PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964 p. 109–114.

SUR LE PROBLÈME DE CAUCHY DES SYSTÈMES EN INVOLUTION DE DARBOUX DU TROISIÈME ORDRE

Borivoje Rachajsky

(Communiqué le 7. février 1964)

Il est bien connu, [1], que les équations aux dérivées partielles d'une fonction à deux variables indépendantes en involution de *Darboux* du troisième ordre admettent plusieurs propriétés qui sont analogues aux propriétés des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie*. Pour les équations en involution de *Darboux* du troisième ordre sont établies, par exemple, les propriétés suivantes: 1) on peut associer à ces équations un système de *Charpit* jouant le rôle d'un système des caractéristiques; 2) on peut étendre la notion de l'intégrale complète et préciser le rôle important de cette intégrale; 3) on peut résoudre le problème correspondant de *Jacobi*, c'est-à-dire obtenir les intégrales des caractéristiques par la différentiation de l'intégrale complète.

Notre but dans cet article est d'établir encore une nouvelle propriété pour les systèmes en involution de *Darboux* du troisième ordre.

Dans la Note, [2], en suivant l'idée de *Courant*, [3], nous avons fait une application d'un système correspondant de *Charpit* pour obtenir l'intégrale de *Cauchy* des systèmes de équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie*. Maintenant, nous allons traiter d'une manière analogue le problème de *Cauchy* concernant un système en involution de *Darboux* du troisème ordre.

Le problème initial pour le système de Charpit. Considérons un système des équations aux dérivées partielles en involution de *Darboux* du troisième ordre d'une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y

$$(1) \qquad r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0, \quad z_{xyy}+\Phi(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy})=0,$$

sous les conditions

$$\Phi_\delta^2 - f_s\,\Phi_\delta + f_t = 0,$$

$$D_x\,\Phi + (f_t/\Phi_\delta)\,D_y\,\Phi - D_{yy}f = 0,$$

avec: $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$, $r=\partial^2 z/\partial x^2$, $s=\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $t=\partial^2 z/\partial y^2$, $z_{xyy}=\partial^3 z/\partial x\,\partial y^2$, $\delta=z_{yyy}=\partial^3 z/\partial y^3$, $f_s=\partial f/\partial s$, $f_t=\partial f/\partial t$, $\Phi_\delta=\partial\Phi/\partial\delta$, quant à D_x, D_y, D_{yy}, elles désignent les dérivées partielles totales prises par rapport à x et y.

On peut associer, [1], au système (1) un système de *Charpit* de la forme suivante

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial z}{\partial y} = p + \Phi_\delta\, q, &\quad& \frac{\partial s}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial s}{\partial y} = \beta + \Phi_\delta\, \gamma,\\
&\frac{\partial p}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial p}{\partial y} = r + \Phi_\delta\, s, && \frac{\partial t}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial t}{\partial y} = \gamma + \Phi_\delta\, \delta,\\
&\frac{\partial q}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial q}{\partial y} = s + \Phi_\delta\, t, && \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial \gamma}{\partial y} + D_x \Phi = 0,\\
&\frac{\partial r}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial r}{\partial y} = \alpha + \Phi_\delta\, \beta, && \frac{\partial \delta}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial \delta}{\partial y} + D_y \Phi = 0,
\end{aligned}
$$

où l'on a $\alpha = z_{xxx}$, $\beta = z_{xxy}$, $\gamma = z_{xyy}$, avec les fonctions inconnues z, p, q, r, s, t, γ, δ de deux variables indépendantes x et y.

Nous supposons d'abord que les fonctions f et Φ soient telles qu'ils existent les intégrales premiè.es distinctes suivantes

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&f_i(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 7)\\
&f_8 = r + f(x, y, z, p, q, s, t)\\
&f_9 = \gamma + \Phi(x, y, z, p, q, s, t, \delta)
\end{aligned}
$$

sous la condition

$$
(3')\qquad \mathcal{D}\left(\frac{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7}{y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t,\ \delta}\right) \neq 0.
$$

On peut obtenir ces intégrales par l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$
dx = \frac{dy}{\Phi_\delta} = \frac{dz}{p + \Phi_\delta\, q} = \frac{dp}{r + \Phi_\delta\, s} = \frac{dq}{s + \Phi_\delta\, t} = \frac{dr}{\alpha + \Phi_\delta\, \beta} =
$$
$$
= \frac{ds}{\beta + \Phi_\delta\, \gamma} = \frac{dt}{\gamma + \Phi_\delta\, \delta} = -\frac{d\gamma}{D_x \Phi} = -\frac{d\delta}{D_y \Phi}.
$$

où α et β doivent être exprimés par les autres variables figurant dans les équations (1).

Grâce aux intégrales (3) l'intégrale générale du système de *Charpit* (2) est déterminée par les relations suivantes

$$
(4)\qquad f_{i+1} = \prod\nolimits_i (f_1), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8)
$$

$\prod_i$ étant des fonctions arbitraires.

