PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 165–168.

UNE NOTE SUR LES FORMULES DE J. PLEMELJ

Dragiša Mitrović

(Présenté le 5 juin 1964)

Il est bien connu qu'un large groupe des théorèmes de la théorie classique des fonctions analytiques est valable dans la théorie des fonctions analytiques dont les valeurs se trouvent dans un espace de Banach ([2], pp. 92—106).

Dans cette note aussi sera-t-il montré que les fameuses formules de Plemelj ([3]) admettent une extension aux fonctions analytiques d'une variable complexe à valeurs dans un espace de Banach complexe.

Dans ce qui suit, nous nous servirons de notations suivantes: B: un espace de Banach complexe avec la norme $\|x\|$ de $x \in B$; B^*: l'ensemble de toutes les fonctionnelles x^* linéaires bornées, définies sur B;

θ: l'élément-zéro de B;

L: une courbe fermée simple située dans le plan complexe en le partageant en le domaine intérieur D^+ et le domaine extérieur D^-. On suppose que cette courbe est définie par une fonction dont la dérivée est continue; τ, t: les affixes des points sur L.

Soit $\varphi(\tau)$ une fonction de L dans B. On suppose que la fonction $\varphi(\tau)$ soit fortement continue sur L ($\|\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)\| \to 0$ lorsque $\tau \to \tau_0$). Alors l'intégrale du type de Cauchy

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} \tag{1}$$

existe comme une limite forte des sommes de Riemann. Puisque la fonction numérique

$$x^*[\Phi(\zeta)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{x^*[\varphi(\tau)]\, d\tau}{\tau - \zeta}$$

est holomorphe dans tout le plan, les points de L exceptés, l'intégrale (1) définit deux fonctions holomorphes de D^+ et D^- dans B:

$$\Phi(\zeta) = \Phi^+(\zeta) \text{ si } \zeta \in D^+, \qquad \Phi(\zeta) = \Phi^-(\zeta) \text{ si } \zeta \in D^-.$$

Remarquons que *la fonction* $\Phi(\zeta)$ *a la valeur* θ *au point à l'infini.*

Pour cela démontrer, on développe la fonction $x^*[\Phi(\zeta)]$ au voisinage du point $\zeta=\infty$. On a

$$\frac{1}{\tau-\zeta}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^{n-1}}{\zeta^n},$$

et, après multiplication par $\frac{1}{2\pi i}\,x^*[\varphi(\tau)]$, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne

$$x^*[\Phi^-(\zeta)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n} \tag{2}$$

avec

$$c_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \tau^{n-1}x^*[\varphi(\tau)]\,d\tau.$$

Le développement (2) implique l'égalité $x^*[\Phi^-(\infty)]=0$ pour toute $x^*\in B^*$. Il en résulte que $\Phi^-(\infty)=\theta$.

Traçons un cercle C de centre $t\in L$ et de rayon ε arbitrairement petit qui coupe la courbe L en deux points. Soit L_ε la partie de L qui se trouve dans C. *La limite forte de l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\qquad(\varepsilon\to 0),$$

si elle existe, est dite la valeur principale de l'intégrale singulière

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},\qquad t\in L. \tag{3}$$

On va voir que la valeur principale de l'intégrale (3) existe pour tout le point $t\in L$, si la fonction $\varphi(\tau)$ satisfait à la condition de Hölder sur L, c'est-à-dire, si

$$\|\varphi(\tau_2)-\varphi(\tau_1)\|\leq A\,|\tau_2-\tau_1)|^\alpha$$

pour tout le couple $(\tau_2,\tau_1)\in L$, où A est une constante positive et $0<\alpha\leq 1$. En particulier, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau \tag{4}$$

existe comme l'intégrale impropre, car

$$\left\|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right\|\leq\frac{A}{|\tau-t|^{1-\alpha}}.$$

On pose le problème suivant: *Comment se comporte l'intégrale* (1) *lorsque le point* ζ *tend vers le point arbitraire* $t\in L$?

Les formules généralisées de Plemelj apportent la réponse.

