PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 125–134.

REMARQUES SUR UN PROBLÈME DE M. P. ERDÖS

W. Sierpinski

(Présenté le 9 mars 1964)

Dans sa publication *Quelques problèmes de la Théorie des Nombres* qui a paru récemment dans les Monographies de l'Enseignement Mathématique № 6, p. 135, M. P. Erdös énonce, comme Problème 75, le théorème suivant:

Théorème *T. Tout nombre rationnel a/b compris entre* 0 *et* $\pi^2/6-1$ *peut être décomposé en une somme de la forme*

(1) $$\frac{a}{b}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+, \ldots +\frac{1}{x_n^2},$$

où les x_i sont des entiers strictement croissants.

Ce théorème a été démontré par P. Erdös, mais sa démonstration qui est assez difficile, n'a pas été publiée.

Je ne connais pas la démonstration de M. Erdös du théoreme T.

La première question qui s'impose ici, c'est quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe pour un nombre rationnel a/b la décomposition (1) dont il s'agit dans le théorème T. M. A. Schinzel a déduit du théorème T le théorème S suivant:

Théorème *S. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe pour un nombre rationnel r la décomposition*

(2) $$r=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2},$$

où n et $x_1<x_2<\cdots<x_n$ sont des nombres naturels, est celle qu'on ait soit $0<r<\frac{\pi^2}{6}-1$, *soit* $1\leqslant r<\frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration de l'implication $T\rightarrow S$. Si $r=1$, on a $r=\frac{1}{1^2}$. Si r est un nombre rationnel tel que $1<r<\frac{\pi^2}{6}$, on a $0<r-1<\frac{\pi^2}{6}-1$ et, d'après le théorème T il existe une décomposition

$$r-1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots\frac{1}{x_n^2},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres naturels croissants. Or, come

$$r-1<\frac{\pi^2}{6}-1<1,$$

on a $x_j>1$ et pour le nombre r on obtient la décomposition

$$r=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}, \quad \text{où} \quad 1<x_1<x_2<\cdots<x_n.$$

Il résulte donc du théorème T que les conditions du théorème S sont suffisantes. Pour démontrer qu'elles sont aussi nécessaires, supposons que r est un nombre rationnel tel que $\frac{\pi^2}{6}-1\leqslant r<1$. Si l'on avait pour r la formule (2), où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres naturels croissants, on aurait, d'après $r<1$, $x_1\geqslant 2$, donc (vu que $x_1<x_2<\cdots<x_n$)

$$r=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{\pi^2}{6}-1,$$

contrairement à l'hypothèse sur le nombre r. Il ne peut être aussi $r\geqslant\frac{\pi^2}{6}$, puisque, d'après la formule (2), où x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres naturels croissants, on a $r\leqslant\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{\pi^2}{6}$.

Les conditions du théorème S sont donc nécessaires.

Nous avons ainsi démontré que le théorème T implique le théorème S.

Il se pose ensuite la question quel est le procédé qui donne pour un nombre rationnel donné r satisfaisant aux conditions du théorème T, la décomposition du nombre r dont il s'agit dans ce théorème. En particulier, il se pose la question si l'on arrive toujours au but par le procédé suivant: r étant un nombre rationnel satisfaisant aux conditions du théoreme T, soit x_1 le plus petit nombre naturel tel que $r\geqslant\frac{1}{x_1^2}$. Si $r>\frac{1}{x_1^2}$ soit $r_i=r-\frac{1}{x_1^2}$ et soit x_2 le plus petit nombre naturel tel que $x_2>x_1$ et $r_1\geqslant\frac{1}{x_2^2}$. Si $r_1>\frac{1}{x_1^2}$, soit $r_2=r_1-\frac{1}{x_1^2}$ et soit x_3 le plus petit nombre naturel tel que $x_3>x_2$ et $r_2>\frac{1}{x_3^2}$, et ainsi de suite. En procédant ainsi arrivera-t-on toujours à la décomposition (2)?. Si non, quel est l'exemple d'un nombre rationnel r pour lequel notre procédé conduit au développement du nombre $r<\frac{\pi^2}{6}-1$ en une série infinie?

Notre procédé exige des calculs pénibles, même s'il s'agit des nombres rationnels très simples, comme par exemple $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$. Je connais un développement du nombre $\frac{1}{2}$ satisfaisaisant aux conditions du théorème T mais il n'est pas obtenu par le procédé dont nous avons parlé. C'est le développement

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{45^2}+\frac{1}{60^2}. \tag{3}$$

Pour vérifier cette égalité, il est à remarquer que

$$\frac{1}{7^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}=\frac{1}{6^2}$$

et que

$$\frac{1}{45^2}+\frac{1}{60^2}=\frac{1}{36^2}$$

et il faut réduire tous les termes restant au dénominateur commun 36^2.

