PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 13–20.

SUR LES DEFORMATIONS INFINIMENT PETITES DES CYLINDROÏDES AUX ARETES DE TYPE A

Militsa Ilitch-Daïovitch

(Communiqué le 15 avril 1963)

Sommaire. — Définition des cylindroïdes aux arêtes de type A et des courbes de classe L_A. L'étude des déformations infiniment petites des courbes L_A et des déformations infiniment petites conditionnées des surfaces C_A.

1. Convenons d'appeler cylindroïde aux arêtes la surface C composée d'un nombre fini de parties régulières de courbure totale $K=0$ et possédant les propriétés suivantes:

1° C est homéomorphe à une bande cylindrique,

2° C est bornée par deux courbes fermées situées dans des plans parallèles, ne contenant aucun segment rectiligne et formées d'un nombre fini d'arcs chacun à tangente continue,

3° les arêtes — les lignes σ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ le long desquelles les parties régulières successives sont collées, — sont en même temps génératrices de la surface C.

Un cylindroïde aux arêtes C_A tel que, le long de ses arêtes σ_i ses plans tangents forment des angles θ_i différents de zéro et de π, — appartient à la classe de surfaces que nous appelerons cylindroïdes aux arêtes de type A.

La surface C_A est développable; considérée globalement, elle est non régulière, rectifiable dans le sens de Lebesgue et non convexe.

Nous allons étudier des déformations infiniment petites du cylindroïde aux arêtes C_A telles que ses arêtes σ_i se déplacent comme un corps solide; cette classe de déformations de la surface C_A nous appelerons déformations infiniment petites conditionnées de la surface C_A.

2. Soit donnée une famille de surfaces S_ε dépendant d'une manière continue du paramètre ε $(\varepsilon \geqslant 0)$ et soit la surface $S \in S_\varepsilon$ (S correspondant à $\varepsilon=0$). Si entre S et S_ε existe une correspondence uniforme et continue biunivoque, on appelle S_ε la déformée de S.

La déformation de la surface S est dite infiniment petite si elle laisse invariante la longueur de chaque arc à tangente continue d'une courbe quelconque de la surface S; ou, plus précisément dit, si la différence entre les longueurs des arcs correspondants est une infinitésimale d'un ordre supérieur par rapport à ε.

3. Nous étudierons d'abord les déformations infiniment petites d'une courbe L_A de classe à laquelle appartiennent les frontières L_A^1 et L_A^2 de la surface C_A. La courbe plane et rectifiable L_A est donc homéomorphe à la circonférence et composée d'un nombre fini d'arcs $l_1, l_2, \ldots, l_n$ chacun à tangente continue (la courbe L_A globale est non convexe), ne contenant pas des segments rectilignes et se rencontrant en points singuliers de L_A.

Pour les déformations infiniment petites d'un arc quelconque l_i ($i=1, 2, \ldots, n$) d'une telle courbe L_A a lieu le théorème due à N. V. Efimoff [1]:

Théorème. — Soit l une courbe plane et M un de ses points où la courbure est différente de zéro*. Si dans le cas des déformations infiniment petites de la courbe l toutes les variations de la longueur de son arc quelconque — jusqu'aux variations d'ordre n — sont égales à zéro, et la courbure en point M décroît, alors la distance du point M à un point quelconque assez proche de la courbe augmente.

Pour la courbe L_A globale nous démontrerons le théorème I, ne concernant que les variations d'ordre premier de la longueur de l'arc, étant dans le cas considéré les seules pour lesquelles maintenant il y a intérêt.

Théorème I. — Si dans les déformations infiniment petites de la courbe L_A les variations de la longueur d'un arc quelconque l_i de L_A est égale à zéro et la courbure sur aucun des arcs l_i ne décroît pas, alors la composante non triviale du champs des vitesses des ces déformations est orthogonale au plan de la courbe L_A.

La corbure $k(s)$ sera comprise toujours non négative, c'est-à-dire comme module de la dérivée seconde de la fonction vectorielle $\bar{x}(s)$ par rapport à l'arc $\left(\text{donc, } k(s)=\sqrt{\left(\frac{d^2\bar{x}}{ds^2}\right)^2} \geqslant 0\right)$.

