2, x_3, x_5) = G_4(x_2, x_3, x_5) + g_{24}^{2}(x_3, x_5) - g_{34}^{2}(x_2, x_5),\\
&G_5'(x_3, x_4, x_1) = G_5(x_3, x_4, x_1) - g_{25}^{1}(x_1, x_3) - g_{25}^{3}(x_4, x_1).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Les formules (3.7), d'après (3.8), reçoivent la forme suivante (où sont préalablement supprimés les accents):

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & F_5(x_2, x_3, x_4) - F_4(x_1, x_2, x_3) + G_5(x_3, x_4, x_1)\\
& - G_3(x_1, x_2, x_4) + A_1(x_1) + A_3(x_3) + A_4(x_4) + A_5(x_1)\\
& + B_1(x_2) + B_3(x_1) + B_4(x_2) + B_5(x_4),\\
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) = {} & F_1(x_3, x_4, x_5) - F_5(x_2, x_3, x_4) + G_1(x_4, x_5, x_2)\\
& - G_4(x_2, x_3, x_5) + A_2(x_2) + A_7(x_3) + A_8(x_5)\\
& + B_2(x_3) + B_7(x_5) + B_8(x_2),\\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) = {} & F_2(x_4, x_5, x_1) - F_1(x_3, x_4, x_5) + G_2(x_5, x_1, x_3)\\
& - G_5(x_3, x_4, x_1) + A_6(x_3) + B_6(x_4),\\
f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) = {} & F_3(x_5, x_1, x_2) - F_2(x_4, x_5, x_1) + G_3(x_1, x_2, x_4)\\
& - G_1(x_4, x_5, x_2) + A_9(x_4) + B_9(x_5),\\
f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) = {} & F_4(x_1, x_2, x_3) - F_3(x_5, x_1, x_2) + G_4(x_2, x_3, x_5)\\
& - G_2(x_5, x_1, x_3) + A_{10}(x_5) + B_{10}(x_1).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Le système des fonctions (3.9) représentera une solution de l'équation (3.1) si l'on a

$$
\begin{aligned}
& A_1(x_1) + A_2(x_2) + A_3(x_3) + A_4(x_4) + A_5(x_1)\\
& + A_6(x_3) + A_7(x_3) + A_8(x_5) + A_9(x_4) + A_{10}(x_5)\\
& + B_1(x_2) + B_2(x_3) + B_3(x_1) + B_4(x_2) + B_5(x_4)\\
& + B_6(x_4) + B_7(x_5) + B_8(x_2) + B_9(x_5) + B_{10}(x_1) = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Si quatre parmi les variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sont des constantes, l'équation (3.10) conduit à cinq équations qui suivent

$$
\begin{aligned}
&A_1(x_1)+A_5(x_1)+B_3(x_1)+B_{10}(x_1)=k_1,\\
&A_2(x_2)+B_1(x_2)+B_4(x_2)+B_8(x_2)=k_2,\\
&A_3(x_3)+A_6(x_3)+A_7(x_4)+B_2(x_3)=k_3,\\
&A_4(x_4)+A_9(x_4)+B_5(x_4)+B_6(x_4)=k_4,\\
&A_8(x_5)+A_{10}(x_5)+B_7(x_5)+B_9(x_5)=k_5,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

avec $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=0$.

Il résulte de là que

$$
\begin{aligned}
&B_{10}(x_1)=k_1-A_1(x_1)-A_5(x_1)-B_3(x_1),\\
&B_8(x_2)=k_2-A_2(x_2)-B_1(x_2)-B_4(x_2),\\
&B_2(x_3)=k_3-A_3(x_3)-A_6(x_3)-A_7(x_3),\\
&B_6(x_4)=k_4-A_4(x_4)-A_9(x_4)-B_5(x_4),\\
&B_9(x_5)=k_5-A_8(x_5)-A_{10}(x_5)-B_7(x_5),
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

avec $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=0$.

