PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 141–145.

LA CONVERGENCE DES SÉRIES D'OPÉRATEURS

Bogoljub Stanković

(Communiqué le 10 avril 1964)

Dans cet article on examine les conditions de convergence de la série

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n(\lambda)$$

où α_n sont des nombres complexes et $a(\lambda)$ est la fonction définie sur l'intervalle $[\lambda', \lambda'']$ et dont les valeurs sont dans le corps K de J. Mikusiński [2].

Les résultats connus pour la série (1) se rapportent aux cas spéciaux. On peut les partager en deux groupes. Premier, où $a(\lambda)=\lambda s^{\alpha}$, s l'opérateur différentiel comme élément de K ([3], [5]) et l'autre où $a(\lambda)=\lambda f$, $f(t)$ est une fonction numérique ([2], [4]).

Le théorème démontré dans l'article déjà cité [5] est:

Théorème *A. S'il existe un nombre $\delta>\alpha$ tel que*

$$\lim\sup n^{\delta n} |\gamma_n| < \infty,$$

la série;

(2) $$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \lambda^i s^{i\alpha}, \quad \alpha>0,$$

converge pour tout λ complexe.

Si au contraire il existe $\eta>0$ et $n_0 \in N$ tel que

$$\gamma_n \Gamma(n\alpha) \geqslant \eta^n \quad n \geqslant n_0,$$

la série (2) *diverge pour tout λ complexe différent de zéro.*

Notre but est de démontrer un théorème analogue au premier partie du théorème cité mais pour la série (1) où $a(\lambda)=\dfrac{\{w(\lambda, t)\}}{\{u(t)\}}$.

Théorème 1. Supposons:

1. *Les fonctions $u(t)$ et $w(\lambda, t)$ aient pour $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ les transformations de Laplace $U(z)$ et $W(\lambda, z)$ absolument convergentes dans un demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$.

2. $$\left|\frac{W(\lambda, z)}{U(z)}\right| < M(\lambda)\,|z|^{\alpha}, \quad \lambda \in [\lambda', \lambda''], \quad \operatorname{Re} z \geqslant x_0, \quad \alpha \in R.$$

3. $$\lim\sup n^{\delta n} |\alpha_n| < \infty, \quad \delta>\alpha.$$

Sous ces conditions la série (1) *avec* $a(\lambda)=\dfrac{w(\lambda)}{u}$ *converge pour tout* $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$ *dans le corps K.*

Démonstration. — Nous allons démontrer que pour tout $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$ et $0\leqslant t\leqslant t_0$, $t_0<\infty$ il existe une fonction $\omega(\lambda,t)=0\,(M(\lambda)\,e^{x_0 t})$ telle que

$$\omega(\lambda)=\frac{w(\lambda)}{u}\,l^{\alpha+1+\varepsilon}\quad\text{pour tout}\quad \varepsilon>0\,.$$

D'après la supposition 2 du théorème:

$$\left|\frac{W(\lambda,z)}{U(z)\,z^{\alpha+1+\varepsilon}}\right|\leqslant\frac{M(\lambda)}{|z|^{1+\varepsilon}},\quad \operatorname{Re} z\geqslant x_0,\quad \lambda\in[\lambda',\lambda'']\,.$$

Il est bien connu [1] que $\dfrac{W(\lambda,z)}{U(z)\,z^{\alpha+1+\varepsilon}}$ est la transformation de Laplace d'une fonction $\omega(\lambda,t)=0\,(M(\lambda)\,e^{x_0 t})$, $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$.

Il faut maintenant montrer l'existence d'une fonction F telle que la série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,a^n(\lambda)\,F=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,\{\omega(\lambda,t)\}^n\,l^{-(\alpha+1+\varepsilon)^n}\,\{F(t)\}\tag{3}$$

converge uniformément par rapport à t dans tout intervalle fini $0\leqslant t\leqslant t_0$, $t_0<\infty$.

Pour $F(t)$ on prend la fonction $F(t)=t^{-1}\,\Phi(0,-\sigma;-t^{-\sigma})$ où $\Phi(\nu,\rho;z)$ est la fonction de E. M. Wright [6]. Cette fonction est définie par la série:

$$\Phi(\nu,\rho;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+\rho n)},\quad -1<\rho<0\,.$$

Les propriétés intéressantes pour nous sont les suivantes:

1. $F(t)=t^{-1}\,\Phi(0,-\sigma;-t^{-\sigma})=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\operatorname{Re} z=0}\exp(tz-z^{\sigma})\,dz,\qquad 0<\sigma<1\,.$

