

ÜBERTRAGUNG DER GÖRTLERSCHEN METHODE AUF DIE BERECHNUNG VON GRENZSCHICHTEN AN ROTATIONSKÖRPERN MIT PORÖSEN WÄNDEN

Mane Šašić

(Vorgelegt am 21 Januar 1964)

1. Einleitung

Die, an einem angeströmten Körper unter bestimmten Bedingungen auftretende Grenzschichtablösung kann man, unter anderen in der Praxis entwickelten Verfahren, auch durch Absaugung, der stark verzögerten Teile der Grenzschicht in einem Druckanstiegsgebiet, vermeiden. Aus zahlreichen experimentellen Untersuchungen folgt, daß das Verhältnis von kontinuierlicher, längs der Körperwand verteilten, Absaugeschwindigkeit $v_0(x)$ zur äußeren Potentialgeschwindigkeit $U(x)$, das einen dimensionslosen Mengenbeiwert

$$C_Q = \frac{v_0(x)}{U(x)}$$

bestimmt, von der Größenordnung 10^{-4} – 10^{-2} ist. Das heißt aber, daß man $C_Q \ll 1$ annehmen darf. Görtler [4] hat gezeigt, daß im Falle der ebenen Grenzschichten, obige Bedingung für die beliebige Verteilung von $U(x)$ erfüllt wird, wenn die Absaugefunktion $v_0(x)$ die folgende Form

$$v_0(x) = x^{\frac{1}{2}(m-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k x^{k(m-1)}, \quad m = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}$$

besitzt. An Hand der von Saljnikov [3] gewonnenen Resultaten wird in dieser Arbeit gezeigt, daß man die Görtlersche Methode auch auf den Fall Berechnung von laminaren stationären und inkompressiblen Grenzschichten an Rotationskörpern mit porösen Wänden übertragen kann, wenn die Bedingung

$$\frac{v_0(x)}{U(x)} \frac{L}{r(x)} \ll 1$$

erfüllt wird. Aus der in der Arbeit bestimmten allgemeinen Funktion $v_0(x)$ erhält man die entsprechenden speziellen Verteilungen für von Saljnikov abgeordneten Klassen von Rotationskörpern. Im Anhang dieser Arbeit sind die ersten vier Koeffizienten, aller für die Grenzschichtberechnung notwendigen in Reihenform dargestellten Funktionen, angegeben. Außerdem kann man dort die zur Bestimmung der entsprechenden universellen Funktionen dienenden und in der Arbeit [4] fehlenden Differentialgleichungen finden.

2. Transformation der Grenzschichtgleichungen

Die Differentialgleichungen für die stationären, inkompressiblen und laminaren Grenzschichten an Rotationskörpern, deren Achse mit der Strömungsrichtung zusammenfällt (Abb. 1), hat Boltze in der folgenden Form:

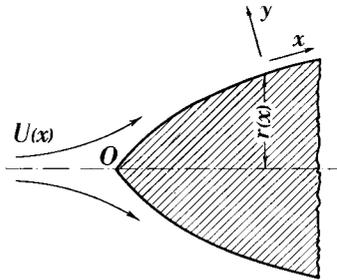


Abb. 1

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x) U'(x) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} = 0$$

aufgestellt, unter Bedingung, daß $\delta(x) \ll r(x)$ ist. Dabei bedeutet $\delta(x)$ die Grenzschichtdicke. Im Koordinatensystem (Abb. 1) stellen u bzw. v aus (1) die Geschwindigkeitskomponenten in x bzw. y Richtung dar. $U(x)$ ist die gegebene Geschwindigkeitsverteilung der äußeren Potentialströmung, ν — die konstante kinematische Zähigkeit und $r(x)$ — der Querschnittsradius.

Für den Fall der Rotationskörper mit porösen Konturen, die dem System (1) zugehörigen Randbedingungen lauten

$$(2) \quad u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = v_0(x) \quad y = 0$$

$$u(x, y) \rightarrow U(x) \quad y \rightarrow \infty$$

wobei $v_0(x) > 0$ die dem Flüssigkeitseinblasen in die Grenzschicht und $v_0(x) < 0$ die dem Absaugen aus der Grenzschicht entsprechende stetige Funktion bedeuten.