Je ne connais aucun développement du nombre $1/2$ en une somme de moins que 12 termes qui sont les inverses de nombres carrés distincts.

Le procédé dont nous avons parlé plus haut ne donne pas la décomposition (3), puisque, vu que

$$\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}>\frac{1}{5^2},$$

en appliquant notre procédé, après le terme $\frac{1}{4^2}$ devrait être le terme $\frac{1}{5^2}$.

Il est encore à remarquer que notre procédé peut donner pour un nombre rationnel un développement qui a plus de termes qu'un autre développement de ce nombre satisfaisant au théorème T. Par exemple pour le nombre $\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}$ notre procédé conduit au développement ayant plus que trois termes:

$$\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{60^2}+\cdots$$

Pareillement, pour le nombre $\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}$ notre procédé donne le développement ayant plus que deux termes:

$$\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots$$

Je démontrerai maintenant le théorème suivant:

Théorème 1. *Il résulte du théorème T que si r est un nombre rationnel satisfaisant aux conditions du théorème T, le nombre r admet une infinité de représentations* (2), *où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forment une suite croissante de nombres naturels.*

Démonstration. Supposont que le nombre rationnel r satisfait aux conditions du théorème T. Comme $\pi^2<12$, on a $r<1$ et, d'après le théorème T, il existe la décomposition (2), où n et $x_1<x_2<\cdots x_n$ sont des nombres naturels. Comme $r<1$, on a $x_n>1$. S'il était $x_n=2$, vu que $r<1$, on aurait

$n=1$ et $r=\frac{1}{4}$. Or d'après (3) et vu que $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}$, on a pour le nombre 1/4 aussi le développement

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{60^2},$$

où l'on a une somme de onze termes, dont le dernier est $\frac{1}{60^2}$.

Nous pouvons donc toujours supposer qu'on a pour le nombre r la décomposition (2), où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres naturels croissants et où $x_n>2$.

Le nombre $\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{(x_n+1)^2}$ étant rationnel >0 et $<\frac{1}{4}$, il existe, d'après le théorème T, des nombres naturels m et $y_1<y_2<\cdots<y_m$ tels que

$$\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{(x_n+1)^2}=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\cdots+\frac{1}{y_m^2}. \tag{4}$$

S'il était $y_1\leqslant x_n+1$, on aurait $\frac{1}{y_1^2}\geqslant\frac{1}{(x_n+1)^2}$, ce qui donne, d'après (4)

$$\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{(x_n+1)^2}\geqslant\frac{1}{(x_n+1)^2}, \text{ donc } (x_n+1)^2\geqslant 2x_n^2,$$

d'où $x_n+1\geqslant x_n\sqrt{2}$ et $x_n(\sqrt{2}-1)\leqslant 1$, d'où $x_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1$, et, x_n étant un nombre naturel, il en résulte que $x_n\leqslant 2$, contrairement à l'hypothèse que $x_n>2$.

On a donc $y_1>x_n+1$ et les formules (2) et (4) donnent le développement

$$r=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{(x_n+1)^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\cdots+\frac{1}{y_m^2}, \tag{5}$$

$$\text{où } x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n+1<y_1<y_2<\cdots<y_m.$$

Le développement (5) a $n+m>n$ termes. De tout développement (2) du nombre r, où $x_n>2$, nous pouvons donc obtenir un développement du r ayant plus de termes et satisfaisant au théorème T. Il existe donc une infinité de tels développements.

Nous avons ainsi démontré que le théorème T implique le théorème 1.

Il est à remarquer que sans l'aide du théorème T nous pouvons démontrer que le nombre $r=\frac{1}{2}$ peut être représenté d'une infinité de façons sous la forme (2), où x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) sont des nombres naturels croissants. Pour le démontrer, nous prouverons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Si l'on a pour un nombre naturel $n>1$*

$$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}, \quad \text{où} \quad x_1<x_2<\cdots<x_n$$

sont des nombres naturels et x_n *est un nombre pair,* $x_n = 2k$, *on a aussi*

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{y_1^2} + \cdots + \frac{1}{y_n^2}$$

où y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des nombres naturels,* $x_{n-1} < y_i < \cdots < y_n$, *et où le nombre* y_n *est pair.*

Pour la démonstration il suffit de poser $y_1 = kx_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, puisque

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{k^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{(kx_1)^2} + \frac{1}{(kx_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(kx_n)^2}$$

et $y_n = kx_n = 2k^2$ est un nombre pair et, vu que $x_1 \geqslant 3$ (puisque $n > 1$), on a $x_{n-1} < x_n = 2k < kx_1 = y_1$.

