PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18) 1964, p. 147—155.

SUR LES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET INTÉGRALES

Mahmud Bajraktarević

(Communiqué le 10 avril 1964)

L'objet de la présente note est l'étude d'une classe d'équations fonctionnelles de la forme

$$\varphi(x)+\varphi[f_\varphi(x)]=F(x)$$

où $f_\varphi(x)$ est une fonction déterminée dans 1.1 et 1.2, et d'une classe d'équations intégrales qui peuvent être ramenées à la forme de ladite équation fonctionnelle.

Certains cas particuliers de cette équation ont été déjà traités antérieurement: Par Kordylewski J. et Kuczma M. ([6] et [7]), par Kuczma M. ([8], [9] et [10] et par l'auteur ([1] et [2]) dans le cas où $f_\varphi(x)\equiv f(x)$ et par l'auteur dans les cas où $f_\varphi(x)\equiv\varphi(x)$ [3] respectivement

$$f_\varphi(x)\equiv f_1\{\varphi^{\lambda_1}[f_2\{\varphi^{\lambda_2}[\cdots[f_r\{\varphi^{\lambda_r}(x)\}]\cdots]\}]\}$$

$\left(\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu>0,\ \lambda_\nu\geqslant 0\text{ entier; } \varphi^\lambda \text{ étant les itérées successives de } \varphi(x)\right)$ [4].

Le but principal de la présente note est de donner les conditions d'existence, d'unicité et de construction d'une solution, continue sur un segment, de l'équation considérée.

1. Notions, notations et remarques préliminaires

1.1. — Soit $\{f_i(x)\}_0^\infty$ une suite de fonctions continues monotones strictement croissantes dans $J=[a, b]$ telles que

(1) $$f_i(x)>x\ (a\leqslant x<b),\quad f_i(b)=b,\quad i=0, 1, 2, \ldots$$

et telles que les fonctions

$$m(x)=\inf_{i=0, 1, 2, \ldots}\{f_i(x)\},\qquad M(x)=\sup_{i=0, 1, 2, \ldots}\{f_i(x)\}$$

sont, elles-mêmes, continues monotones strictement croissantes dans J avec

(2) $$x<m(x)\leqslant M(x)<b\ (a\leqslant x<b),\ m(b)=M(b)=b;$$

soit $\Lambda = C[a, b]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues dans J et $\{p_i\}_0^\infty$ une suite de nombres positifs tels que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad (p_i > 0).$$

On définit sur Λ un opérateur $A \in (\Lambda \to \Lambda)$ par la relation

$$A\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \varphi[f_i(x)] \quad (\varphi \in \Lambda,\ x \in J), \tag{3}$$

et on introduit les opérateurs A^k par les relations

$$A^0 \varphi(x) = \varphi(x), \quad A^{k+1}\varphi(x) = A[A^k \varphi(x)] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

On a évidemment les relations

$$A^k \varphi \in \Lambda, \quad A^k \varphi(b) = \varphi(b) \quad (\varphi \in \Lambda,\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

L'opérateur A est additif et continu, c'est-à-dire, linéaire dans le sens de la définition de [11].

Par l'induction on déduit les inégalités

$$m^k(a) \leqslant m^k(x) \leqslant f_{i_1}\{\cdots[f_{i_k}(x)]\} \leqslant M^k(x) \leqslant M^k(b) = b \quad (k = 1, 2, \ldots,\ x \in J), \tag{6}$$

d'où, pour tout $\varphi \in \Lambda$,

$$\lim_{k \to \infty} A^k \varphi(x) = \varphi(b) \ \textit{uniformément dans}\ J,\ \varphi \in \Lambda. \tag{7}$$