Wenn man die Stromfunktion $\psi(x, y)$ durch die Ausdrücke

$$(3) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial x}$$

in System (1) einführt, lautet die erste Gleichung

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{r'}{r} \psi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U(x) U'(x) + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

während die Kontinuitätsgleichung identisch befriedigt wird. Die Randbedingungen für $\psi(x, y)$ haben folgende Form:

$$(5) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{r'}{r} \psi \right) = v_0(x) \quad y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x) \quad y \rightarrow \infty$$

Saljnikov [3] hat, mit Hilfe der neuen Veränderlichen des axialsymmetrischen Problems

$$(6) \quad \xi = \frac{1}{\nu L^2} \int_0^x U(x) r^2(x) dx, \quad \eta = \frac{U(x) r(x) y}{\nu L \sqrt{2\xi}}$$

und vermittelt der Stromfunktion in der Form

$$(7) \quad F(\xi, \eta) = \frac{r(x) \psi(x, y)}{L \sqrt{2\xi}}$$

die Differentialgleichung (4) auf die von Görtler [2] aufgestellte Gleichung des ebenen Problems

$$(8) \quad F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_{\eta}^2) = 2\xi(F_{\eta}F_{\xi\eta} - F_{\xi}F_{\eta\eta})$$

mit

$$(9) \quad \beta(\xi) = \frac{2U'(x) \int_0^x U(x) r^2(x) dx}{U^2(x) r^2(x)}$$

zurückgeführt. Dabei bezeichnen die Indices ξ , η partielle Ableitungen der Funktion (7) nach den Veränderlichen (6). Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$(10) \quad F_{\eta}(\xi, 0) = 0, \quad F(\xi, 0) + 2\xi F_{\xi}(\xi, 0) = \gamma(\xi)$$

$$F_{\eta}(\xi, \infty) = 1$$

wobei

$$(11) \quad \gamma(\xi) = -\frac{v_0(x)}{U(x)} \frac{L}{r(x)} \sqrt{2\xi} = -\frac{v_0(x)}{U(x)} \frac{L}{r(x)} \sqrt{\frac{2}{vL^2} \int_0^x U(x) r^2(x) dx}.$$

Dimensionslose Funktion $\gamma(\xi)$ ist durch die vorgegebenen Funktionen $v_0(x)$, $r(x)$ und $U(x)$ für jedes konkrete Problem bestimmt.

3. Formbestimmung der Funktion $v_0(x)$

Um die von Görtler [2] entwickelte Reihenmethode auf die Berechnung der laminaren Grenzschicht an Rotationskörpern mit porösen Konturen übertragen zu können, muß die Bedingung

$$(12) \quad \frac{|v_0(x)|}{U(x)} \frac{L}{r(x)} \ll 1$$

für jede $x \geq 0$ befriedigt werden. Nur in diesem Falle verhält sich, nämlich, die Funktion $\gamma(\xi)$ für $\xi \rightarrow 0$, wie

$$(13) \quad \gamma(\xi) = 0(\sqrt{\xi})$$

was die notwendige und hinreichende Voraussetzung für $\gamma \equiv 0$ darstellt. Da in einem konkreten Problem die Größen $U(x)$, L und $r(x)$ vorgegeben sind, soll die Bedingung (12) durch die Form der Funktion $v_0(x)$ gesichert werden.

Saljnikov [3] hat gezeigt, daß der allgemeinen Form der „Hauptfunktion“

$$(14) \quad \beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kn} \xi^{kn}$$

die folgenden Verteilungen der äusseren Potentialgeschwindigkeiten

$$(15) \quad U(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} u_{kn} x^{ks}$$

und der Querschnittsradien

$$(16) \quad r(x) = x^q \sum_{k=0}^{\infty} r_{kn} x^{ks}$$

entsprechen, mit den Beziehungen

$$(17) \quad p = (2q + 1) \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}, \quad s = n(p + 2q + 1)$$