Démonstration. — Sans restreindre la généralité de nos raisonnements, nous considérerons une courbe L_A composée de deux arcs l_1 et l_2. L'équation vectorielle de la courbe L_A sera alors

$$\bar{x}(s)=\begin{cases}\overset{1}{\bar{x}}(s), & s_0 \leqslant s \leqslant s_1, \\ \overset{2}{\bar{x}}(s), & s_1 \leqslant s \leqslant s_2, \quad s_2 \equiv s_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

l'origine du vecteur $\bar{x}(s)$ (qui est une fonction continue périodique, de période égale à la longueur de la courbe L_A) se trouvant sur le plan de la courbe L_A, s étant la longueur de l'arc de la courbe L_A, et s_1, $s_2 \equiv s_0$ étant ses points singuliers. L'extrémité du vecteur $\bar{x}=\overset{i}{\bar{x}}(s)$ décrit l'arc correspondant l_i; les fonctions vectorielles régulières nous supposerons admettant des prolongements réguliers.

Evidemment, en points singuliers s_i on a

$$\overset{1}{\bar{x}}(s_0)=\overset{2}{\bar{x}}(s_2), \quad \overset{1}{\bar{x}}(s_1)=\overset{2}{\bar{x}}(s_1) \qquad (s_2 \equiv s_0)$$

* C'est-à-dire, positive, la courbure étant comprise comme module de la dérivée seconde de la fonction vectorielle en arc.

et par définition de L_A

$$[\overset{1}{\bar{x}}{}'(s_0+),\ \overset{2}{\bar{x}}{}'(s_0-)]\neq 0, \quad [\overset{1}{\bar{x}}{}'(s_1-),\ \overset{2}{\bar{x}}{}'(s_1+)]\neq 0,$$

où l'on a par $\overset{1}{\bar{x}}{}'(s_0+)$, $\overset{2}{\bar{x}}{}'(s_1+)$, $\overset{1}{\bar{x}}{}'(s_1-)$, $\overset{2}{\bar{x}}{}'(s_0-)$ désigné respectivement les dérivées droites et les dérivées gauches des fonctions $\overset{i}{\bar{x}}(s)$ en points $s_0 \equiv s_2$ et s_1.

Soit la fonction deux fois continuellement différentiable $\bar{z}(s)$ le champs des vitesses des déformations infiniment petites de la courbe L_A; la courbe déformée $L_{A\varepsilon}$ sera alors définie par l'équation vectorielle

$$\bar{x}_\varepsilon \equiv \bar{x}(s, \varepsilon) = \bar{x}(s) + \varepsilon\, \bar{z}(s), \tag{3.2}$$

où ε est le paramètre de la déformation et $\bar{z}(s)$ est une fonction périodique de période égale à la longueur de la courbe L_A.

Dans le cas des déformations infiniment petites de la courbe L_A on a

$$d\bar{x}\, d\bar{z} = 0, \tag{3.3}$$

c'est-à-dire

$$d\bar{z} = [\bar{y},\ d\bar{x}], \tag{3.3*}$$

où la fonction vectorielle $\bar{y}(s)$ représente le champs des rotations de ces déformations. En tenant compte de la supposition du théorème I que sur tout arc l_i de la courbe L_A la courbure $k(s)$ ne décroît pas, on déduit de (3.2)

$$\bar{x}''\bar{z}'' \geqslant 0. \tag{3.4}$$

A un champs vectoriel des vitesses $\bar{z}(s)$ trivial corresponde un champs des rotations $\bar{y}(s)$ constant; dans ce cas, en posant $\bar{y}(s) = \bar{c}$ ($\bar{c}$ étant un vecteur constant) l'équation (3.3*) conduit par l'intégration le long du chacun des arcs l_i au champs vectoriel

$$\bar{z}(s) = \bar{a} + [\bar{c},\ \bar{x}(s)]$$

($\bar{a}$ étant un vecteur constant), lequel est, en suite de $\overset{1}{\bar{x}}(s_i) = \overset{2}{\bar{x}}(s_i)$ $(i = 1, 2)$ uniforme le long de toute la courbe L_A.