Selon (3.12) les formules (3.9) deviennent

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)= {} & F_5(x_2,x_3,x_4)-F_4(x_1,x_2,x_3)+G_5(x_3,x_4,x_1)\\
&-G_3(x_1,x_2,x_4)+A_1(x_1)+A_3(x_3)+A_4(x_4)+A_5(x_1)\\
&+B_1(x_2)+B_3(x_1)+B_4(x_2)+B_5(x_4),\\
f_2(x_2,x_3,x_4,x_5)= {} & F_1(x_3,x_4,x_5)-F_5(x_2,x_3,x_4)+G_1(x_4,x_5,x_2)\\
&-G_4(x_2,x_3,x_5)+A_8(x_5)-A_3(x_3)-A_6(x_3)+B_7(x_5)\\
&-B_1(x_2)-B_4(x_2)-k_1-k_4-k_5,\\
f_3(x_3,x_4,x_5,x_1)= {} & F_2(x_4,x_5,x_1)-F_1(x_3,x_4,x_5)+G_2(x_5,x_1,x_3)\\
&-G_5(x_3,x_4,x_1)+A_6(x_3)-A_4(x_4)-A_9(x_4)-B_5(x_4)+k_4,\\
f_4(x_4,x_5,x_1,x_2)= {} & F_3(x_5,x_1,x_2)-F_2(x_4,x_5,x_1)+G_3(x_1,x_2,x_4)\\
&-G_1(x_4,x_5,x_2)+A_9(x_4)-A_8(x_5)-A_{10}(x_5)-B_7(x_5)+k_5,\\
f_5(x_5,x_1,x_2,x_3)= {} & F_4(x_1,x_2,x_3)-F_3(x_5,x_1,x_2)+G_4(x_2,x_3,x_5)\\
&-G_2(x_5,x_1,x_3)+A_{10}(x_5)-A_1(x_1)-A_5(x_1)-B_3(x_1)+k_1,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

avec $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=0$.

Échangeons de nouveau les notations comme suit

$$
\begin{aligned}
&F_1'(x_3,x_4,x_5)=F_1(x_3,x_4,x_5)-A_6(x_3)-k_4,\\
&F_2'(x_4,x_5,x_1)=F_2(x_4,x_5,x_1)-A_9(x_4),\\
&F_3'(x_5,x_1,x_2)=F_3(x_5,x_1,x_2)-A_{10}(x_5),\\
&F_4'(x_1,x_2,x_3)=F_4(x_1,x_2,x_3)-A_1(x_1)-A_5(x_1)-B_3(x_1),
\end{aligned}
$$

$$F_5'(x_2, x_3, x_4) = F_5(x_2, x_3, x_4) + A_3(x_3) + B_1(x_2) + B_4(x_2),$$
$$G_1'(x_4, x_5, x_2) = G_1(x_4, x_5, x_2) + A_8(x_5) + B_7(x_5) - k_5,$$
$$G_4'(x_2, x_3, x_5) = G_4(x_2, x_3, x_5) + k_1,$$
$$G_5'(x_3, x_4, x_1) = G_5(x_3, x_4, x_1) + A_4(x_4) + B_5(x_4).$$

Alors le système (3.13), en supprimant les accents y figurant, prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= F_5(x_2, x_3, x_4) - F_4(x_1, x_2, x_3) + G_5(x_3, x_4, x_1) \\ &\qquad - G_3(x_1, x_2, x_4), \\
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5) &= F_1(x_3, x_4, x_5) - F_5(x_2, x_3, x_4) + G_1(x_4, x_5, x_2) \\ &\qquad - G_4(x_2, x_3, x_5), \\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_1) &= F_2(x_4, x_5, x_1) - F_1(x_3, x_4, x_5) + G_2(x_5, x_1, x_3) \\ &\qquad - G_5(x_3, x_4, x_1), \\
f_4(x_4, x_5, x_1, x_2) &= F_3(x_5, x_1, x_2) - F_2(x_4, x_5, x_1) + G_3(x_1, x_2, x_4) \\ &\qquad - G_1(x_4, x_5, x_2), \\
f_5(x_5, x_1, x_2, x_3) &= F_4(x_1, x_2, x_3) - F_3(x_5, x_1, x_2) + G_4(x_2, x_3, x_5) \\ &\qquad - G_2(x_5, x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant donnant toutes les fonctions

$$f_k : S^4 \to M \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

qui satisfont à l'équation fonctionnelle (3.1).