Berücksichtigt man die Funktionenform (14), (15), (16) für $\beta(\xi)$, $U(x)$ und $r(x)$ und die Randbedingungen (10), so ist es zweckmässig die Funktion $\gamma(\xi)$ in folgender Reihenform

$$(18) \quad \gamma(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (2kn + 1) \gamma_{kn} \xi^{kn}$$

darzustellen. Wenn man die Ausdrücke (15), (16) für $U(x)$ und $r(x)$ in die Veränderliche (6) einsetzt, so erhält man

$$(19) \quad \xi = \frac{\sqrt[n]{x^s}}{\nu L^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\frac{s}{n}(kn + 1)} x^{ks}$$

Die Koeffizienten a_{kn} werden im Anhang angegeben. Nun, mit (19) folgt aus (18) die Funktion $\gamma(x)$ in folgender Reihenform

$$(20) \quad \gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} x^{ks}$$

wobei man die Koeffizienten c_{kn} für einen bestimmten Wert des Parameters n , aus der Identität

$$(21) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2kn + 1) \gamma_{kn} \left[\frac{\sqrt[n]{x^s}}{\nu L^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\frac{s}{n}(kn + 1)} x^{ks} \right]^{kn} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} x^{ks}$$

berechnet.

Aus der Gleichung (11), nach Einsetzen der Reihen (15), (16), (20) für $U(x)$, $r(x)$ und $\gamma(x)$, folgt der allgemeine Ausdruck für die Funktion $v_0(x)$

$$(22) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu x^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{kn} x^{ks}$$

mit den Koeffizienten σ_{kn} , die aus der Identität

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} x^{ks} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn} x^{ks} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{kn} x^{ks} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{kn} x^{ks}$$

berechnet werden können.

In nächsten Abschnitten wird die Funktion $v_0(x)$ für beide bei Saljnikov [3] abgesonderten Klassen von Rotationskörpern bestimmt.

4. Funktion $v_0(x)$ bei vollen Rotationskörpern

$$\left(q = 1, \quad n = \frac{1}{2} \right).$$

In diesem Abschnitt betrachtet man einen für die Praxis interessanten Fall der vollen Rotationskörper mit vorderem Staupunkt bzw. $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Abb. 2),

wobei nach Mangler-Leuteritz (Saljnikov [3]) $p=1$ ist. Aus den Beziehungen (17) folgen dann die Werte $\beta_0 = \frac{1}{2}$ und $s=2$, mit denen die Verteilungen (15), (16) und (22) für diesen Fall lauten

$$(24) \quad U(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2} x^{2k}$$

$$(25) \quad r(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^{2k}$$

$$(26) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k x^{2k}$$

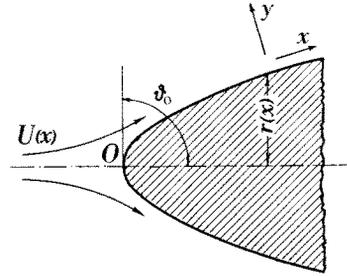


Abb. 2

Die aus der Identität (23) durch Koeffizientenvergleich bestimmten ersten zwei Koeffizienten sehen dabei folgendermaßen aus:

$$(27) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= 2 \sqrt{u_0} \gamma_0 \\ \sigma_{\frac{1}{2}} &= 2 \sqrt{u_0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{r_{1/2}}{r_0} + 2 \frac{u_{1/2}}{u_0} \right) \gamma_0 + \frac{r_0}{L} \sqrt{\frac{u_0}{\nu}} \gamma_{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Da aus den Reihen (24), (25) und (26) für $x \rightarrow 0$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} v_0(x) = \sigma_0$$

folgen, kann man leicht schließen, daß die Bedingung (12) nur dann erfüllt wird, wenn σ_0 und $\sigma_{\frac{1}{2}}$ verschwinden, bzw., da $u_0 \neq 0$ und $r_0 \neq 0$ sind, wenn $\gamma_0 \equiv 0$ und $\gamma_{\frac{1}{2}} \equiv 0$ werden (s. die Formeln 27). Dies bedeutet aber, daß die Funktion $v_0(x)$, bei solchen vollen Rotationskörpern die folgende Form

$$(28) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu (\sigma_1 x^4 + \sigma_3 x^6 + \sigma_5 x^8 + \dots)$$

annehmen muß.

