PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 121—124

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE QUI CARACTÉRISE LA FONCTION $f(x)=x^{-1}$

Marek Kuczma

(Présenté le 21 février 1964)

Le but de la note présente est de caractériser la fonction $f(x)=x^{-1}$ à l'aide de l'équation fonctionnelle

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{f(x)+1}, \qquad x\in(0,\ \infty), \tag{1}$$

et quelques conditions supplémentaires.

La supposition qu'on doit faire pour obtenir $f(x)=x^{-1}$ comme la solution unique de l'équation (1), c'est la convexité de $f(x)$. Comme il y a deux définitions non équivalentes de la notion de convexité, nous donnons ici celle de laquelle nous nous servirons dans la suite.

Définition. Une fonction $f(x)$ est appelée convexe dans un intervalle $(a,\ b)$ si l'on a

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{2}$$

pour tous $x_1,\ x_2\in(a,\ b)$ et $\lambda\in(0,\ 1)$.

Maintenant nous allons démontrer la suivante.

Proposition. *Si une fonction $f(x)$, définie et convexe dans* $(0,\ \infty)$, *satisfait dans* $(0,\ \infty)$ *à l'équation fonctionnelle* (1) *et à la condition*

$$f(1)=1, \tag{3}$$

alors on a

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \textit{pour} \quad x\in(0,\ \infty), \tag{4}$$

Démonstration. On peut facilement démontrer par l'induction (en vertu de (3) et (1)) que l'on a

$$f(n)=\frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{5}$$

Soit t un nombre arbitraire, mais fixé, de l'intervalle $(0,\ 1)$. En posant dans (2)

$$x_1=n, \quad x_2=n+1, \quad \lambda=1-t,$$

nous obtenons

$$f(n+t)\leqslant(1-t)f(n)+tf(n+1) \quad \text{pour} \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

d'où, en vertu de (5),

$$f(n+t) \leqslant \frac{n+1-t}{n(n+1)} \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Posons ensuite dans (2)

$$x_1 = n+t, \quad x_2 = n+2, \quad \lambda = \frac{1}{2-t}.$$

Nous aurons

$$f(n+1) \leqslant \frac{1}{2-t} f(n+t) + \frac{1-t}{2-t} f(n+2) \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

c'est-à-dire

$$f(n+t) \geqslant (2-t) f(n+1) - (1-t) f(n+2) \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Tenant compte de (5) nous en obtenons

$$f(n+t) \geqslant \frac{n+3-t}{(n+1)(n+2)} \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Une transformation simple de la formule (1) nous donne

$$f(x-1) = \frac{f(x)}{1-f(x)}, \qquad x \in 1, \infty),$$

d'où par l'induction,

$$f(x-n) = \frac{f(x)}{1-nf(x)}, \qquad x \in (n, \infty). \tag{8}$$

La fonction

$$G_n(u) = \frac{n}{1-nu} \tag{9}$$

est strictement croissante dans $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ pour chaque n entier positif. Alors il résulte de (6) et (7) que

$$G_n\left[\frac{n+3-t}{(n+1)(n+2)}\right] \leqslant G_n[f(n+t)] \leqslant G_n\left[\frac{n+1-t}{n(n+1)}\right] \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Mais nous avons en vertu de (8) et (9)

$$G_n[f(n+t)] = f(t),$$

alors

$$\frac{n+3-t}{nt+2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{n+1-t}{nt} \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Quand n tend vers ∞, on en obtient

$$f(t) = \frac{1}{t}. \tag{10}$$

Come t était choisi en (0, 1) de manière arbitraire, les relations (3) et (10) montrent que

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \in (0, 1]. \tag{11}$$

Mais $f(x)$ étant complètement déterminée par ses valeurs de l'intervalle (0, 1] et par l'équation (1), nous en obtenons la relation (4).

Autre démonstration. Il résulte de (1), (3) que (5) est remplit pour tous n entiers positifs. Fixons un $t \in (0, 1)$ et posons

$$f(t)=\frac{1}{t+c}, \tag{12}$$

où c est à déterminer. Il s'ensuit de (12) et (1) que

$$f(n+t)=\frac{1}{n+t+c} \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Posons

$$a_{2n-1}=\frac{f(n+t)-f(n)}{t} \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

$$a_{2n}=\frac{f(n+1)-f(n+t)}{1-t}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

La fonction $f(x)$ étant convexe, la suite a_n doit être croissante, c'est-à-dire on doit avoir

$$a_{2n} \geqslant a_{2n-1} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} \geqslant a_{2n} \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

Mais, comme un calcul simple le montre immédiatement, (13) implique l'égalité $c=0$ c'est que signifie que la relation (11) est remplie. On en conclut que (4) est vrai.

Remarques. 1. On peut aussi caractériser la fonction $f(x)=x^{-1}$ comme la solution monotone unique de l'équation

$$f(x+1)-f(x)=-\frac{1}{x(x+1)}, \qquad x \in 0, \infty),$$

remplissant la condition (3). C'est une conséquence immédiate d'un de nos théorèmes antérieurs (voir [3], [4], [5]).

2. La fonction $f(x)=x^{-1}$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f[f(x)]=x. \tag{14}$$

Il serait très intéressant caractériser cette fonction par l'équation (14) et quelques conditions supplémentaires. Ce problème reste ouvert.

3. Si nous supposions dans notre Proposition que la fonction $1/f(x)$ est convexe, la thèse résulterait directement du théorème sur l'existence et l'unicité des solutions convexes de l'équation

$$g(x+1)-g(x)=\varphi(x) \tag{15}$$

(voir [1], [2], [5]). Notamment, si une fonction $f(x)$ satisfait à l'équation (1), alors la fonction $g(x)=1/f(x)$ satisfait à l'équation (15) avec $\varphi(x)\equiv 1$, dont la solution unique convexe telle qu'on a $g(1)=1$ est $g(x)=x$ ([1], [2], [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Krull, *Bemerkungen sur Differenzengleichung* $g(x+1)-g(x)=\varphi(x)$, Math. Nachr. 1 (1948), 365—376.

[2] M. Kuczma, *O równaniu funkcyjnym* $g(x+1)-g(x)=\varphi(x)$, Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell., Mat-Fiz-Chem. 4 (1958), 27—38.

[3] M. Kuczma, *Remarques sur quelques théorèmes de J. Anastassiadis*, Bull. Sci. Math. 84 (1960), 98—102.

[4] M. Kuczma, *Sur une équation fonctionnelle*, *Mathematica*, Cluj, 3 (26) (1961), 79—87.

[5] M. Kuczma, *Remark on a difference equation*, Roczniki P. T. M., Prace Matematyczne (sous presse).