Pour le système (2) on peut résoudre

Problème A. Déterminer les solutions

$$
(5)\qquad z(x, y),\ p(x, y),\ q(x, y),\ r(x, y),\ s(x, y),\ t(x, y),\ \gamma(x, y),\ \delta(x, y)
$$

du système Charpit (2) *contenant la courbe donnée non caractéristique*

$$
(C)\qquad x = x_0, \quad y = \tau, \quad z = z(\tau)
$$

de telle manière que l'on ait le long de la courbe (C) les conditions suivantes

$$r+f=0, \quad \gamma+\Phi=0,$$

(6) $$\begin{cases} dz=p\,dx+q\,dy, & dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy, \\ dr=\alpha\,dx+\beta\,dy, & ds=\beta\,dx+\gamma\,dy, \quad dt=\gamma\,dx+\delta\,dy, \end{cases}$$

et

(7) $$p=a, \quad s=b \quad pour \quad x=x_0, \quad y=y_0$$

où a et b sont des constantes données, mais $(x_0, y_0) \in C$.

Grâce aux conditions (C), (6), (7), on peut d'abord déterminer les valeurs initiales des variables $p, q, r, s, t, \gamma, \delta$, c'est-à-dire les fonctions suivantes

(8) $$p(\tau), \ q(\tau), \ r(\tau), \ s(\tau), \quad t(\tau), \ \gamma(\tau), \ \delta(\tau).$$

En vertu des conditions (6) on a pour $x=x_0$

$$z'(\tau)=q(\tau), \quad p'(\tau)=s(\tau), \quad q'(\tau)=t(\tau),$$

$$r'(\tau)=\beta(\tau), \quad s'(\tau)=\gamma(\tau), \quad t'(\tau)=\delta(\tau),$$

et aussi

(8') $$q(\tau)=z'(\tau), \quad t(\tau)=z''(\tau), \quad \delta(\tau)=z'''(\tau),$$

(8'') $$s(\tau)=p'(\tau), \quad \gamma(\tau)=p''(\tau).$$

Donc, la fonction $p(\tau)$ se détermine comme une solution de *Cauchy* de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

(9) $$p''(\tau)+\Phi[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), z'(\tau), p'(\tau), z''(\tau), z'''(\tau)]=0$$

satisfaisant aux conditions

(9') $$\tau=y_0, \ p(y_0)=a, \ s(y_0)=b,$$

où l'on suppose l'unicité de la solution du problème de *Cauchy* (9)—(9').

Grâce à la solution obtenue $p(\tau)$ du problème (9)—(9') on peut déterminer les fonctions $s(\tau)$ et $\gamma(\tau)$, (8''). Quant à la fonction $r(\tau)$, on a la relation suivante

$$r(\tau)+f[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), z'(\tau), p'(\tau), q'(\tau)]=0.$$

En utilisant les fonctions déterminées (8), on peut définir les fonctions nouvelles $\lambda_i(\tau)$ et les paramètres auxiliaires u_i par les relations suivantes

$$\lambda_i(\tau)=f_i[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), q(\tau), r(\tau), s(\tau), t(\tau), \gamma(\tau)],$$

(10) $$\lambda_i(\tau)=u_i, \quad (i=1, 2, \ldots, 9).$$

En éliminant le paramètre τ entre les relations (10), on obtient les relations bien déterminées des paramètres u_i

$$u_{i+1}=\pi_i(u_1), \quad (i=1, 2, \ldots, 8).$$

Les fonctions arbitraires $\prod_i$ dans l'intégrale générale (4) doivent avoir les formes π_i. Donc, sous les conditions (C), (6) et (7) les solutions (5) du problème initial pour le système de *Charpit* (2) sont déterminées par les formules

(6') $$f_{i+1}=\pi_i(f_1), \quad (i=1, 2, \ldots, 8).$$

Alors, le procédé indiqué résoud *le problème A*.

Le problème [illegible]al pour le système en involution. Pour le système (1) en involution de *Darboux* du troisième ordre on peut résoudre

Problème B. Les solutions (5) *du système de Charpit* (2) *déterminent l'intégrale de Cauchy du système en involution de Darboux* (1) *sous les conditions* (*C*) *et* (7).

Pour cela, il suffit de démontrer que les fonctions (5) remplissent identiquement sur la surface $z=z(x,y)$ les conditions suivantes

$$r(x,y)+f[x,y,z(x,y),\ p(x,y),\ q(x,y),\ s(x,y),\ t(x,y)]\equiv 0,$$

$$\gamma(x,y)+\Phi[x,y,z(x,y),\ p(x,y),\ q(x,y),\ s(x,y),\ t(x,y),\ \delta(x,y)]\equiv 0,$$

$$p(x,y)-\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\equiv 0,\quad q(x,y)-\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\equiv 0,$$

$$r(x,y)-\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\equiv 0,\quad s(x,y)-\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\equiv s(x,y)-\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\equiv 0,$$

$$t(x,y)-\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\equiv 0,\quad \gamma(x,y)-\frac{\partial s(x,y)}{\partial y}\equiv \gamma(x,y)-\frac{\partial t(x,y)}{\partial x}\equiv 0,$$

$$\delta(x,y)-\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}\equiv 0.$$

La démonstration du *problème B* se peut achever d'une manière analogue comme dans le cas du système en involution de *Darboux-Lie*, [2], mais cette fois à l'aide du système de *Charpit* (2).