5. Funktion $v_0(x)$ bei ringförmigen Rotationskörpern

$$(q=0, \quad s=1).$$

Hier betrachtet man zwei Spezialfälle der ringförmigen Rotationskörper.

Den Fall A, mit dem Öffnungswinkel der Konturspitze $\vartheta_0=0$ ($\beta_0=0$) (Abb. 3). Bei dieser Klasse ringförmiger Rotationskörper erhält man aus den Beziehungen (17) die Parameterwerte $p=0$ und $n=1$, mit denen die Verteilungen (15), (16) und (22) wie folgt lauten

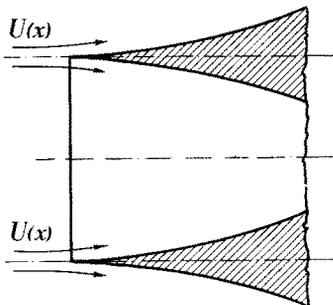


Abb. 3

$$(29) \quad U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$$

$$(30) \quad r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$$

$$(31) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{\nu}{2x}} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k x^k$$

wobei die nach der Identität (23) bestimmten ersten zwei Koeffizienten folgende Form:

$$(32) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{u_0} \gamma_0 \\ \sigma_1 &= \sqrt{u_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_0} + \frac{3}{2} \frac{u_1}{u_0} \right) \gamma_0 + \frac{3 u_0 r_0^2}{\nu L^2} \gamma_1 \right] \end{aligned}$$

besitzen.

Da man aus den Reihen (29), (30) und (31) für $x \rightarrow 0$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) = u_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = r_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} v_0(x) = \infty$$

erhält, ist es leicht zu schließen, daß die Bedingung (12) nur in dem Falle befriedigt wird, wenn σ_0 verschwindet, bzw., da $u_0 \neq 0$ ist, wenn $\gamma_0 \equiv 0$ wird. Die Funktion $v_0(x)$, für den Fall A, lautet also:

$$(33) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu x (\sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \dots).$$

Den Fall B, mit runder Nase des Profils d. h. mit $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ($\beta_0 = 1$)

(Abb. 4). In diesem Falle aus (17) folgt $p = 1$ und $n = \frac{1}{2}$. Mit diesen Parameterwerten lauten die Reihen (15), (16) und (22)

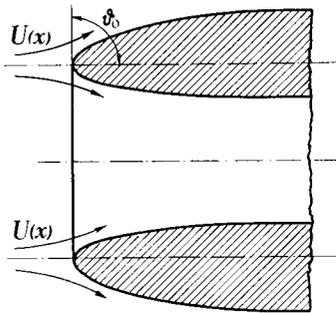


Abb. 4

$$(34) \quad U(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2} x^k$$

$$(35) \quad r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{2} x^k$$

$$(36) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2} x^k$$

wobei die aus der Identität (32) bestimmten ersten zwei Koeffizienten folgende Gestalt

$$(37) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{2 u_0} \gamma_0 \\ \sigma_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{2 u_0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{r_1}{r_0} + 2 \frac{u_1}{u_0} \right) \gamma_0 + \frac{r_0}{L} \sqrt{\frac{2 u_0}{\nu}} \gamma_{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

haben.

Da aus den Reihen (34), (35) und (36) für $x \rightarrow 0$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = r_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} v_0(x) = \sigma_0$$

folgen, schließt man leicht, daß die Bedingung (12) nur dann erfüllt wird, wenn σ_0 und $\sigma_{\frac{1}{2}}$ verschwinden, bzw., wenn $\gamma_0 \equiv 0$ und $\gamma_{\frac{1}{2}} \equiv 0$ sind. Die Funktion $v_0(x)$ muß daher für den Fall B die folgende Form

$$(38) \quad v_0(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu (\sigma_1 x^2 + \sigma_{\frac{3}{2}} x^3 + \sigma_2 x^4 + \dots)$$

annehmen.

6. Lösung der transformierten Grenzschiehtgleichung.

Mit den, für ein bestimmtes Problem der Berechnung der Grenzschieht an den Rotationskörpern mit porösen Wänden vorgegeben, Verteilungen $U(x)$, $r(x)$ und $v_0(x)$, können die Koeffizienten β_{kn} und γ_{kn} , aus den Ausdrücken (9), (11) mit Hilfe von Reihen (14), (18) bestimmt werden.