Un champs $\bar{z}(s)$ non trivial doit, par conséquant, avoir une composante non triviale $\overset{*}{\bar{z}}(s)$, de sorte que l'on obtient

$$\bar{z}(s) = \bar{a} + [\bar{c},\ \bar{x}(s)] + \overset{*}{\bar{z}}(s). \tag{3.5}$$

Parce que, d'après la supposition, le champs vectoriel $\bar{z}(s)$ doit vérifier les relations (3.3) et (3.4), il est évident que la fonction vectorielle $\overset{*}{\bar{z}}(s)$ elle aussi satisfait à ces relations et que, au lieu de (3.3) et (3.4), on peut écrire

$$\bar{x}'\, \overset{*}{\bar{z}}{}' = 0, \tag{3.3'}$$

$$\bar{x}''\, \overset{*}{\bar{z}}{}'' \geqslant 0, \tag{3.4'}$$

ou

$$\bar{t}\, \overset{*}{\bar{z}}{}' = 0, \qquad \bar{n}\, \overset{*}{\bar{z}}{}'' \geqslant 0, \tag{3.6}$$

$\bar{t}$ étant le vecteur unitaire tangent et $\bar{n}$ le vecteur unitaire normal de L_A; en désignant par $\overset{i}{\bar{t}}$ le vecteur tangent de l'arc l_i, on aura, pour $s=s_i$, simultanément:

$$\overset{1}{\bar{t}}(s_i)\cdot\overset{*}{\bar{z}}'(s_i)=0,\qquad \overset{2}{\bar{t}}(s_i)\cdot\overset{*}{\bar{z}}'(s_i)=0\qquad (i=1,\,2).$$

Par définition de L_A on a

$$[\overset{1}{\bar{t}}(s_i),\ \overset{2}{\bar{t}}(s_i)]\neq 0,$$

ce qui, avec les deux équations précédentes, nous conduit à la conclusion que en tout point s_i $(i=1,\,2)$ de L_A le vecteur $\overset{*}{\bar{z}}'(s)$ est orthogonal au plan de la courbe L_A.

Ayant en vue que $\bar{n}'=-k\bar{t}$ $(k=k(s)$ étant la courbure de la courbe $L_A)$, on a

$$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}''=(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}')'-\bar{n}'\,\overset{*}{\bar{z}}'=(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}')'+k\,\bar{t}\,\overset{*}{\bar{z}}',$$

de sorte que, par conséquent de la conclusion précédente et de la relation (3.3), on obtient

$$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}''=(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}')',$$

et au lieu de la deuxième des relations (3.6) on a

$$(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}})'\geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$d(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}')\geqslant 0,$$

dont l'intégration le long de l'arc l_i conduit à

$$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}'=0,$$

ce que rend possible de conclure que non seulement en points singuliers mais aussi en tout point régulier de la courbe L_A le vecteur $\overset{*}{\bar{z}}'(s)$ est orthogonal au plan de cette courbe, ce qu'on exprime par

$$\overset{*}{\bar{z}}'=g(s)\,\bar{b}.$$

où $\bar{b}$ est le vecteur unitaire binormal de L_A et $g(s)$ est une fonction périodique continue, de période égale à la longueur de la courbe L_A. L'intégration de l'équation dernière nous donne $\overset{*}{\bar{z}}(s)$, de sorte que le champs vectoriel (3.5) cherché peut être représenté sous la forme

$$\bar{z}(s)=\bar{a}+[\bar{c},\ \bar{x}(s)]+h(s)\,\bar{b},\tag{3.7}$$

— Le théorème I est démontré.

4. Passons maintenant à l'étude des déformations infiniment petites du cylindroïde aux arêtes C_A, défini dans le n^0 1. Pour cette classe des cylindroïdes aux arêtes nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème II. — Dans le cas des déformations infiniment petites conditionnées d'un cylindroïde aux arêtes C_A, il existe sur ses frontières L_A^1 et L_A^2 des points aussi proches que l'on veut dont la distance augmente.

