PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 139–140.

QUELQUES CONSÉQUENCES DE L'EXISTENCE D'UNE INFINITÉ DES NOMBRES PSEUDOPREMIERS DE LA FORME $ax+b$

A. Rotkiewicz

(Présenté le 9 mars 1964)

On appelle *pseudopremiers* les nombres composés n tels que $n \mid 2^n-2$. Dans le travail [1] j'ai démontré la proposition S suivante:

S. Toute progression arithmétique $ax+b$, où a et b sont des nombres naturels premiers entre eux, contient une infinité de nombres pseudopremiers.

De S résultent les théorèmes suivants:

Théorème 1. *$c_1, c_2, \ldots, c_m$ étant une suite finie quelconque de chiffres du système décimal, où $c_m = 1, 3, 7$ ou 9, il existe une infinité de nombres pseudopremiers dont les m derniers chiffres sont $c_1, c_2, \ldots, c_m$.*

La démonstration du théorème 1 est la même que la démonstration du théorème analogue pour les nombres premiers (voir [4], p. 346), où l'on remplace le théorème de Dirichlet par la proposition S.

Théorème 2. *m étant un nombre naturel quelconque, il existe un nombre pseudopremier, dont la somme des chiffres est $>m$.*

Le théorème 2 résulte tout de suite du théorème 1.

Théorème 3. *Il existe des nombres pseudopremiers isolés arbitrairement loin de deux côtés, c'est-à-dire tels que, k étant un nombre naturel donné quelconque, il existe un nombre pseudopremier $N>k$, tel que aucun des nombres $N\pm 1, N\pm 2, \ldots, N\pm k$ n'est pas pseudopremier.*

Démonstration. Soit $F_m = 2^{2^m}+1$ $(m=1, 2, \ldots)$ et soit n un nombre naturel $>2k$. Comme $(F_m, F_\nu)=1$ pour $m \neq \nu$, d'après le théorème chinois sur les restes, il existe un nombre naturel c tel que

$$(1) \qquad c \equiv -l \pmod{F_{n+l}^2} \text{ et } c \equiv l \pmod{F_{n-l}^2} \text{ pour } l=1, 2, \ldots, k.$$

Tout diviseur premier p du nombre $F_{n\pm l}$ est, comme on sait, de la forme $2^{n\pm l}x+1$. D'après $n>2k$ on a

$$p > 2^{n-l} > 2^k \geqslant l \text{ (pour } l=1, 2, \ldots, k). \text{ Donc } (l, F_{n\pm l})=1$$

pour $l=1, 2, \ldots, k$, et, d'après (1), on a aussi $(c, F_{n\pm l})=1$, d'où

$$(c, F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2} \cdots F_{n-k}F_{n+k})=1$$

et, en vertu de S, il existe un nombre pseudopremier N tel que

$$N = F_{n-1}^2 F_{n+1}^2 F_{n-2}^2 F_{n+2}^2 \cdots F_{n-k}^2 F_{n+k}^2 x + c, \tag{2}$$

où x est un nombre naturel. Il résulte de (1) et (2) que $F_{n+l}^2 \mid N+l$, $F_{n-l}^2 \mid N-l$ pour $l=1, 2, \ldots, k$. Or, on démontre sans peine qu'il n'existe pas des nombres pseudopremiers divisibles par un carré d'un nombre de Fermat (voir [2]). Les nombres $N\pm 1, N\pm 2, \ldots, N\pm k$ ne peuvent pas donc être pseudopremiers.

Théorème 4. *Pour tout nombre naturel pair $2k$ et tout module naturel m il existe des nombres pseudopremiers p et q aussi grands que l'on veut et tels que*

$$2k \equiv p+q \pmod{m}.$$

Corollaire. *Tout nombre naturel est un diviseur d'une somme de deux nombres pseudopremier.*

Théorème 5. *Pour tout nombre naturel pair $2k$ et tout module naturel m il existe des nombres pseudopremiers p et q aussi grands que l'on veut et tels que*

$$2k \equiv p-q \pmod{m}.$$

Théorème 6. *Pour tout nombre naturel m et pour tout nombre naturel n suffisamment grand il existe une infinité des nombres pseudopremiers p tels que*

$$2^{2^n}+1 \equiv p \pmod{m}$$

Si l'on remplace les nombres p et q par les nombres premiers, on obtient du théorème 5 le théorème T du travail [5], où M. Sierpiński l'a déduit de l'hypothèse connue de Goldbach d'une façon tout à fait élémentaire (sans faire appel au théorème de Dirichlet). M. A. Schinzel a déduit le même théorème du théorème de Dirichlet sans faire appel à l'hypothèse de Goldbach.

La démonstration des théorèmes 4, 5 et 6 est la même que la démonstration des théorèmes 1, 2 et 4 du travail [3], où il faut seulement remplacer le théorème de Dirichlet par le théorème S.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers de la forme $ax+b$*. C. R. Ac. Sci. Paris 257 (1963), 2601—2604.

[2] A. Rotkiewicz, *Sur les formules donnant des nombres pseudopremiers*, Colloquium Math. 12 (1964), 69—72.

[3] A. Schinzel, *Démonstration d'une conséquence de l'hypothèse de Goldbach*, Compositio Math. 14 (1959), 74—76.

[4] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa, 1959

[5] W. Sierpiński, *O pewnym wniosku z hipotezy Goldbacha*, Wiadomości Matematyczne 3 (1959), 21—22.