Nun kann die Lösung der transformierten Grenzschiehtgleichung (8) mit entsprechenden Randbedingungen (10) in Form der von Görtler [2] eingeführten Reihe

$$(39) \quad F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{kn}(\eta) \xi^{kn}$$

dargestellt werden.

Nach Einsetzen der Reihe (39) in die Gleichung (8) und darauffolgendem Koeffizientenvergleich der Potenzen ξ , erhält man das rekursiv lösbare System der gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Koeffizientenfunktionen $F_{kn}(\eta)$

$$(40) \quad \begin{aligned} F_0''' + F_0 F_0'' + \beta_0 (1 - F_0'^2) &= 0 \\ F_{kn}''' + F_0 F_{kn}'' - (2kn + 2\beta_0) F_0' F_{kn}' + (2kn + 1) F_0' F_{kn}' &= R_{(k-1)n} \\ &\left(k = 1, 2, 3, \dots; \quad n = \frac{1}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R_{(k-1)n} = \beta_{kn} (F_0'^2 - 1) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} \beta_{jn} F_{in}' F_{(k-i-j)n}' + F_0' \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{jn} F_{(k-j)n}' + \\ + \sum_{j=1}^{k-1} (\beta_0 + 2kn - j) F_{jn}' F_{(k-j)n}' - \sum_{j=1}^{k-1} (j+1) F_{jn} F_{(k-j)n}'' \end{aligned}$$

und entsprechenden Randbedingungen

$$(41) \quad \begin{aligned} F_0(0) = 0, \quad F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) = 1 \\ F_{kn}(0) = \gamma_{kn}, \quad F_{kn}'(0) = 0, \quad F_{kn}'(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Die erste nichtlineare Gleichung des Systems (40) soll für jedes mit dem Koeffizienten β_0 definierte Problem von neuem gelöst werden. Die Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen lassen sich, aber, als lineare Kombinationen universeller Funktionen darstellen, die ein für allemal für feste β_0 vertafelt werden können.

Betrachtet man nun, die in Abschnitten 4 und 5 untersuchten Klassen der Rotationskörper so stellt man zunächst fest, daß für die ringförmigen Rotationskörper — Fall A ($n=1$) die zur Bestimmung der universellen Funktionen dienenden Differentialgleichungen mit entsprechenden Randbedingungen, mit dem für ebenen Fall— $\beta_0=0$ ($m=0$) von Görtler [4] gewonnenen Differentialgleichungssystem übereinstimmen. Da für die Grenzschiehtberechnung in anderen zwei Fällen: bei vollen Rotationskörpern mit vorderem Staupunkt und ringförmigen Rotationskörpern — Fall B, die universellen Funktionen mit halbzahligen Indices benötigt werden, sollen die zur Bestimmung dieser Funktionen dienenden und der Arbeit [4] nicht vorhandenen Differentialgleichungen aus dem allgemeinen System (40), (41) für $n = \frac{1}{2}$ abgeleitet werden.

Mit Hilfe des Operators L_{kn} , kann man die linke Seite der zweiten Gleichung (40), für $n = \frac{1}{2}$ und z. B. $k = 1$ folgendermaßen schreiben

$$L_{\frac{1}{2}} [F_{\frac{1}{2}}] = F_{\frac{1}{2}}''' + F_0 F_{\frac{1}{2}}'' - (1 + 2\beta_0) F_0' F_{\frac{1}{2}}' + 2 F_0'' F_{\frac{1}{2}}$$

so daß die Gleichung selbst lautet

$$(42) \quad L_{\frac{1}{2}} [F_{\frac{1}{2}}] = \beta_1 (F_0'^2 - 1).$$

Die Lösung der Gleichung (42) wird in Form folgender linearen Kombination

$$(43) \quad F_{\frac{1}{2}} = \beta_1 \frac{f_1}{2} + \gamma_1 \frac{g_1}{2}$$

der universellen Funktionen $f_{\frac{1}{2}}(\gamma)$ und $g_{\frac{1}{2}}(\gamma)$ dargestellt, wobei β_1 und γ_1 die aus den Gleichungen (9), (11) berechneten Koeffizienten der Reihen (14), (18) bedeuten.