En introduisant les notations

$$f'(x) = \min_{\tau \in S'} \tau, \quad S' = \{\tau \mid \varphi(\tau) = \inf_{i=0,1,2,\ldots} \{\varphi[f_i(x)]\},\ m(x) \leqslant \tau \leqslant M(x)\},$$

$$f''(x) = \max_{\tau \in S''} \tau, \quad S'' = \{\tau \mid \varphi(\tau) = \sup_{i=0,1,2,\ldots} \{\varphi[f_i(x)]\},\ m(x) \leqslant \tau \leqslant M(x)\},$$

on aura les relations

$$\varphi[f'(x)] = \inf_{i=0,1,2,\ldots} \{\varphi[f_i(x)]\}, \quad \varphi[f''(x)] = \sup_{i=0,1,2,\ldots} \{\varphi[f_i(x)]\},$$

$$\varphi[f'(x)] \leqslant A\varphi(x) \leqslant \varphi[f''(x)].$$

$\varphi(x)$ étant continue sur le segment borné par $f'(x)$ et $f''(x)$, il existe le plus grand nombre $f_\varphi(x)$ sur ce segment tel que

$$\varphi[f_\varphi(x)] = A\varphi(x) \quad (x \in J,\ \varphi \in \Lambda). \tag{8}$$

La fonction $f_\varphi(x)$ ainsi définie, on a les relations

$$A^k \varphi(x) = \varphi\{f_\varphi[f_{A\varphi}[\cdots[f_{A^{k-1}\varphi}(x)]\cdots]]\} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ x \in J), \tag{9}$$

$$m^k(x) \leqslant f_\varphi\{f_{A\varphi}[\cdots[f_{A^{k-1}\varphi}(x)]\cdots]\} \leqslant M^k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots;\ x \in J). \tag{10}$$

La fonction $A\varphi(x)$, définie par (3), peut être écrite sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_a^b \varphi(y)\, d\{u_x(y)\} \quad (x \in J), \tag{11}$$

$$u_x(y) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} p_i E_{f_i(x)}(y), \quad E_x(y) = \begin{cases} 0 & (a \leqslant y < x), \\ 1 & (x \leqslant y \leqslant b), \end{cases} \quad x \in J, \tag{12}$$

l'intégrale étant prise dans le sens de Stieltjes.

1.2. — Les notations J, $f_i(x)$ $(i=0, 1, 2, \dots)$, $m(x)$, $M(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ et Λ ayant toujours les mêmes significations comme dans 1.1, la relation

$$(13) \qquad A\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \Psi_k(x) \textit{ uniformément dans } J,$$

$$\Psi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}\varphi[f_n(x)] \quad (k=0, 1, 2, \dots;\ a_{kn}\geqslant 0;\ x\in J;\ \varphi\in\Lambda,$$

où $T=(a_{kn})$ est une matrice régulière avec $a_{kn}\geqslant 0$, définit elle-même, un opérateur $A\in(\Lambda\to\Lambda)$ linéaire [11], en supposant dans (13) la convergence uniforme dans J pour tout $\varphi\in\Lambda$.

Les opérateurs A^k $(k=0, 1, 2, \dots)$, avec A donné par (13), sont ici encore définis par (4).

On voit aisément que toutes les propriétés, en particulier les relations (4)—(10), qui sont valables pour l'opérateur A, défini par (3), restent valables aussi pour l'opérateur A défini par (13). La fonction $A\varphi(x)$, définie par (13), peut être écrite dans la forme de l'intégrale de Stieltjes (11) avec

$$(14) \qquad u_x(y) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{k\to\infty} u_x^k(y), \qquad u_x^k(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} E_{f_n(x)}(y),$$

si l'on y suppose l'existence de la fonction limite $u_x(y)$ et $E_x(y)$ défini par (12).

La fonction $u_x(y)$ définie par (14) est, d'après un théorème connu ([5], p. 30), à variation bornée par rapport à $y(x)$ pour tout $x\in J$ $(y\in J)$. Le fait que:

$$(15) \qquad \begin{cases} u_x(y)=0 \quad (a\leqslant y<m(x),\ a\leqslant x\leqslant b); \\ \textit{pour } m(x)\leqslant y<M(x),\ a\leqslant x<b,\ u_x(y) \textit{ est monotone nondécrois-} \\ \textit{sante (noncroissante) par rapport à } y\ (x); \\ u_x(y)=1 \quad (M(x)\leqslant y\leqslant b,\ a\leqslant x\leqslant b), \end{cases}$$

entraîne, d'après ([5], p. 126, th. 3) et (13), la relation (11).