Lemme 1. *Soit* $\varphi(\tau)$ *une fonction de* L *dans* B. *Si* $\varphi(\tau)$ *satisfait à la condition de Hölder sur* L, *l'intégrale singulière* (3) *existe dans le sens de la valeur principale et elle peut être représentée dans la forme:*

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{2}\varphi(t)\,. \tag{5}$$

Posons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L-L_\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau-t}\,. \tag{6}$$

Le premier terme du second membre de (6) tend en norme vers l'intégrale (4) lorsque $\varepsilon\to 0$. En effet,

$$\left\|\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau-\int_{L-L_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau\right\|=\left\|\int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau\right\|\leq$$

$$A\int_{L_\varepsilon} \frac{|d\tau|}{|\tau-t|^{1-\alpha}}\to 0 \qquad (\varepsilon\to 0).$$

Le second terme tend fortement vers $\frac{1}{2}\varphi(t)$ lorsque $\varepsilon\to 0$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

Lemme 2. *Soit*

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-\zeta}\,d\tau, \qquad t\in L.$$

Si la fonction $\varphi(\tau)$ *de* L *dans* B, *satisfait sur* L *à la condition de Hölder, alors* $\|\psi(\zeta)-\psi(t)\|\to 0$ *uniformément (par rapport à la position du point* t *sur* L*) lorsque* $\zeta\to t$ *en suivant un chemin quelconque dans* D^+ *ou* D^-.

La démonstration est analogue à celle des fonctions numériques ([1], pp. 32—35).

Théorème (J. Plemelj). *Soit* $\varphi(\tau)$ *une fonction de* L *dans* B. *Si* $\varphi(\tau)$ *admet sur* L *la condition de Hölder, l'intégrale* (1) *converge en norme vers les valeurs limites* $\Phi^+(t)$ *et* $\Phi^-(t)$ *lorsque* $\zeta\to t\in L$ *en suivant un chemin quelconque qui reste dans* D^+ *ou* D^- *respectivement. On a alors les formules suivantes:*

$$\Phi^+(t)=\Phi(t)+\frac{1}{2}\varphi(t), \tag{7}$$

$$\Phi^-(t)=\Phi(t)-\frac{1}{2}\varphi(t), \tag{8}$$

où $\Phi(t)$ *est l'intégrale singulière* (3) *prise dans le sens de la valeur principale.*

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que

$$\Phi(\zeta)=\psi(\zeta)+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-\zeta}\,. \tag{9}$$

Désignons par $\Phi^{\pm}(t)$ et $\psi(t)$ les valeurs limites fortes de $\Phi^{\pm}(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ lorsque $\zeta \to t$ en restant dans $D^{\pm}$ respectivement. En passant à la limite dans (9), on arrive au résultat:

$$\Phi^{+}(t) = \psi(t) + \varphi(t), \tag{10}$$

$$\Phi^{-}(t) = \psi(t). \tag{11}$$

Enfin, en exprimant la fonction $\psi(t)$ à l'aide de fonctions $\Phi(t)$ et $\varphi(t)$, liées par égalité (5), les relations (10) et (11) se transforment aux relations (7) et (8).

Le résultat que nous venons d'obtenir s'applique au problème de contour suivant:

Soit $\varphi(\tau)$ une fonction de L dans B admettant la condition de Hölder sur L. Trouver une fonction $\Phi^{+}(\zeta)$ holomorphe de D^{+} dans B et une fonction $\Phi^{-}(\zeta)$ holomorphe de D^{-} dans B ayant la valeur θ au point à l'infinie, si

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t)$$

sur L.

En vertu de formules (7) et (8), on voit directement que la solution est la fonction

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta}.$$

La solution est unique. La démonstration classique de ce fait peut rester intacte ([2], p. 98), car le théorème de Liouville et celui du prolongement analytique continu sont valables pour les fonctions analytiques (d'une variable complexe) à valeurs vectorielles dans B.

RÉFÉRENCES

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Москва, 1958.

[2] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. vol. 31 (1957).

[3] J. Plemelj, *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analiticher Funktionen, Randwerte betreffend;* Monatsh. für Math. u. Phys., XIX Jahrgang, 1908, 205—210.