PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 115–120.

REGULÄRE LÖSUNGEN EINES SYSTEMS PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Stanimir Fempl

(Vorgelegt am 7. Februar 1964)

In vielen Problemen der Mechanik spielt das System partieller Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=a(x, y)\, u+b(x, y)\, v+f(x, y), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=c(x, y)\, u+d(x, y)\, v+g(x, y) \end{cases}$$

eine wichtige Rolle.

In seiner ausführlichen Arbeit über Integration dieses Systems hat Vekua [1] die Eigenschaften der Lösungen dieses Systems erforscht. Er zeigte zuerst dass das System (1) sich in der komplexer Form

$$(2)\qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=A w+B \bar{w}+F$$

darstellen lässt, und dass — wenn w eine Lösung der Gleichung (2) ist — der reelle und imaginäre Teil u und v der Funktion w das System (1) befriedigt. Hier ist

$$z=x+yi, \quad \bar{z}=x-yi, \quad w=u+vi, \quad \bar{w}=u-vi,$$

$$A=(a+d+ic-ib)/4, \quad B=(a-d+ic+ib)/4, \quad F=f+gi.$$

Das aus (2) folgende Funktionenpaar u und v wird eine reguläre Lösung des Systems (1) genannt. Vekua zeigte nachdem, dass man im speziellen Fall

$$a=d, \quad b=-c, \quad f=g=0,$$

des Systems (1), also

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=au+bv \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=-bu+av, \end{cases}$$

und diesem entspricht in komplexer Form die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=A w\left(A=\frac{a-bi}{2}, \quad B=F=0\right),$$

dass man eine reguläre Lösung w_0 in der Gestalt

$$w_0 = e^{\omega_0(z)}, \quad \omega_0(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_T \frac{A(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{t-z}, \qquad (t = \xi + \eta i)$$

erhalten kann, wobei T ein Gebiet darstellt, welches stetige partielle Ableitungen I Ordnung nach x und y enthält, und durch eine geschlossene Kurve L begränzt ist.

Von der Funktion A, sowie von den Funktionen a, b, c, d, f, g, im System (1) wird die Stetigkeit im Gebiet $T+L$ gefordert.

Weiterhin zeigte Vekua [1] dass sich das System (1) immer auf ein spezielleres System

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = bu - av + g \end{cases}$$

reduzieren lässt, welches er Normalform des Systems (1) nennt. Da hier $b = c$, $a = -d$, dh. $A = 0$, $B = (a + bi)/2$ ist, so entspricht dem System (3) die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = B\bar{w} + F$$

in komplexer Form. Indem er diese Gleichung zu einer Integralgleichung reduziert, so zeigt Vekua [1] dass die Lösung der Gleichung (4) durch folgende Gleichung

$$w = \Phi(z + \iint\limits_T \Gamma_1(z, t)\, \Phi(t)\, dT + \iint\limits_T \Gamma_2(z, t)\, \overline{\Phi(t)}\, dT -$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint\limits_T \Omega_1(z, t)\, F(t)\, dT - \frac{1}{\pi} \iint\limits_T \Omega_2(z, t)\, \overline{F(t)}\, dT$$

darstellbar ist, wobei er Γ_1 und Γ_2 Resolventen der erwähnten Integralgleichung nennt, und Ω_1 u. Ω_2 als Kerne der Differentialgleichung (4) bezeichnet.

Der Ausdruck $\partial w/\partial \bar{z}$ wurde schon von Pompeiu [2] erforscht. Er nannte diesen Ausdruck areoläre Ableitung und zeigte dass das Operationssymbol $\partial/\partial \bar{z}$ mit dem Symbol $(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)/2$ identisch ist.

Theodorescu [3] benutzte die Pompeiuschen Resultate, definierte areoläre Polynome und erforschte ihre Eigenschaften. Diese Polynome haben die Form

$$w(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{z}^{\nu} f_\nu(z),$$

wo $f_\nu(z)\,(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ eine analytische Funktion ist.

In meiner früheren Abhandlung [4] zeigte ich dass die Bestimmung des areolären Polynoms mit der Auflösung eines Systems partieller Differentialgleichungen equivalent ist. Bei dieser Gelegenheit benutzte ich ein von Bilimovitch [5] eingeführtes Operationssymbol

$$B = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y},$$

und führte noch ein Integrationssymbol* ein, wonach

$$w = \tilde{\mathfrak{f}}\, f(x, y) \tag{5}$$

bedeutet das

$$B(w) = f(x, y)$$

ist. In der erwähnten Abhandlung habe ich noch auf einige Eigenschaften dieses Operators hingewiesen, nähmlich