Du développement du nombre $\frac{1}{2^2}$ en une somme de n termes, satisfaisant aux conditions désirées, on obtient ainsi le développement du nombre $\frac{1}{2^2}$ en une somme de $2n-1 > n$ (puisque $n > 1$) termes satisfaisant aux conditions désirées. Le lemme est ainsi démontré.

Vu la formule (3) qui donne le développement

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{60^2},$$

on conclut de notre lemme que le nombre $\frac{1}{2^2}$ donne une infinité des représentations (2), où x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres naturels croissants. Vu que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$ on en conclut que le nombre $\frac{1}{2}$ jouit de la même propriété, c.q.f.d.

Il est encore à remarquer ici que dans chaque développement (2) du nombre 1/2 satisfaisant au théorème T on a $x_1 = 2$. En effet, pour m entiers > 1 on a

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+k)^2} < \frac{1}{(m-1)\,m} + \frac{1}{m\,(m+1)} + \cdots + \frac{1}{(m+k-1)\,(m-k)}$$

$$= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+k} < \frac{1}{m-1},$$

et, d'après $1 < x_1 < \cdots < x_n$, on trouve

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{x_1 - 1},$$

donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{x_1 - 1}$, d'où $x_1 < 3$ et, comme $x_1 > 1$, on trouve $x_1 = 2$. De (3) il résulte que pour $r = \frac{1}{2}$ on peut avoir $x_2 = 3$.

En utilisant le théorème T nous prouveront qu'il peut être ici aussi $x_3=4$. En effet, on a $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}=\frac{3}{16}$. Or,

$$\frac{3}{16}<\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{21}{6}+\frac{1}{9}\right),$$

puisque $\frac{\pi^2}{6}>\frac{3}{16}+\frac{21}{16}+\frac{1}{9}=\frac{28}{18}$, vu que $\pi^2>9\frac{1}{3}$. Or, $\frac{3}{16}>\frac{1}{5^2}$. Soit m le plus grand nombre naturel, tel que $\frac{3}{16}\geqslant\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$. On aura

$$\frac{3}{16}<\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}$$

et pour $r=\frac{3}{16}-\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right)$ on aura $r<\frac{1}{(m+1)^2}$. Donc si $r>0$, il existe d'après le théorème T des nombres naturels $y_1, y_2, \ldots, y_s$ tels que $y_1<y_2<\cdots<y_s$ et

$$r=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\cdots+\frac{1}{y_s^2}$$

et, comme $r<\frac{1}{(m+1)^2}$, on aura $y_1>m+1$ et

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\cdots+\frac{1}{y_s^2},$$

où $m<m+1<y_1<y_2<\cdots<y_s$.

Sans faire appel au théorème T nous démontrerons ici encore les théorèmes suivants:

Théorème 2. *Quel que soit le nombre naturel donné $n>1$, l'équation*

$$\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2} \tag{6}$$

a une infinité de solutions en nombes naturels $x_0<x_1<\cdots<x_n$.

Démonstration. Il suffira évidemment de démontrer que l'équation (6) a pour un nombre naturel $n>1$ au moins une solution en nombres naturels distincts.

Pour $n=2$ notre théorème est vrai, vu qu'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{12^2}=\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2} \tag{7}$$

Supposons maintenant que le théorème 2 est vrai pour un nombre naturel $n\geqslant 2$, donc qu'il existe des nombres naturels $x_0<x_1<\cdots<x_n$ pour lesquels on a l'égalité (6). Soit $y_i=12x_i$ pour $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$, $y_n=15x_n$'

$y_{n+1}=20x_n$. Comme $x_0<x_1<\cdots<x_n$, on aura $y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n<y_{n+1}$ et, d'après (7) et (6), nous aurons

$$\frac{1}{y_0^2}=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\cdots+\frac{1}{y_{n+1}^2}.$$

Le théorème 2 est donc vrai pour le nombre $n+1$. La démonstration du théorème 2 résulte donc par l'induction.

Théorème 3. *Le nombre* 1 *n'est pas une somme d'un nombre fini* >1 *des inverses des carrés de nombres naturels distincts.*

Démonstration. Supposons que pour un nombre naturel $n>1$ on *a*

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}, \tag{8}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres naturels distincts, plus grands que 1, vu que $n>1$. Nous pouvons donc supposer que $1<x_1<x_2<\cdots<x_n$, d'où il résulte sans peine que $x_k\geqslant k+1$ pour $k=1, 2, \ldots, n$, donc, d'après (8):

$$1\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}. \tag{9}$$

Or, on a

$$\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

pour $k=1, 2, \ldots, n$, et l'inégalité (9) donne

$$1<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1,$$

ce qui est impossible. Le théorème 3 est ainsi démontré.