Remarque. — L'opérateur A défini par (3) est, en réalité, un cas particulier de l'opérateur A défini par (13), puisque A défini par (3) peut être écrit dans la forme (13) en choisissant, ce qui est toujours possible, convenablement la suite $\{f_n(x)\}_0^\infty$ et les a_{kn}.

En effet, formons la suite $\{\bar f_n(x)\}_0^\infty$ contenant seulement les fonctions $f_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ chacune une infinité de fois. Les coefficients a_{kn} dans la sèrie

$$\Psi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}\varphi[\bar f_n(x)] \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

correspondant aux $k+1$ premières fonctions $\bar f_n(x)$ toutes égales à la fonction $f_i(x)$, soient égaux à $p_i/(k+1)$, les autres (soient égaux) à zéro. En procédant ainsi pour tout $k, i=0, 1, 2, \dots$, on définit une matrice régulière $T=(a_{kn})$ pour laquelle on a

$$\Psi_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i\varphi[f_i(x)] \text{ uniformément dans } J \text{ pour tout } k\geqslant 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \Psi_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i\varphi[f_i(x)] \text{ uniformément dans } J.$$

2. Résultats

Théorème I. — *Pour que l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(x) + A\varphi(x) = F(x) \tag{16}$$

avec $F \in \Lambda$ *et l'opérateur* A *donné par* (3) *ou par* (13), *admette une seule solution* $\varphi \in \Lambda$, *il faut et il suffit que la série*

$$\frac{1}{2} F(b) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{A^k F(x) - F(b)\} \quad (x \in J) \tag{17}$$

soit uniformément convergente dans J *avec la somme* $\varphi(x)$.

Théorème II. — *Pour que l'équation fonctionnelle* (16), *avec* $F \in \Lambda$ *et* A *défini par* (3) *ou par* (13), *admette une solution unique* $\varphi \in \Lambda$, *il faut et il suffit que les sommes partielles de la série* (17) *soient bornées dans leur ensemble*[1] *dans* J *et que la série* (17) *soit sommable* T_1 *uniformément dans* J *avec la somme* $\varphi(x)$, *où* T_1 *est un procédé régulier de sommabilité.*

Théorème III. — *Si* $F \in \Lambda$ *et si*

$$F(x) \geqslant AF(x) \qquad (x \in J_\eta = [b-\eta, b],\ 0 < \eta < b-a), \tag{18a}$$

ou

$$F(x) \leqslant AF(x) \qquad (x \in J_\eta = [b-\eta, b],\ 0 < \eta < b-a), \tag{18b}$$

où A *est défini par* (3) *ou par* (13), *l'équation* (16) *admet une seule solution* $\varphi \in \Lambda$.

Si $F \in \Lambda$ *est monotone dans* J_η, *une des conditions* (18) *est remplie; la solution unique* $\varphi \in \Lambda$ *de* (16) *existe.*

Théorème IV. — *Si* $F \in \Lambda$ *et si* A *est donné par* (3) *ou par* (13) *et si la condition*

$$|F(x) - F(b)| \leqslant G(x) \qquad (x \in J) \tag{19}$$

est satisfaite, $G(x)$ *étant une fonction bornée telle que*

$$\frac{AG(x)}{G(x)} \leqslant \vartheta < 1, \qquad x \in J_\eta = [b-\eta, b], \tag{20}$$

en supposant l'existence de la fonction

$$AG(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} G[f_n(x)]$$

dans le cas où A *est défini par* (13), *alors la solution unique* $\varphi \in \Lambda$ *de* (16) *nécessairement existe.*