Exemple. Considérons le système

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} &r-t-\frac{4}{x}p=0,\\ &\gamma+\delta+\frac{3}{x}s+\frac{1}{x}t+\frac{3}{x^2}p-\frac{1}{4}x^2(x+y)=0 \end{aligned}$$

en involution du troisième ordre (pour obtenir la seconde équation du trosième ordre en sachant la première équation du second ordre, voir le procédé [4]) et cherchons l'intégrale de *Cauchy* sous les conditions

$$(C)\qquad x=1,\quad y=\tau,\quad z=\frac{1}{3}\tau^3,$$

$$(11')\qquad p=0,\quad s=-\frac{7}{12},\quad \text{pour}\quad x_0=1,\quad y_0=0$$

Dans ce cas les intégrales (3) sont

$$f_1\equiv x-y,$$

$$f_2\equiv r+2s+t-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3y,$$

$$f_3\equiv p+q-xr-2xs-xt+\frac{3}{20}x^5+\frac{1}{4}x^4y,$$

$$f_4 \equiv z - x(p+q) + \frac{1}{2}x^2(r+2s+t) - \frac{1}{15}x^6 - \frac{1}{10}x^5 y,$$

$$f_5 \equiv \frac{1}{x^2}t + \frac{3}{x^3}p - \frac{1}{4}xy,$$

$$f_6 \equiv \frac{1}{4}y - \frac{3}{x^4}p - \frac{1}{x^3}t - \frac{1}{x^2}\gamma,$$

$$f_7 \equiv \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{4}x^4 y - p - \frac{1}{2}x(r+2s+t)\right],$$

$$f_8 \equiv r - t - \frac{4}{x}p$$

$$f_9 \equiv \gamma + \delta + \frac{3}{x}s + \frac{1}{x}t + \frac{3}{x^2}p - \frac{1}{4}x^2(x+y)$$

et les fonctions (8) sont déterminées par les formules

$$p(\tau) = -\frac{7}{12}\tau, \quad q(\tau) = \tau^2, \quad r(\tau) = -\frac{1}{3}\tau, \quad s(\tau) = -\frac{7}{12}, \quad t(\tau) = 2\tau$$

$$\gamma(\tau) = 0, \quad \delta(\tau) = 2$$

Les solutions du *problème A* s'obtiennent sous la forme

$$r + 2s + t - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 y = -\frac{4}{3}(x-y),$$

$$p + q - x(r+2s+t) + \frac{3}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 y = (x-y)^2 + \frac{19}{20},$$

$$z - x(p+q) + \frac{1}{2}x^2(r+2s+t) - \frac{1}{15}x^6 - \frac{1}{10}x^5 y = -\frac{1}{3}(x-y)^3 - \frac{19}{60}(x-y),$$

$$\frac{1}{4}y - \frac{3}{x^4}y - \frac{1}{x^3}t - \frac{1}{x^2}\gamma = 0,$$

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{4}x^4 y - p - \frac{1}{2}x(r+2s+t)\right] = \frac{2}{3},$$

$$r - t - \frac{4}{x}p = 0,$$

$$\gamma + \delta + \frac{3}{x}s + \frac{1}{x}t + \frac{3}{x^2}p - \frac{1}{4}x^2(x+y) = 0,$$

ou

$$z(x, y) = \frac{1}{60}x^5 y - \frac{1}{3}x^2 y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{19}{60}y,$$

$$p(x, y) = \frac{1}{12}x^4 y - \frac{2}{3}xy,$$

$$q(x, y) = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{19}{60},$$

$$r(x, y) = \frac{1}{3} x^3 y - \frac{2}{3} y, \qquad s(x, y) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3} x,$$

$$t(x, y) = 2y, \qquad \gamma(x, y) = 0, \quad \delta(x, y) = 2$$

et la surface $z = z(x, y)$ est la solution du système (11), (C), (11').

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Rachajsky: *Sur l'involution de Darboux du trosième ordre*, Publications de l'Institut mathématique t. 1 (15), 1961;

[2] B. Rachajsky: *Sur une méthode pour obtenir l'intégrale de Cauchy des systèmes en involution de Darboux-Lie*, C. R. Acad. Sc, Paris, t. 257, p. 2792—2794, 1963; J Math. pures et appl. (sous presse);

[3] R. Courant: *Partial differential equations;* R. Courant et D. Hilbert: Methods of mathematical physics, II, 1962;

[4] A. R. Forsyth: *Theory of differential equations*, part IV, vol. VI, p. 359, Dover Publ., 1959.