Théorème 2. — *La solution générale de l'équation* (3.1) *est donnée par le système* (3.14), *où les fonctions*

$$F_k, \ G_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

*prennent des valeurs dans l'ensemble $M$.*

## 4. Une équation fonctionnelle à six fonctions inconnues dépendant de cinq arguments

Prenons maintenant l'équation fonctionnelle à six fonctions inconnues:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + f_2(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + f_3(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) \\
&\quad + f_4(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + f_5(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + f_6(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous allons donner une solution de l'équation (4.1), n'insistant pas pour le moment sur le caractère de sa généralité. Cette solution est donnée par le système suivant de fonctions:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = {} & F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - F_2(x_2, x_3, x_4, x_5) \\
& + G_1(x_3, x_4, x_5, x_1) - G_5(x_1, x_2, x_3, x_5) \\
& + H_1(x_4, x_5, x_1, x_2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = {} & F_2(x_2, x_3, x_4, x_5) - F_3(x_3, x_4, x_5, x_6) \\
& + G_2(x_4, x_5, x_6, x_2) - G_6(x_2, x_3, x_4, x_6) \\
& + H_2(x_5, x_6, x_2, x_3), \\
f_3(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) = {} & F_3(x_3, x_4, x_5, x_6) - F_4(x_4, x_5, x_6, x_1) \\
& + G_3(x_5, x_6, x_1, x_3) - G_1(x_3, x_4, x_5, x_1) \\
& + H_3(x_6, x_1, x_3, x_4). \\
f_4(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) = {} & F_4(x_4, x_5, x_6, x_1) - F_5(x_5, x_6, x_1, x_2) \\
& + G_4(x_6, x_1, x_2, x_4) - G_2(x_4, x_5, x_6, x_2) \\
& - H_1(x_4, x_5, x_1, x_2), \\
f_5(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) = {} & F_5(x_5, x_6, x_1, x_2) - F_6(x_6, x_1, x_2, x_3) \\
& + G_5(x_3, x_2, x_3, x_5) - G_3(x_5, x_6, x_1, x_3) \\
& - H_2(x_5, x_6, x_2, x_3), \\
f_6(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & F_6(x_6, x_1, x_2, x_3) - F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
& + G_6(x_2, x_3, x_4, x_6) - G_4(x_6, x_1, x_2, x_4) \\
& - H_3(x_6, x_1, x_3, x_4).
\end{aligned}
$$

## 5. Éuaqtion fonctionnelle $f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_4, x_1) + f(x_4, x_1, x_2) = 0$

L'équation fonctionnelle

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_4, x_1) + f(x_4, x_1, x_2) = 0, \tag{5.1}$$

si l'on y pose $x_4 = \overset{0}{x}_4$, devient

$$f(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2) - H(x_2, x_3) + K(x_1, x_3). \tag{5.2}$$

Pour que (5.2) soit une solution de (5.1), la condition suivante doit être remplie:

$$
\begin{aligned}
& G(x_1, x_2) - H(x_2, x_3) + K(x_1, x_3) \\
& + G(x_2, x_3) - H(x_3, x_4) + K(x_2, x_4) \\
& + G(x_3, x_4) - H(x_4, x_1) + K(x_3, x_1) \\
& + G(x_4, x_1) - H(x_1, x_2) + K(x_4, x_2) = 0.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

En faisant $x_3 = \overset{1}{x}_3$ et $x_4 = \overset{1}{x}_4$, l'équation (5.3) donne

$$G(x_1, x_2) = H(x_1, x_2) + A(x_1) + B(x_2). \tag{5.4}$$

Alors (5.2) devient

$$f(x_1, x_2, x_3) = H(x_1, x_2) - H(x_2, x_3) + K(x_1, x_3) + A(x_1) + B(x_2), \tag{5.5}$$

où $A(x_1)$ et $B(x_2)$ peuvent être supprimés sans restreindre la généralité de la solution en question. En effet, en faisant

$$H(x_1, x_2) + B(x_2) = H'(x_1, x_2),$$

on a

$$H(x_2, x_3) + B(x_3) = H'(x_2, x_3)$$

et alors (5.5) devient

$$f(x_1, x_2, x_3) = H'(x_1, x_2) - H'(x_2, x_3) + K(x_1, x_3) + A(x_1) + B(x_3)$$
$$= H'(x_1, x_2) - H'(x_2, x_3) + K'(x_1, x_3).$$