2. $F^{(n)}(0)=0,\quad n\in N\,.$

3. $F^{(k)}(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\operatorname{Re} z=0} z^k\exp(tz-z^{\sigma})\,dz=t^{-k-1}\,\Phi(-k,-\sigma;-t^{-\sigma})$

4. $\left\{\dfrac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}\right\}\{t^{\mu-1}\,\Phi(\mu,-\sigma,-t^{-\sigma})\}=\{t^{\mu+q-1}\,\Phi(\mu+q,-\sigma;-t^{-\sigma})\}\,.$

5. $\left|t^{-k-1}\,\Phi(-k,-\sigma;-t^{-\sigma})\right|\leqslant\dfrac{2}{\sigma}\,\Gamma\left(\dfrac{k+1}{\sigma}\right)\left(\cos\dfrac{\sigma\pi}{2}\right)^{-\frac{k+1}{\sigma}},$

pour tout $t\in[0,t_0]$, $t_0<\infty$.

Toutes ces propriétés sont ou bien connues, ou on peut les obtenir des relations connues.

En utilisant les propriétés citées 2, 3 et 4 on a:

$$\begin{aligned}s^{k(\alpha+1+\varepsilon)}\{F(t)\}&=s^{kp}\,l^{k(p-\alpha-1-\varepsilon)}\{F(t)\}\\&=l^{k(p-\alpha-1-\varepsilon)}\{t^{-kp-1}\,\Phi(-kp,-\sigma;t^{-\sigma})\}\\&=\{t^{-k(\alpha+1+\varepsilon)-1}\,\Phi(-k(\alpha+1+\varepsilon),-\sigma:-t^{-\sigma})\},\end{aligned}$$

où on a choisi p de manière que $p-\alpha-1-\varepsilon>0$.

Reprenons notre série (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n(\lambda) F = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \{\omega(\lambda, t)\}^n \{t^{-n(\alpha+1+\varepsilon)-1} \Phi(-n(\alpha+1+\varepsilon), -\sigma; -t^{-\sigma})\}.$$

Il est facile à voir que pour $t \in [0, t_0]$, $t_0 < \infty$ et $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$

$$\{\omega(\lambda, t)\}^n = \left\{0\left(\frac{M(\lambda)}{n!}\right)\right\}$$

De la propriété 5 pour la fonction Φ on a:

$$t^{-k(\alpha+1+\varepsilon)-1} \Phi(-k(\alpha+1+\varepsilon), -\sigma; -t^{-\sigma}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sigma} \Gamma\left(\frac{k(\alpha+1+\varepsilon)+1}{\sigma}\right)\left(\cos\frac{\sigma\pi}{2}\right)^{-\frac{k(\alpha+1+\varepsilon)+1}{\sigma}}$$

$$= k^{\frac{k(\alpha+1+\varepsilon)}{\sigma}} 0(C^k),$$

où C est une constante.

On peut maintenant majorer $a^n(\lambda) F$. Pour tout $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ et $t \in [0, t_0]$, $t_0 < \infty$ on a:

$$a^n(\lambda) F = n^{\frac{n(\alpha+1-\sigma+\varepsilon)}{\sigma}} 0(N^n(\lambda))$$

$N(\lambda)$ est une fonction définie et finie pour tout $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$.

Comme nous avons supposé l'existence d'un nombre $\delta > \alpha$, il existe $\eta > 0$ tel que $\delta = \alpha + \eta$ et on peut choisir σ, $0 < \sigma < 1$, tel que

$$\frac{\alpha}{\sigma} < \alpha + \frac{\eta}{3}, \quad \frac{1-\sigma}{\sigma} < \eta/3$$

et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon/\sigma < \eta/3$. Avec ça on a:

$$\frac{\alpha+1-\sigma+\varepsilon}{\sigma} < \alpha + \eta = \delta$$

et par suite:

$$n^{\delta n} |\alpha_n| n^{-\delta n} |a^n(\lambda) F| = 0(n^{-\gamma n}), \qquad \gamma > 0,$$

pour tout $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ et $t \in [0, t_0]$, $t_0 < \infty$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Théorème 2. *Supposons:*

1. $u^{(k)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, (k-1)$.
2. $u^{(k)}(t) = t^{-\gamma} v(t), \quad 0 \leqslant \gamma < 1, \quad v(t)$ *a sa dérivée continue* et $v(0) \neq 0$.
3. $l^{\beta-k+\gamma}\{w(\lambda, t)\}$ *a sa dérivée continue par rapport à* t *pour tout* $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ et

$$l^{\beta-k+\gamma}\{w(\lambda, t)\}|_{t=0} = 0.$$

4. $\limsup n^{\delta n} |\alpha_n| < \infty, \quad \delta > \beta - 1$.