Démonstration. — Nous démontrerons ce théorème dans le cas d'une surface C_A n'ayant que deux arêtes σ_1 et σ_2, ce que ne restreindra pas la possibilité d'en déduire des conclusions générales.

Soit

$$\bar{x}(s, v) = \begin{cases} \overset{1}{\bar{x}_1}(s) + v\,\bar{a}(s), & s_0 \leqslant s \leqslant s_1 \\ \overset{2}{\bar{x}_2}(s) + v\,\bar{a}(s), & s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \end{cases} \quad (0 \leqslant v \leqslant 1,\ s_2 \equiv s_0) \tag{4.1}$$

l'équation vectorielle de la surface C_A, où l'on a supposé que l'origine du vecteur $\bar{x}(s, v)$ se t ouve sur le plan de la courbe L_A^1, les fonctions régulières $\overset{i}{\bar{x}_1}(s)$ admettant des prolongements réguliers et $\bar{a}(s)$ étant une fonction continue périodique, de période égale à la longueur de la courbe L_A^1. Pour $v=0$, $v=1$, $s=s_i$, la fonction (4.1) définit respectivement les frontières L_A^1, L_A^2 et les arêtes σ_i. Evidemment,

$$\overset{1}{\bar{x}_1}(s_i) = \overset{2}{\bar{x}_1}(s_i), \tag{4.2}$$

c'est-à-dire, la fonction vectorielle $\bar{x}(s, v)$ est continue, et par définition de C_A

$$[\overset{1}{\bar{x}_1}{}'(s_1-),\ \overset{2}{\bar{x}_1}{}'(s_1+)] \neq 0, \qquad [\overset{2}{\bar{x}_1}{}'(s_2-),\ \overset{1}{\bar{x}_1}{}'(s_0+)] \neq 0,$$

$\overset{1}{\bar{x}_1}{}'(s_0+)$, $\overset{2}{\bar{x}_1}{}'(s_1+)$, $\overset{1}{\bar{x}_1}{}'(s_1-)$, $\overset{2}{\bar{x}_1}{}'(s_2-)$ étant respectivement les dérivées droites et les dérivées gauches des fonctions $\overset{i}{\bar{x}_1}(s)$ en points s_i $(i=1, 2;\ s_2 \equiv s_0)$.

Pour la surface développable C_A on a

$$\bar{a}'(s) = \lambda(s) \cdot \overset{i}{\bar{x}_1}{}'(s),$$

où la fonction scalaire continue périodique $\lambda(s)$ est telle que $1+\lambda(s) > 0$ et, pour $s = s_i$,

$$\bar{a}'(s_i-) = \lambda(s_i) \cdot \overset{i}{\bar{x}_1}{}'(s_i-), \qquad \bar{a}'(s_i+) = \lambda(s_i) \cdot \overset{i}{\bar{x}_1}{}'(s_i+).$$

Soient $\bar{z} = \bar{z}(s, v)$ et $\bar{y} = \bar{y}(s, v)$ respectivement les champs des vitesess et des rotations des déformations infiniment petites de la surface C_A. Comme c'est connu [2], sur toute partie régulière de la surface C_A la fonction vectorielle $\bar{z}(s, v)$ vérifie l'équation

$$d\bar{x}\,d\bar{z} = 0, \tag{4.3}$$

d'où l'on déduit la condition

$$d\bar{z} = [\overset{i}{\bar{y}},\ d\overset{i}{\bar{x}}] \qquad (i = 1, 2) \tag{4.4}$$