Théorème V. — *Si,* A *étant défini par* (3) *ou par* (13), $F \in \Lambda$ *remplit les conditions*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 < \omega A^n G(x) \leqslant \dfrac{C}{n^\alpha}, \\[2ex] \text{(ii)} & \dfrac{A^{n+1}G(x)}{A^n G(x)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \omega = 1 \ \textit{ou} \ -1, \\ n = 1, 2, 3, \ldots, \\ x \in J_\eta = [b-\eta, b], \end{array}$$

[1] Lorsque la matrice $T_1 = (b_{kn})$ est telle que $b_{kn} = 0\ (n > N_k)$; $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, la condition concernant les sommes partielles de la série (17) d'être bornées dans leur ensemble est à supprimer.

où C et α sont des constantes positives et $G(x)=F(x)-F(b)$, la solution unique $\varphi \in \Lambda$ de (16) *existe.*

D'après ce qu'on a dit dans 1.1 et 1.2 sur l'opérateur A, on conclut que l'équation fonctionnelle (16) peut toujours être écrite sous la forme de l'équation intégrale (l'integrale étant prise dans le sens de Stieltjes)

$$\varphi(x)+\int_{c}^{b} \varphi(y)\, d\{u_x(y)\}=F(x), \tag{21}$$

où la fonction $u_x(y)$, $(x, y) \in J^2$, est définie par (12) respectivement par (15) suivant que A est donné par (3) respectivement par (13).

La possibilité du problème inverse pour une classe déterminée des fonctions $u_x(y)$, pour lesquelles l'équation (21) peut être écrite sous la forme (16), est assurée par le

Théorème VI. — *Si la fonction $u_x(y)$, $(x, y) \in J^2$, remplit les conditions:*

(i) *elle est continue dans $J^2 \setminus (b, b)$;*

(ii) $\begin{cases} \textit{dans le domaine } m(x) \leqslant y \leqslant M(x),\ a \leqslant x \leqslant b, \textit{ elle est monotone} \\ \textit{strictement croissante (décroissante) par rapport à } y(x); \\ u_x(y)=0 \qquad (a \leqslant y < m(x),\ a \leqslant x \leqslant b); \\ u_x(y)=1 \qquad (M(x) \leqslant y \leqslant b,\ a \leqslant x \leqslant b) \end{cases}$

où les fonctions $m(x)$ et $M(x)$ sont continues monotones strictement croissantes dans J remplissant les conditions (2), *on peut toujours trouver un opérateur A de la forme* (13), *ou (a_{kn}) est une matrice régulière, $\{f_n(x)\}_0^\infty$ une suite de fonctions continues monotones strictement croissantes dans J satisfaisant aux relations* (1), *tel que, pour tout $\varphi \in \Lambda$, on a* (11), *l'intégrale étant prise dans le sens de Stieltjes.*

3. Démonstrations

Les démonstrations des théorèmes I-V seront données seulement pour le cas où l'opérateur A est défini par (3). Les démonstrations de ces théorèmes dans le cas où A est défini par (13), n'exigeant aucune nouvelle difficulté essentielle, seront ici omises.

Démonstration du théorème I. — Soit $\varphi \in \Lambda$ une solution de (16). L'équation peut être écrite dans la forme

$$\left[\varphi(x)-\frac{1}{2} F(b)\right]+\left[A \varphi(x)-\frac{1}{2} F(b)\right]=F(x)-F(b).$$

En appliquant dans les deux membres l'opérateur $(-1)^k A^k$ et en faisant la somme des équations obtenues pour $k=0, 1, \ldots, m$, on obtient une équation qui, d'après (7) et la deuxième relation (4), pour $m \rightarrow \infty$, tend vers l'équation

$$\varphi(x)=\frac{1}{2} F(b)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{A^k F(x)-F(b)\} \tag{17a}$$

et la convergence de la série dans le second membre de (17a) est uniforme dans J. Les conditions sont, donc, nécessaires.

Si maintenant $\varphi(x)$ est la somme de la série uniformément convergente dans (17), alors, en formant la somme $\varphi(x)+A\varphi(x)$ et en tenant compte de la linéarité de A, on obtient l'identité (16).