Donc, en supprimant les accents, on a (5.5), sans $A(x_1)$ et $B(x_2)$, à savoir

$$f(x_1, x_2, x_3) = H(x_1, x_2) - H(x_2, x_3) + K(x_1, x_3).$$

Pour que $f$, donnée à l'aide de la dernière formule, soit une solution de (5.1), la fonction $K$ doit remplir l'égalité

$$K(x_1, x_3) + K(x_2, x_4) + K(x_3, x_1) + K(x_4, x_2) = 0. \tag{5.6}$$

Si l'on met $x_2 = \overset{2}{x_2}$, $x_4 = \overset{2}{x_4}$, l'équation (5.6), d'après l'hypothèse H, pour $m = 2$ se ramène à

$$K(x_1, x_3) + K(x_3, x_1) = 2\alpha \qquad (\alpha = \text{const} \in M).$$

On en déduit

$$K(x_1, x_3) - \alpha = I(x_1, x_3) - I(x_3, x_1). \tag{5.7}$$

On a alors

$$f(x_1, x_2, x_3) = H(x_1, x_2) - H(x_2, x_3) + I(x_1, x_3) - I(x_3, x_1) + \alpha. \tag{5.8}$$

La fonction $f$, donnée par (5.8), sera une solution de (5.1) si $4\alpha = 0$, ce qui a bien lieu d'après l'hypothèse H pour $m = 4$ dans le cas où $\alpha = 0$.

Donc, la solution générale de (5.1) est

$$f(x_1, x_2, x_3) = H(x_1, x_2) - H(x_2, x_3) + I(x_1, x_3) - I(x_3, x_1). \tag{5.9}$$

La méthode employée plus haut est plus simple que celle appliquée à (5.1) dans l'article [1].

Il est intéressant de passer de (2.10), suivi de

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f,$$

à la solution (5.9) de l'équation (5.1).

En premier lieu, l'hypothèse $f_1 = f_2$, avec $w = w_0$ ($= \text{const} \in M$) donne

$$F_2(u, v) = F_1(u, v) + A_1(u) + B_1(v). \tag{5.10}$$

Par une voie analogue, on obtient

$$F_3(u, v) = F_1(u, v) + A_2(u) + B_2(v), \tag{5.11}$$

$$F_4(u, v) = F_1(u, v) + A_3(u) + B_3(v). \tag{5.12}$$

Les formules (5.10) deviennent alors

$$\begin{aligned}
f(u, v, w) &= F_1(u, v) - F_1(v, w) - A_1(v) - B_1(w) + H_1(w, u),\\
f(u, v, w) &= F_1(u, v) - F_1(v, w) + A_1(u) + B_1(v) - A_2(v) - B_2(w) + H_2(w, u),\\
f(u, v, w) &= F_1(u, v) - F_1(v, w) + A_2(u) + B_2(v) - A_3(v) - B_3(w) - H_1(u, w),\\
f(u, v, w) &= F_1(u, v) - F_1(v, w) + A_3(u) + B_3(v) - H_2(u, w).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les dernières équations, par addition membre à membre, conduisent à

$$4 f(u, v, w) = [4 F_1(u, v) + A_1(u) + B_1(v) + A_2(u) + B_2(v) + A_3(u) + B_3(v)]$$
$$-[4 F_1(v, w) + A_1(v) + B_1(w) + A_2(v) + B_2(w) + A_3(v) + B_3(w)]$$
$$+ [H_1(w, u) + H_2(w, u)] - [H_1(u, w) + H_2(u, w)].$$

En posant

$$F(u, v) = F_1(u, v) + \frac{1}{4}[A_1(u) + A_2(u) + A_3(u) + B_1(v) + B_2(v) + B_3(v)],$$

$$G(u, w) = \frac{1}{4}[H_1(w, u) + H_2(w, u)],$$

il vient

$$f(u, v, w) = F(u, v) - F(v, w) + G(u, w) - G(w, u) \tag{5.14}$$

ce qui est valable si l'hypothèse H a lieu pour $m = 2$.

Ce passage de (2.10), dans le cas où

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$$

a été fait par D. Djoković.

Il serait également intéressant de passer de (2.10), en supposant que, au moins deux des fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4$, soient identiques, en excluant le cas $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$ qui est traité plus haut.

Nous reviendrons sur des questions connexes avec celles traitées dans cet article.

## RÉFÉRENCES

[1] J. Aczél, M. Ghermănescu, M. Hosszú: *On cyclic equations.* Publications of the Institute of the Hungarian Academy of Sciences, vol. 5, series A, 1960, p. 215—221.

*Voir* également:

H. Hosszú: *A linearis függvényegyenletek egy osztályáról.* A Magyar Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztályának Közleményei, t. 11, 1961, p. 249—261.

[2] D. Djoković: *Sur certaines classes des équations fonctionnelles cycliques* (en serbe avec un résumé en français). Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université de Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 114, 1963.