à laquelle doit satisfaire $\overline{y}(s, v)$. Les vecteurs $\overline{y}_s$ et $\overline{y}_v$ sont situés sur le plan tangent à la surface C_A, de sorte qu'on les peut déterminer à l'aide des systèmes des équations aux dérivées partielles:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{i}{\overline{y}}_s = \overset{i}{\alpha}\, \overset{i}{\overline{x}}_s - \overset{i}{\beta}\, \overset{i}{\overline{x}}_v, \\ \overset{i}{\overline{y}}_v = \overset{i}{\gamma}\, \overset{i}{\overline{x}}_s - \overset{i}{\alpha}\, \overset{i}{\overline{x}}_v; \end{array}\right. \qquad (i = 1, 2) \tag{4.5}$$

les fonctions scalaires différentiables $\overset{i}{\alpha}(s, v)$, $\overset{i}{\beta}(s, v)$ et $\overset{i}{\gamma}(s, v)$ sont à déterminer à l'aide des équations aux dérivées partielles de Gauss-Codazzi:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{i}{L}\overset{i}{\gamma} - 2\overset{i}{M}\overset{i}{\alpha} + \overset{i}{N}\overset{i}{\beta} = 0, \\ \overset{i}{\alpha}_v - \overset{i}{\gamma}_s = \overset{i}{\gamma}\, \overset{i}{\Gamma}{}^1_{11} - 2\overset{i}{\alpha}\, \overset{i}{\Gamma}{}^1_{12} + \overset{i}{\beta}\, \overset{i}{\Gamma}{}^1_{22}, \\ \overset{i}{\alpha}_s - \overset{i}{\beta}_v = \overset{i}{\gamma}\, \overset{i}{\Gamma}{}^2_{11} - 2\overset{i}{\alpha}\, \overset{i}{\Gamma}{}^2_{12} + \overset{i}{\beta}\, \overset{i}{\Gamma}{}^2_{22} \end{array}\right. \qquad (i = 1, 2)$$

$\overset{i}{L}$, $\overset{i}{M}$, $\overset{i}{N}$ étant les coefficients de la deuxième forme quadratique des parties régulières de C_A.

Dans le cas considéré de la surface C_A de courbure totale $K = 0$, les systèmes précédants se ramènent à deux systèmes suivants:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{i}{\alpha}_v = -\dfrac{2\lambda(s)}{1 + v\lambda(s)}\overset{i}{\alpha}, \\ \overset{i}{\alpha}_s - \overset{i}{\beta}_v = 0, \end{array}\right. \qquad (i = 1, 2) \tag{4.6}$$

dont l'intégration conduit à la solution

$$\overset{i}{\overline{y}}(s, v) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \{A_i(s) \cdot \overset{i}{\overline{x}}_1{}'(s) - B_i'(s)\, \overline{a}(s)\}\, ds - \frac{v - A_i(s)}{1 + v\lambda(s)}\overline{a}(s) + \overline{c}_i, \tag{4.7}$$
$$(i = 1, 2)$$

où $A_i(s)$ et $B_i(s)$ sont des fonctions scalaires arbitraires, et $\overline{c}_i$ sont des vecteurs constants.

La forme la plus générale de la fonction vectorielle $\overline{y}(s, v)$ correspond aux déformations infiniment petites telles que toutes les cordes de L_A^1 et de L_A^2 décroissent où restent stationaires; comme il résulte du théorème I, sur les frontières L_A^1 et L_A^2 du cylindroïde aux arêtes C_A existe alors une composante non triviale du champs des vitesses des déformations infiniment petites orthogonale au plan de la courbe L_A^1 (ou L_A^2, ces deux plans étant, par définition, parallèles). On obtient delà les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire le champs vectoriel cherché $\overline{y}(s, v)$:

$$\overset{i}{\beta}(s, 0) = \overset{i}{\beta}(s, 1) = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{4.8}$$

et à l'aide desquelles on détermine les fonctions arbitraires $A_i(s)$ et $B_i(s)$ figurant dans (4.7):

$$A_i(s) \equiv c(1+\lambda(s)), \qquad B_i(s)=0.$$

Les champs des rotations des parties régulières de la surface C_A peut-on maintenant écrire de façon suivante:

$$\overset{i}{\bar{y}}(s, v)=c\left\{\overset{i}{\bar{x}}_1(s)+\frac{1-v}{1+v\lambda(s)}\bar{a}(s)\right\}+\bar{c}_i \qquad (i=1, 2);$$

ces champs-ci sont non triviaux pour tout $c \neq 0$.