Démonstration du théorème II. — Soit $T_1=(b_{kn})$ une matrice régulière.

Si $\varphi\in\Lambda$ est une solution de (16), $\varphi(x)$ est, d'après le théorème I, donnée par la série uniformément convergente dans J (17). Les sommes partielles $s_n(x)$ de (17) sont bornées dans leur ensemble dans J, les séries dans les seconds membres des formules

$$s_k'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}s_n(x) \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots) \tag{22}$$

sont uniformément et absolument convergentes dans J et les fonctions $s_k'(x)$ sont bornées dans leur ensemble dans J. Le procédé T_1 étant régulier, on obtient après un court calcul la relation

$$\lim_{k\to\infty} s_k'(x)=\varphi(x) \quad (\text{uniformément dans } J). \tag{23}$$

Donc, les conditions sont nécessaires.

Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on emploie la méthode employée dans ([1], p. 94, th. Ib) avec des modifications convenables.

Démonstration du théorème III. — Pour fixer les idées, supposons la condition (18a) remplie. D'après le théorème I, il suffit de prouver la convergence uniforme dans J de la série (17).

Tenant compte de (18a) et des relations $f_i(x)\in J_\eta$, $x\in J_\eta$, on déduit par l'induction les relations

$$A^\nu F(x)\geqslant A^{\nu+1}F(x) \quad (x\in J_\eta). \tag{24}$$

Les relations (24) et (7) entraînent

$$A^\nu F(x)\downarrow F(b) \quad (\nu\to\infty,\ x\in J_\eta). \tag{25}$$

Il s'ensuit que

$$\textit{la série } \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{A^kF(x)-F(b)\} \textit{ est alternée dans } J_\eta. \tag{26}$$

Désignons maintenant par $\bar{x}_\nu\in J_\eta$ $(\nu=1,2,\ldots)$ les points tels que

$$A^\nu F(\bar{x}_\nu)=\max_{x\in J_\eta} A^\nu F(x).$$

Si c est un point limite de $\{\bar{x}_\nu\}$ et si $\{\bar{x}_{\nu_\mu}\}\subset\{\bar{x}_\nu\}$, $\bar{x}_{\nu_\mu}\to c$ $(\mu\to\infty)$, on démontre aisément la relation

$$A^{\nu_\mu}F(\bar{x}_{\nu_\mu})\downarrow F(b) \quad (\mu\to\infty). \tag{27}$$

Les relations (25), (26) et (27) impliquent la convergence uniforme dans J_η de la série (17).

Soit maintenant x un nombre arbitraire de J. Il existe un entier n_0 tel que $m^{n_0}(a)\in J_\eta$ et, d'après (10) et (6) (avec $\varphi=F$, $k=n_0$),

$$x_{n_0}\overset{\mathrm{df}}{=}f_F\{f_{AF}[\cdots[f_{A^{n_0-1}F}(x)]\cdots]\}\in J_\mu.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver un entier N tel que

$$0\leqslant A^\nu F(x)-F(b)<\varepsilon \quad (\nu\geqslant n_0+k,\ k\geqslant N),$$

puisque, d'après (9),

$$A^{\nu} F(x) = A^{k} A^{n_0} F(x) = A^{k} F(x_{n_0}) .$$

Ainsi la convergence uniforme dans J de (17) est démontrée.

Pour démontrer le théorème dans le cas où la condition (18b) est valable, il suffit, dans la démonstration faite, remplacer F par $-F$.

Démonstration du théorème IV. — D'après (19) et (20) on déduit par l'induction

$$|A^{k} F(x)-F(b)| \leqslant \vartheta^{k} G(x) \leqslant \vartheta^{k} M \quad (k=0, 1, 2, \ldots, x \in J_{\eta}).$$

ce qui a pour conséquence la convergence uniforme dans J_{η} de la série (17). La convergence uniforme dans J en résulte maintenant après un raisonnement analogue à celui appliqué dans la démonstration du théorème III.