Le théorème T suggère la question suivante:

Tout nombre rationnel r tel que $0<r<2$ admet-il la décomposition

$$r=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}, \tag{10}$$

où n est un nombre naturel et $x_1<x_2<\cdots<x_n$ sont des nombres triangulaires $\left(\text{c'est-à-dire des nombres de la forme } t_k=\frac{k(k+1)}{2}, \text{ où } k=1, 2, \ldots\right)$?

Voici la démonstration de M. A. Schinzel que la réponse à cette question est positive.

Lemme 1. *r étant un nombre rationnel positif $<1/2$, il existe un nombre naturel n et les nombres naturels $x_1<x_2<\cdots<x_n$ tels que $x_1>2$ et que*

$$r=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}, \tag{11}$$

et

$$\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_{k+1}}+\cdots+\frac{1}{x_n}<\frac{1}{x_k-1} \quad \textit{pour } k=1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Démonstration du lemme 1. Soit x_1 le plus petit nombre naturel tel que $r > \frac{1}{x_1}$. Comme $r < \frac{1}{2}$, on a $x_1 > 2$ et $r > \frac{1}{x_1-1}$. Soit $r = \frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres naturels, tels que $(a, b) = 1$. Si $r > \frac{1}{x_1}$ soit $r_1 = r - \frac{1}{x_1} = \frac{a_1}{b_1}$, où a_1 et b_1 sont des nombres naturels, tels que $(a_1, b_1) = 1$. Comme $\frac{a}{b} = r < \frac{1}{x_1-1}$, on a $ax_1 - a < b$, donc $ax_1 - b < a$ et vu que

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} - \frac{1}{x_1} = \frac{ax_1 - b}{b}$$

et que $(a_1, b_1) = 1$, on trouve $a_1 < ax_1 - b < a$. Pareillement, soit x_2 le plus petit nombre naturel, tel que $r_1 \geqslant \frac{1}{x_2}$. S'il était $x_2 \leqslant x_1$, on aurait $r \geqslant \frac{2}{x_1}$, et, comme $r < \frac{2}{x_1-1}$, on trouverait $\frac{2}{x_1} < \frac{1}{x_1-1}$, d'où $x_1 < 2$, ce qui est impossible. On a donc $x_2 > x_1$. Si $r_1 > \frac{1}{x_2}$ on trouve $r_2 = r_1 - \frac{1}{x_2} = \frac{a_2}{b_2}$ où $(a_2, b_2) = 1$ et $a_2 < a_1$.

La suite décroissante de nombres naturels $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ ne pouvant pas être infinie, il existe un nombre naturel n tel que $r_{n-1} = \frac{1}{x_n}$ ce qui donne le développement (11), où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Pour $k = 1, 2, \ldots, n$ on a donc

$$r_k = \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

et, x_k étant le plus petit nombre naturel, tel que $r_k \geqslant \frac{1}{x_k}$, on a $r_k < \frac{1}{x_k - 1}$, d'où résultent les inégalités (12). Le lemme 1 se trouve ainsi démontré.

Corollaire du lemme 1. *r étant un nombre rationel positif $< \frac{1}{2}$, il existe une décomposition* (11) *du nombre r, où n est un nombre naturel et x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres naturels tels que*

$$x_{k+1} > (x_k - 1)\,x_k \geqslant 2x_k \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Démonstration du corollaire. Il résulte de (12) que pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on a

$$\frac{1}{x_{k+1}} < \frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_k},$$

et vu que $x_k \geqslant x_1 > 2$, cela donne des inégalités (13).*

Lemme 2. *Tout nombre rationnel positif $r < 2$ admet une décomposition* (11), *où n et x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres naturels et*

$$2x_k \leqslant x_{k+1} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14}$$

* Cf. P. Erdös and S. Stein, Sums of distinct unit fractions, Proc. of the Amer Math. Soc. vol. 14 (1963), p. 126.