Sur chaque arête σ_i, par exemple sur σ_0 $(s=s_0 \equiv s_2)$, on a

$$(4.10) \qquad \begin{cases} \overset{1}{\bar{y}}(s_0, v)=c\left\{\overset{1}{\bar{x}}_1(s_0)+\dfrac{1-v}{1+v\lambda(s_0)}\bar{a}(s_0)\right\}+\bar{c}_1, \\ \overset{2}{\bar{y}}(s_0, v)=c\left\{\overset{2}{\bar{x}}_1(s_0)+\dfrac{1-v}{1+v\lambda(s_0)}\bar{a}(s_0)\right\}+\bar{c}_2. \end{cases}$$

Le champs des vitesses $\bar{z}(s, v)$ sera uniforme sur toute la surface C_A si le long de σ_i

$$[\overset{2}{\bar{y}}, d\overset{2}{\bar{x}}]=[\overset{1}{\bar{y}}, d\overset{1}{\bar{x}}],$$

où est par $\overset{i}{\bar{x}}=\overset{i}{x}(s, v)$ désigné le vecteur $\bar{x}(s, v)$ décrivant la partie régulière correspondante de la surface C_A. Ayant en vue que le long de σ_i

$$d\overset{2}{\bar{x}}=d\overset{1}{\bar{x}}=\overset{i}{\bar{x}}_v\,dv=\bar{a}(s_i)\,dv,$$

nous pouvons la relation précédente écrire sous la forme

$$[\overset{2}{\bar{y}}-\overset{1}{\bar{y}}, \bar{a}(s)]=0 \qquad (\text{le long de } \sigma_i)$$

ou, en posant $\bar{y}=\overset{2}{\bar{y}}-\overset{1}{\bar{y}}$,

$$(4.11) \qquad [\bar{y}, \bar{a}(s)]=0 \qquad (\text{le long de } \sigma_i);$$

ainsi, le long de σ_i le vecteur $\bar{y}(s, v)$ est collinéaire avec le vecteur $\bar{a}(s_i)$. — De l'autre part, en tenant compte de (4.10), on déduit de la relation (4.11)

$$(4.12) \qquad \bar{y}=\overset{2}{\bar{y}}-\overset{1}{\bar{y}}=\bar{c}_2-\bar{c}_1=\bar{C};$$

si les vecteurs $\bar{a}(s_1)$ et $\bar{a}(s_2)$ ne sont pas collinéaires, il résulte de (4.11) et de (4.12) que le long de σ_i on a $\bar{y}(s, v)=0$.

De cette manière, dans le cas des déformations infiniment petites non triviales des parties régulières de la surfaces C_A, les lignes σ_i, le long desquelles ces parties sont collées, se déplacent comme un corps solide. L'uniformité du champs des rotations $\bar{y}(s, v)$ sur la surface C_A est donc assurée par la condition $\bar{y}(s_i, v)=\bar{C}$, respectivement $\bar{y}(s_i, v)=0$.

Par le champs des rotations

$$\bar{y}(s, v) = \begin{cases} c\left\{\overset{i}{\bar{x}_1}(s) + \dfrac{1-v}{1+v\lambda(s)}\bar{a}(s)\right\} + \bar{c}_i, & s \neq s_i, \\ \bar{C}, \quad s = s_i & (\bar{C} = \text{const} \geqslant 0), \end{cases}$$

non trivial pour $c \neq 0$, l'intégration de l'équation (4.3*) est complétement assurée.

Il n'est pas difficile de voir que'un champs des vitesses satisfaisant aux conditions (4.8) est uniforme sur toute la surface C_A seulement quand $c=0$ et $\bar{y}=\bar{C}$ $(\bar{C} \geqslant 0)$.

Sans doute, la démonstration est valable aussi pour les surfaces C_A à un nombre fini $n > 2$ d'arêtes.

— Le théorème II est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Н. В. Ефимов: *Исследования бесконечно малых изгибаний некоторых классов поверхностей*, Матем. сборник, Т. 20, в. 1 (1947).

[2] Н. В. Ефимов: *Качественные вопросы теории деформаций поверхностей*, Успехи матем. наук, Т. III, в. 2 (1948).