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, f(z)\, \varphi(x, y) = f(z)\, \tilde{\mathfrak{f}}\, \varphi(x, y)\,, \tag{6}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, f(z) = x\, f(z) + P_0(z)\,, \tag{7}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, \varphi(x)\, f(z) = f(z) \int \varphi(x)\, dx + P_0(z)\,, \tag{8}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, \varphi(y)\, f(z) = -i f(z) \int \varphi(y)\, dy + P_0(z)\,, \tag{9}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, \varphi(z)\, f(z) = \frac{1}{2}\, f(z) \int \varphi(\bar{z})\, d\bar{z} + P_0(z)\,, \tag{10}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, f(w)\, B(w) = \int f(w)\, dw + P_0(z), \tag{11}$$

wo $f(z)$ und $P_0(z)$ analytische Funktionen sind. Dabei ist $P_0(z)$ eine willkürliche Funktion und sie spielt die Rolle einer Integrationskonstante. Ebenfalls ist gezeigt [4] dass

$$B(w_1 w_2) = w_1\, B(w_2) + w_2\, B(w_1)\,. \tag{12}$$

In dieser Arbeit benutze ich den erwähnten Integrationsoperator um die reguläre Lösungen des Systems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} + a(x, y)\, u + b(x, y)\, v + c(x, y) = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + a(x, y)\, v - b(x, y)\, u + d(x, y) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

zu erhalten. Wie man sieht, dieses System ist nicht spezieller als das System (1). Aber ich werde zeigen dass man die Lösung in einer Gestalt erhalten kann, die an die Lösung einer linearen Differentialgleichung I Ordnung erinnert. Dieses System nähmlich, auf die komplexe Form

$$2\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(x, y)\, w + B(x, y) = 0$$

gebracht, kann man in der Form

$$B(w) + f(x, y)\, w + g(x, y) = 0 \;\; (f = (a - bi)/2,\;\; g = (c + di)/2),$$

* In [4] benutzte ich das Symbol 𝄞.

schreiben, und das ist eine lineare Gleichung, wobei $B(w)$ die Rolle der ersten Ableitung spielt.

Die Lösungsart der Gleichung (14), mit Hilfe des Integrationsoperators, ermöglichte mir die regulären Lösungen des Systems

$$
(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}+a(x,y)\,u+b(x,y)\,v+c(x,y)\ \mathrm{Re}\ (u+vi)^n=0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+a(x,y)\,v-b(x,y)\,u+d(x,y)\ \mathrm{Im}\ (u+vi)^n=0 \end{cases}
$$

aufzufinden, und dieses System (15) ist nicht im Gleichungssystem (1) enthalten. Wenn man die zweite Gleichung in (15) mit i multipliziert und mit der ersten Gleichung addiert, so erhält man in komplexer Form die Gleichung

$$
(16)\qquad B(w)+f(x,y)\,w+g(x,y)\,w^n=0\,,
$$

welche an die Bernouillische Differentialgleichung erinnert.

I. Lösung der Gleichung (14). Setzt man in (14)

$$
w(x,y)=w_1(x,y)\,w_2(x,y)\,,
$$

so bekommt man mit Rücksicht auf die Gleichung (12)

$$
(17)\qquad w_1\,[B(w_2)+w_2\,f(x,y)]+w_2\,B(w_1)+g(x,y)=0\,.
$$

Bestimmt man die Funktion w_2 so dass

$$
(18)\qquad B(w_2)+w_2\,f(x,y)=0\,,
$$

so folgt aus (17)

$$
(19)\qquad w_2\,B(w_1)+g(x,y)=0\,,
$$

und aus (18) kann man, auf Grund der Eigenschaft (11), die Funktion w_2 bestimmen. Man muss nur in (11) den Ausdruck $f(w)$ durch $1/w$ ersetzen. Wegen

$$
\tilde{\mathfrak{f}}\,\frac{B(w_2)}{w_2}=\ln\, w_2+P_0(z)
$$

folgt

$$
w_2=P(z)\,\exp\,[-\tilde{\mathfrak{f}}\,f(x,y)]\,,
$$

wobei $P(z)$ eine willkürliche analytische Funktion ist. Wenn man dieses Ergebniss für w_2 in die Gleichung (19) einsetzt, so erhält man

$$
B(w_1)=-\frac{g(x,y)}{P(z)}\ \exp\ \tilde{\mathfrak{f}}\,f(x,y)\,,
$$

so dass

$$
w_1=-\frac{1}{P(z)}\,\tilde{\mathfrak{f}}\,\{g(x,y)\exp\,[\tilde{\mathfrak{f}}\,f(x,y)\}+P_1(z)
$$

ist, und dabei ist $P_1(z)$ eine willkürliche analytische Funktion. Aus all diesem ergiebt sich