Führt man den Ansatz (43) in die Gleichung (42) ein, so erhält man

$$(44) \quad \beta_1 L_{\frac{1}{2}} [f_{\frac{1}{2}}] + \gamma_1 L_{\frac{1}{2}} [g_{\frac{1}{2}}] = \beta_1 (F_0'^2 - 1)$$

woraus

$$(45) \quad L_{\frac{1}{2}} [f_{\frac{1}{2}}] = F_0'^2 - 1, \quad L_{\frac{1}{2}} [g_{\frac{1}{2}}] = 0$$

folgt. Die entsprechenden Randbedingungen lauten dabei

$$(46) \quad \begin{aligned} f_{\frac{1}{2}}(0) = 0, \quad f_{\frac{1}{2}}'(0) = 0, \quad f_{\frac{1}{2}}'(\infty) = 0 \\ g_{\frac{1}{2}}(0) = 1, \quad g_{\frac{1}{2}}'(0) = 0, \quad g_{\frac{1}{2}}'(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Im Anhang der Arbeit sind die linearen Kombinationen und die zur Bestimmung der entsprechenden universellen Funktionen dienenden Differentialgleichungen, für die ersten vier Glieder der Reihe (39) angegeben. Da die universellen Funktionen $f \dots$ mit entsprechenden gleichbezeichneten Funktionen der Fälle ohne Absaugung übereinstimmen, kann man sie bei der Grenzschieb-berechnung aus den für $\beta_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ (Görtler [6]) und $\beta_0 = \frac{1}{2}$ (Helke [7]) vertafelten Zahlentabellen entnehmen.

Die anderen, die Absaugung berücksichtigenden universellen Funktionen vom Typus $g \dots$, $h \dots$, sollen erst aus der abgeleiteten Differentialgleichungen für verschiedene Werte von β_0 auf einer Rechenanlage berechnet und vertafelt werden. Dabei hat sich die für die einzelnen Koeffizientenfunktionen F_{kn} benötigte Zahl der universellen Funktionen im Falle der Rotationskörper mit Absaugung, im Vergleich mit ebensolchem ebenen Fall, (s. die Arbeit [4]), nicht vergrößert.

Aus dieser Arbeit folgt also, daß die von Görtler [2] entwickelte Reihenmethode auch auf den Fall der Grenzschieb-berechnung an Rotationskörpern mit porösen Wänden übertragen werden kann, wobei alle ihre wohlbekanntesten Vorteile erhalten bleiben.

SCHRIFTTUM

- [1] Schlichting, H. *Grenzsicht-Theorie*, Karlsruhe 1951.
- [2] Görtler, H. *A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows*. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 6, № 1, January 1957.
- [3] Saljnikov, V. *Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern*, DVL-Bericht Nr. 133, Oktober 1960.
- [4] Görtler, H. *On the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows Continuous Suction*. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 6, № 3 May 1957.
- [5] Šasić, M. *Gertlerova metoda za proračun laminarnog stacionarnog graničnog sloja i njeno prenošenje na osnosimetrični slučaj na obrtnim telima sa poroznom konturom*. Magistarska disertacija, juni 1963, Beograd.
- [6] Görtler, H. *Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten*. DVL-Bericht Nr. 34, Dezember 1957.
- [7] Helke, G. *Zahlentafeln universeller Funktionen zur Berechnung rotatiossymmetrischer laminarer Grenzschichten*. DVL-Bericht Nr. 135, September 1960.