Démonstration du théorème V. — Supposons d'abord $\omega=1$. On va prouver les propositions suivantes.

1° *La série alternée*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{A^{\nu} G(x)}{\nu} \tag{28}$$

est absolument et uniformément convergente dans J_{η}.

2° *La suite*

$$c_n(x) = \frac{1}{2} F(b) + \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} A^{\nu} G(x) + (n+1) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{A^{\nu} G(x)}{\nu},$$

pour $n \to \infty$, *converge uniformément dans* J_{η}.

La première proposition est une conséquence immédiate de (i) et (ii). D'autre part

$$|c_{n+p}(x)-c_n(x)| = \left|\sum_{\mu=1}^{p-1} (-1)^{\mu+n+1} \frac{A^{\mu+n+1} G(x)}{\mu+n+1} \mu + p \sum_{\nu=n+p+1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{A^{\nu} G(x)}{\nu}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p-1} \left|\sum_{\mu=i}^{p-1} (-1)^{\mu+n+1} \frac{A^{\mu+n+1} G(x)}{\mu+n+1}\right| + \frac{p}{n+p+1} A^{n+p+1} G(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{A^{\mu+n+1} G(x)}{\mu+n+1} + \frac{p}{n+p+1} A^{n+p+1} G(x) \leqslant \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{C}{(\mu+n+1)^{1+\alpha}} + \frac{C}{(n+p+1)^{\alpha}} < \varepsilon,$$

pour tout $n \geqslant N = N(\varepsilon)$, pour tout $p=0, 1, 2, \ldots$ et pour tout $x \in J_{\eta}$. La fonction limite de la suite $c_n(x)$ soit désignée par $\varphi(x)$, $x \in J_{\eta}$. La suite $c_n(x)$ peut être écrite dans la forme

$$c_n(x) = s_n(x) + (n+1) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{A^{\nu} G(x)}{\nu}$$

d'où, tenant compte de ce que (28) est alternée,

$$|s_{n+p}(x)-s_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |c_{n+p}(x)-c_n(x)| + \left|-(n+1) \sum_{\nu=n+1}^{n+p} (-1)^{\nu} \frac{A^{\nu} G(x)}{\nu} + p \sum_{\nu=n+p+1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{A^{\nu} G(x)}{\nu}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |c_{n+p}(x)-c_n(x)| + A^{n+1} G(x) + A^{n+p+1} G(x) < \varepsilon \quad (n \geqslant N;\ p=0, 1, 2, \ldots),$$

puisque, à cause de la convergence uniforme de la suite $c_n(x)$ respectivement, d'après (7), de la suite $A^n G(x)$ vers $\varphi(x)$ respectivement vers zéro, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $N=N(\varepsilon)$ tel que

$$|c_{n+p}(x)-c_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad A^n G(x)<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (n\geqslant N;\ p\geqslant 0;\ x\in J_{r_i}).$$

Donc, la série (17) est uniformément convergente dans J_{r_i} et sa somme $\varphi(x)$, d'après le théorème I, est la solution unique de (16) continue dans J_{r_i}.

La convergence uniforme de (17) dans J peut être prouvée d'une manière analogue à celle employée dans la démonstration du théorème III.

Dans le cas où $\omega=-1$ on démontre le théorème en remplaçant F par $-F$.

Démonstration du théorème VI. — La démonstration du théorème s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme. — *Si $\varphi\in\Lambda$ et si chacune des fonctions $v_x^n(y)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, pour tout $x\in J$, est monotone nondécroissante par rapport à $y\in J$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} v_x^n(y)=v_x(y) \quad (\textit{uniformément dans } J^2)$$

entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(y)\,d\{v_x^n(y)\}=\int_a^b \varphi(y)\,d\{v_x(y)\} \quad (\textit{uniformément dans } J).$$

La méthode de démontrer ce lemme est celle employée dans ([5], p. 126—128, th. 3) convenablement complétée par certains détails concernant l'uniformité de la convergence.