Démonstration du lemme 2. Si $r<\frac{1}{2}$ le lemme 2 résulte du corollaire du lemme 1. Soit maintenant r un nombre rationnel tel que $\frac{1}{2}\leqslant r<1$ et soit s le plus petit nombre naturel tel que

$$1-\frac{1}{2^s}\leqslant r<1-\frac{1}{2^{s+1}}$$

Si $r=1-\frac{1}{2^s}$ on a $r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^s}$ et le lemme 2 est vrai. Si $r=>1-\frac{1}{2^s}$, on a $0<r+\frac{1}{2^s}-1<\frac{1}{2^{s+1}}<\frac{1}{2}$ et d'après le corollaire du lemme 1 on a

$$r+\frac{1}{2^s}-1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n},$$

où n et x_k $(k=1,2,\ldots,n)$ sont des nombres naturels tels que $2x_k\leqslant x_{k+1}$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$, et on a $x_1>2^{s+1}$ $\left(\text{puisque } r+\frac{1}{2^s}-1<\frac{1}{2^{s+1}}\right)$. On a donc

$$r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n},$$

ce qui donne la décomposition désirée du nombre r.

Si, enfin $1\leqslant r<2$, on a soit $r=1$, soit $0<r-1<1$ et, d'après ce que nous avons démontré plus haut, on a

$$r-1=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_m},$$

où m et y_i $(i=1,2,\ldots,m)$ sont des nombres naturels et où $y_{i+1}\geqslant 2y_i$ pour $i=1,2,\ldots,m-1$. Or, vu que $r-1<1$, on a $y_1\geqslant 2$ et on obtient pour r la décomposition désirée.

Le lemme 2 est ainsi démontré.

Nous allons maintenant à démontrer le

Théorème 4. *Tout nombre rationnel positif $r<2$ est une somme finie des inverses de nombres triangulaires distincts.*

Démonstration du théorème 4. D'après le lemme 2 on a la décomposition (11), où n et x_k $(k=1,2,\ldots,n)$ sont des nombres naturels et où on a les formules (14). Or, on vérifie sans peine (par exemple par l'induction) qu'on a pour m naturels l'égalité

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{t_m}+\frac{1}{t_{m+1}}+\cdots+\frac{1}{t_{2n-1}} \tag{15}$$

$\left(\text{où } t_m=\frac{m(m+1)}{2} \text{ pour } m=1,2,\ldots\right)$. Il résulte donc de (11) que

$$r=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{t_{x_k}}+\frac{1}{t_{x_k+1}}+\cdots+\frac{1}{t_{2x_k-1}}\right)$$

et d'après (14) tous les termes de cette somme double sont distincts.

Corollaire. *Si r est un nombre rationnel,* $r \neq 1$ et $0 < r < 2$, *le nombre r peut être représenté d'une infinité de manières comme une somme finie des inverses de nombres triangulaires distincts.*

Démonstration du corollaire. Soit r un nombre rationnel $\neq 1$ et tel que $0 < r < 2$. D'après le théorème 4 on a

$$r = \frac{1}{t_{n_1}} + \frac{1}{t_{n_2}} + \cdots + \frac{1}{t_{n_s}}, \tag{16}$$

où n_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ est une suite croissante de nombres naturels. Comme $r \neq 1$, on a $r \neq t_1$, donc $n_s > 1$. Or, d'après la formule (15) on a (pour $m = t_{n_s}$):

$$\frac{1}{t_{n_s}} = \frac{1}{t_{t_{n_s}}} + \frac{1}{t_{t_{n_s}+1}} + \cdots + \frac{1}{t_{2t_{n_s}-1}} \tag{17}$$

Si $s = 1$, les formules (16) et (17) donnent

$$r = \frac{1}{t_{n_1}} = \frac{1}{t_{t_{n_1}}} + \frac{1}{t_{t_{n_1}+1}} + \cdots + \frac{1}{t_{2t_{n_1}-1}}$$

où $2t_{n_1} - 1 > t_{n_1}$, puisque $r \neq 1$ et $t_{n_1} > 1$.

Si $s > 1$, les formules (16) et (17) donnent

$$r = \frac{1}{t_{n_1}} + \frac{1}{t_{n_2}} + \cdots + \frac{1}{t_{n_{s-1}}} + \frac{1}{t_{t_{n_s}+1}} + \cdots + \frac{1}{t_{2t_{n_s}-1}},$$

où $n_{s-1} < t_{n_s}$, puisque $n_s > n_{s-1}$ et $n_s + 1 > 2$.

De chaque décomposition (16) du nombre rationnel $r \neq 1$ (où $0 < r < 2$) on obtient donc une pareille décomposition ayant plus de termes (puisque $n_s > 1$ et $t_{n_s} > 1$, d'où $2t_{n_s} - 1 > t_{n_s}$).

Le corrollaire se trouve ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'aucun nombre rationnel $r > 2$ n'admet pas la décomposition (16), où $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$, puisque le côté droit de la formule (16) est toujours

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2.$$