Anhang

1. Die allgemeinen Koeffizienten a_{kn} , b_{kn} , d_{kn}

$$a_0 = u_0 r_0^2$$

$$a_n = u_n r_0^2 + 2 u_0 r_0 r_n$$

$$a_{2n} = u_{2n} r_0^2 + 2 u_n r_0 r_n + (2 r_0 r_{2n} + r_n^2) u_0$$

$$a_{3n} = u_{3n} r_0^2 + 2 u_{2n} r_0 r_n + (2 r_0 r_{2n} + r_n^2) u_n + (2 r_0 r_{3n} + 2 r_n r_{2n}) u_0$$

$$b_0 = u_0 r_0$$

$$b_n = u_0 r_n + u_n r_0$$

$$b_{2n} = u_0 r_{2n} + u_n r_n + u_{2n} r_0$$

$$b_{3n} = u_0 r_{3n} + u_n r_{2n} + u_{2n} r_n + u_{3n} r_0$$

$$d_0 = \sqrt{\frac{n}{s a_0}} a_0$$

$$d_n = \sqrt{\frac{n}{s a_0}} \frac{1}{2} \frac{a_n}{n+1}$$

$$d_{2n} = \sqrt{\frac{n}{s a_0}} \frac{1}{2} \left[\frac{a_{2n}}{2n+1} - \frac{1}{4} \frac{a_n^2}{a_0 (n+1)^2} \right]$$

$$d_{3n} = \sqrt{\frac{n}{s a_0}} \frac{1}{2} \left[\frac{a_{3n}}{3n+1} - \frac{1}{2} \frac{a_n a_{2n}}{a_0 (n+1) (2n+1)} + \frac{1}{8} \frac{a_n^3}{a_0^2 (n+1)^3} \right]$$

2. Koeffizienten c_{kn} , σ_{kn} , γ_{kn} für die vollen Rotationskörper.

$$c_0 = \Gamma_0 \quad \Gamma_{\frac{k}{2}} = \frac{(k+1) \gamma_{k/2}}{\sqrt{2^k \nu^k L^{2k}}}; \quad k = 0, 1, 3, \dots$$

$$c_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a_0}{2}} \frac{a_{1/2}}{a_0} \Gamma_{1/2} + \frac{1}{2} a_0 \Gamma_1$$

$$c_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_0}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{9} \frac{a_{1/2}^2}{a_0^2} \right) \Gamma_{1/2} + \frac{1}{3} a_{1/2} \Gamma_1 + \frac{1}{2} a_0 \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{3/2}$$

$$\sigma_0 = \frac{b_0}{d_0} \Gamma_0$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{b_0}{d_0} \left[\left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) \Gamma_0 + \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{1/2} \right]$$

$$\sigma_1 = \frac{b_0}{d_0} \left\{ \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_1}{d_0} \right] \Gamma_0 + \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_0 \Gamma_1 \right\}$$

$$\sigma_{\frac{3}{2}} = \frac{b_0}{d_0} \left\langle \left\{ \frac{b_{3/2}}{b_0} - \frac{d_{3/2}}{d_0} \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_1}{d_0} \right] - \frac{d_1}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_{3/2}}{d_0} \right\} \Gamma_0 + \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_{1/2}}{d_0} + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{9} \frac{a_{1/2}^2}{a_0^2} \right) \right] \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} \right] a_0 \Gamma_1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{3/2} \right\rangle$$

$$\gamma_0 = 0$$

$$\gamma_{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{4}{3} \frac{\nu L^2 d_0}{a_0 b_0} \sigma_1$$

$$\gamma_{3/2} = \sqrt{\frac{4 \nu^3 L^6 d_0}{a_0^3 b_0}} \left\{ \sigma_{3/2} - 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} \right] \sigma_1 \right\}$$

3. Koeffizienten c_{kn} , σ_{kn} , γ_{kn} für die ringförmigen Rotationskörper.

Fall A

$$c_0 = \Gamma_0 \qquad \Gamma_k = \frac{(2k+1)\gamma_k}{\nu^k L^{2k}}; \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$c_1 = a_0 \Gamma_1$$