$$
(20)\qquad w(x,y)=\{Q(z)-\tilde{\mathfrak{f}}\,g(x,y)\ \exp\ \tilde{\mathfrak{f}}\,f(x,y)\}\ \exp\,[-\tilde{\mathfrak{f}}\,f(x,y)]\,,
$$

und $Q(z)$ ist eine willkürliche analytische Funktion. Wie man sieht, bei der Bestimmung der Funktion w_2 muss die willkürliche analytische Funktion $P_0(z)$, die hier eine Rolle der Integrationskonstante spielt, nicht in Betracht kommen. Ebenso ersieht man dass die Lösung (20) der Differentialgleichung (14) entspricht der Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dx}+f(x)\,\omega+g(x)=0,$$

nähmlich

$$\omega=\left\{C-\int g\left(\exp\int f\,dx\right)dx\right\}\exp\left(-\int f\,dx\right),$$

nur steht anstatt des Integralzeichens das Operationssymbol aus (5).

II. Integration der Gleichung (16). Wenn man in die Gleichung (16)

$$w(x, y)=W^k(x, y)$$

setzt, so erhält sie, wegen

$$B[\varphi(W)]=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(W)=\varphi'(W)\left(\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}\right)=\varphi'(W)\,B(W),$$

folgende Form

$$kB(W)+f(x, y)\,W+g(x, y)\,W^{(n-1)k+1}=0,$$

so dass man, wenn k den Wert aus $(n-1)k+1=0$ erhält, eine lineare Gleichung vom Typus (14) bekommt.

Beispielsweise, nehmen wir das System

$$\text{(21)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{u}{x}+\dfrac{y^2}{x}(x^2-y^2)(u^2-v^2)-4y^3uv,\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{v}{x}+2y^3(u^2-v^2)+\dfrac{2y^2}{x}(x^2-y^2)uv.\end{cases}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit i, durch Addition mit der ersten erhält man die Gleichung

$$B(w)-\frac{w}{x}-\frac{y^2z^2}{x}w^2=0.$$

Setzt man $w=W^k$, so erhält man für die resultierende lineare Gleichung $k=-1$ und

$$B(W)+\frac{W}{x}+\frac{y^2z^2}{x}=0.$$

Da nach (8) und (9)

$$\mathfrak{f}\,\frac{1}{x}=\ln x,\quad \mathfrak{f}\left(\frac{y^2z^2}{x}\exp\ln x\right)=z^2\,\mathfrak{f}\,y^2=-\frac{iz^2y^3}{x}$$

ist, so bekommt man auf Grund (20)

$$W=\frac{1}{x}\left[Q(z)+\frac{iz^2y^3}{3}\right]$$

und

$$w = \frac{3\,x}{Q(z) + iz^2 y^3} = u + v\,i.$$

Daraus folgen die Grössen u und v als reguläre Lösungen der Gleichung (21):

$$u = 3\,x\,\frac{F(x, y) - 2\,xy^4}{(F - 2\,xy^4)^2 + (G + x^2 y^3 - y^5)^2},$$

$$v = -3\,x\,\frac{G(x, y) + x^2 y^3 - y^5}{(F - 2\,xy^4)^2 + (G + x^2 y^3 - y^5)^2},$$

wo $F(x, y)$ und $G(x, y)$ willkürliche Funktionen sind, die aber die Cauchy—Riemannschen Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x} \tag{22}$$

erfüllen müssen. Die Funktionen F und G sind nähmlich der reelle und imaginäre Teil der Funktion $Q(z)$, die, wie man sah, analytisch sein muss.

Aus diesem Beispiel ergiebt sich das charakteristische für eine reguläre Lösung: die willkürlichen Funktionen F und G die in den Ausdrücken für u und v erscheinen, sind nicht ganz unabhänging, sondern sie sind durch die Bedingungen (22) verbunden.

LITERATUR

[1] Векуа, И. Н.: *Сисшеми дифференциалных уравнений первого порядка эллипшического шипа и граничные задачи с применением к шеории оболочек.* Математический сборник 31. Москва 1952. Стр. 217—314.

[2] Pompeiu, D.: *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 33. 1912 p. 108—113 et T. 35. 1913, p. 277—281.

[3] Théodoresco N.: *La dérivée aréolaire.* Anales roumaines de mathématiques, Cah. 3, Bucarest 1936. p. 18—20.

[4] Fempl, S.: *Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije.* Matematički vesnik I (16) Beograd 1964. Str. 29—38. (Areolare Polynome als eine Klasse nichtanalytischer Funktionen deren reelle und imaginäre Teile polyharmonische Funktionen sind).

[5] Bilimovitch, A.: *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non-analytique par rapport à une fonction analytique.* Publications de l'Inst. mathematique T. VI. 1954. Belgrade. p. 17—26.