Sous ces conditions la série (1), *avec* $a(\lambda) = \dfrac{w(\lambda)}{u}$, *converge pour tout* $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ *dans le corps* K.

Démonstration. — Comme dans le théorème précédent on peut montrer que pour $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ il existe la fonction $\omega(\lambda\ t)$, continue par rapport à t et telle que $l^{\beta} \dfrac{w(\lambda)}{u} = \omega(\lambda)$.

Partons de la relation:

$$l^{\beta-k+\gamma}\, w(\lambda) = l^{\gamma-k}\, u\, \omega(\lambda) = l^{\gamma}\, u^{(k)}\, \omega(\lambda) = l^{\gamma}\, \{t^{-\gamma}\, v(t)\}\, \omega(\lambda).$$

Nous allons montrer que $l^{\gamma}\{t^{-\gamma} v(t)\}$ est une fonction continue pour $t \neq 0$ et peut être prolongée continuellement aussi sur $t=0$, où elle ne s'annule pas. Cette fonction a aussi sa dérivée première:

$$\{J(t)\} \equiv l^{\gamma}\{t^{-\gamma} v(t)\} = \left\{\int_0^t \frac{v(t-\tau)}{t^{1-\gamma}(t-\tau)^{\gamma}}\, d\tau\right\} = \left\{\int_0^1 \frac{v(t-ut)}{u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma}}\, du\right\},$$

$$J(0) = v(0) \int_0^1 \frac{dn}{u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma}} \neq 0$$

et

$$J'(t) = \int_0^1 \left(\frac{1-u}{u}\right)^{1-\gamma} v'(t-ut)\, du.$$

Ainsi, pour la fonction $\omega(\lambda, t)$ nous sommes arrivé à l'équation intégrale de première espèce de V. Voltera:

$$\left\{\frac{t^{\beta-k+\gamma-1}}{\Gamma(\beta-k+\gamma)}\right\} \{w(\lambda, t)\} = \{J(t)\}\, \{\omega(\lambda, t)\} \tag{4}$$

$$= \left\{\int_0^t J(t-\tau)\, \omega(\lambda, \tau)\, d\tau\right\}$$

Cette équation se transforme en équation de deuxième espèce de V. Voltera:

$$l^{\beta-k+\gamma-1}\, w(\lambda) = J(0)\, \omega(\lambda) + J'\, \omega(\lambda).$$

L'existence de la solution continue est assurée par la théorie générale d'équations intégrales linéaires de deuxième espèce.

La démonstration du théorème 2 est maintenant la même comme pour le théorème précédent. On prend la même fonction $F(t)$ et on a:

$$\alpha_n \frac{w^n(\lambda)}{u^n} F = \alpha_n\, \omega^n(\lambda)\, s^{n\beta} F.$$

Tous les deux théorèmes ont comme un cas particulier le théorème *A*.

La série (1) se réduit à la série (2) quand on prend pour $w(\lambda) = \lambda\, l$ et $u = l^{1+\alpha}$. Alors $W(\lambda, z) = \dfrac{\lambda}{z}$ et $U(z) = \dfrac{1}{z^{1+\alpha}}$ et les conditions 1 et 2 du théorème 1 sont remplies.

Les conditions de convergence du théorème 1 et du théorème A sont ainsi devenues les mêmes.

Quant au théorème 2, soit dans la série (2) α écrit sous la forme

$$\alpha=p-\gamma, \quad p\in N, \quad 0\leqslant\gamma<1 .$$

Avec la même notation

$$w(\lambda)=\lambda I \quad \text{et} \quad u=l^{1+\alpha}=l^{p+1-\gamma}=\{t^{-\gamma}t^{p}\},$$

pour les conditions 1 et 2 du théorème 2 on a:

$$k=p, \; v(t)=\prod_{i=0}^{p-1}(p-\gamma-i).$$

La condition 3 nous donne $\beta=1+p-\gamma=1+\alpha$, et de la condition 4 il s'ensuit $\delta>\beta-1=\alpha$. Ce qu'il fallait montrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Doetsch: *Handbuch der Laplace-Transformation I*, Basel (1950), 263.

[2] J. Mikusiński: *Operational calculus*, Warszawa (1959).

[3] C. Ryll — Nardzewski: *Sur la convergence des séries de puissances de l'opérateur différentiel*, Studia Math. XIII (1953), 37—40.

[4] C. Ryll — Nardzewski: *Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire*, Studia Math. XIII (1953), 41—47.

[5] B. Stanković: *Operatori J. Mikusińskog*, Novi Sad (1962).

[6] E. Wright: *The generalized Bessel function of order greater than one*, Quart. J. Math. Oxford Series V. 11 (1940) 36—48.