Désignons par S la surface continue, lieu des points (x, y, z) déterminés par $z=u_x(y)$, $(x, y)\in J^2$, complété par les points $x=y=b$, $0\leqslant z<1$. Considérons les lignes L_n intersections de S par les plans $z=z_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ où

$$z_0=0,\ z_n=\frac{2\mu+1}{2^\nu},\ n=2^{\nu-1}+\mu,\ \mu=0, 1, \ldots, 2^{\nu-1}-1, \quad \nu=1, 2, \ldots.$$

Les équations des lignes L_n sont de la forme $y=f_n(x)$, $z=z_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ où les fonctions $f_n(x)$ sont continues monotones strictement croissantes, satisfaisant les conditions (1).

Les éléments a_{kn} de la matrice T peuvent être définis par les relations

$$a_{kn}=\begin{cases} 2^{-k} & (n=0, 1, \ldots, 2^k-1), \\ 0 & (n\geqslant 2^k), \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \ldots.$$

Considérons la suites des fonctions

$$u_x^k(y)\overset{\text{df}}{=}\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}E_{f_n(x)}(y)=\sum_{f_n(x)\leqslant y} a_{kn} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

avec les a_{kn} et les $f_n(x)$ définis ci-dessus. On a évidemment

$$\lim_{k\to\infty} u_x^k(y)=u_x(y) \quad \textit{uniformément dans } J^2,$$

puisque

$$0\leqslant u_x^k(y)-u_x(y)\leqslant 2^{-k} \qquad ((x, y)\in J^2;\ k=0, 1, 2, \ldots).$$

Les $u_x^k(y)$, pour tout $x \in J$, étant des fonctions en escaliers par rapport à $y \in J$, monotones nondécroissantes, le lemme s'applique et, en posant

$$\Psi_k(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}\,\varphi\,[f_n(x)] = \int_a^b \varphi(y)\,d\,\{u_x^k(y)\},$$

on obtient, pour $k \to \infty$, l'opérateur cherché A

$$A\varphi(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{k \to \infty} \Psi_k(x) = \int_a^b \varphi(y)\,d\,\{u_x(y)\}.$$

RÉFÉRENCES

[1] Bajraktarević, M., *Sur une solution de l'équation fonctionnelle* $\varphi(x) + \varphi[f(x)] = F(x)$. Glasnik mat.-fiz. i astr., 15, Zagreb (1960), 91—98.

[2] Bajraktarević, M., *Sur les solutions continues d'une équation intégro-fonctionnelle*. C. R. Acad. sci., Paris 1962, t. 254, p. 605—607.

[3] Bajraktarević, M., *Sur l'existence des solutions continues monotones d'une équation fonctionnelle*. Naučno društvo SR Bosne i Hercegovine, Radovi — XXII, Sarajevo. 1963, pp. 43—46.

[4] Bajraktarević, M., *Sur l'existence des solutions continues monotones de l'équation fonctionnelle* $\varphi(x) + \varphi[f_\varphi(x)] = F(x)$. Publications Inst. Math., Belgrade, T. 2 (16), (1962), 75—80.

[5[Karamata, J., *Teorija i praksa Stieltjesova integrala*, Beograd, 1949.

[6] Kordylewski, J. et Kuczma, M., *On some functional equations*. Zestyty Naukowe Uniw. Jagiell., Prace Matem., 5 (1959), 23—34.

[7] Kordylewski J. et Kuczma M., *On the continuous dependence of solutions of some functional equations on given functions* (I). Ann. Pol. Math., 10 (1961), 41—48.

[8] Kuczma, M., *On the functional equation* $\varphi(x) + \varphi[f(x)] = F(x)$. Ann. Pol. Math., 6 (1959), 281—287.

[9] Kuczma, M., *Remarks on some functional equations*. Ann. Pol. Math., 8 (1960), 277—284.

[10] Kuczma, M., *On the forms of solutions of some functional equations*. Ann. Pol. Math., 9 (1960), 55—63.

[11] Lusternik — Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*, 1955, p. 64.