$$c_2 = \frac{1}{2} a_1 \Gamma_1 + a_0^2 \Gamma_2$$

$$c_3 = \frac{1}{3} a_2 \Gamma_1 + a_0 a_1 \Gamma_2 + a_0^3 \Gamma_3$$

$$\sigma_0 = \frac{b_0}{d_0} \Gamma_0$$

$$\sigma_1 = \frac{b_0}{d_0} \left[\left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) \Gamma_0 + a_0 \Gamma_1 \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{b_0}{d_0} \left\{ \left[\frac{b_2}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) - \frac{d_2}{d_0} \right] \Gamma_0 + \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) a_0 \Gamma_1 + a_0^2 \Gamma_2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = \frac{b_0}{d_0} & \left\{ \left(\frac{b_3}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \left[\frac{b_2}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) - \frac{d_2}{d_0} \right] - \frac{d_2}{d_0} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) - \frac{d_3}{d_0} \right) \Gamma_0 + \right. \\ & + \left[\frac{b_2}{b_0} + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} \frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) - \frac{d_2}{d_0} \right] a_0 \Gamma_1 + \\ & \left. + \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) a_0^2 \Gamma_2 + a_0^3 \Gamma_3 \right\} \end{aligned}$$

$$\gamma_0 = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{\nu L^2}{3 a_0} \frac{d_0}{b_0} \sigma_1$$

$$\gamma_2 = \frac{\nu^2 L^4}{5 a_0^2} \frac{d_0}{b_0} \left[\sigma_2 - \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) \sigma_1 \right]$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = \frac{\nu^3 L^6}{7 a_0^3} \frac{d_0}{b_0} & \left\{ \sigma_3 - \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) \sigma_2 + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} \right) - \left(\frac{b_2}{b_0} + \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} \frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_0} - \frac{d_2}{d_0} \right) \right] \sigma_1 \right\} \end{aligned}$$

Fall B

$$c_0 = \Gamma_0$$

$$c_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a_0}{2}} \frac{a_{1/2}}{a_0} \Gamma_{1/2} + \frac{1}{2} a_0 \Gamma_1$$

$$c_{3/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_0}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{9} \frac{a_{1/2}^2}{a_0^2} \right) \Gamma_{1/2} + \frac{1}{3} a_{1/2} \Gamma_1 + \frac{1}{2} a_0 \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{3/2}$$

$$\sigma_0 = \frac{b_0}{d_0} \Gamma_0$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{b_0}{d_0} \left[\left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) \Gamma_0 + \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{1/2} \right]$$

$$\sigma_1 = \frac{b_0}{d_0} \left\{ \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_1}{d_0} \right] \Gamma_0 + \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{1/2} + \frac{1}{2} a_0 \Gamma_1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3/2} = & \frac{b_0}{d_0} \left\langle \left(\frac{b_{3/2}}{b_0} - \frac{d_{3/2}}{d_0} \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_1}{d_0} \right] - \frac{d_1}{d_0} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) - \frac{d_{3/2}}{d_0} \right) \Gamma_0 + \right. \\ & + \left[\frac{b_1}{b_0} + \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) \left(\frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{9} \frac{a_{1/2}^2}{a_0^2} \right) - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right] \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{1/2} + \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} \right] a_0 \Gamma_1 + \frac{1}{2} a_0 \sqrt{\frac{a_0}{2}} \Gamma_{3/2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\gamma_0 = 0$$

$$\gamma_{1/2} = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{3} \frac{\nu L^2}{a_0} \frac{d_0}{b_0} \sigma_1$$

$$\gamma_{3/2} = \sqrt{\frac{\nu^3 L^6}{2 a_0^3}} \frac{d_0}{b_0} \left\{ \sigma_{3/2} - 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b_{1/2}}{b_0} - \frac{d_{1/2}}{d_0} \right) + \frac{1}{3} \frac{a_{1/2}}{a_0} \right] \sigma_1 \right\}$$

4. Koeffizientenfunktionen der Reihe (39) für volle Rotationskörper und für ringförmige Rotationskörper — Fall B.

$$F_0$$

$$F_{1/2} = \beta_{1/2} f_{1/2} + \gamma_{1/2} g_{1/2}$$

$$F_1 = \beta_1 f_1 + \gamma_1 g_1 + \beta_1^2 \frac{f_{1,1}}{2} + \gamma_1^2 \frac{g_{1,1}}{2} + \beta_1 \frac{\gamma_1}{2} \frac{h_{1,1}}{2}$$

$$F_{3/2} = \beta_{3/2} f_{3/2} + \gamma_{3/2} g_{3/2} + \beta_{1/2} \beta_1 \frac{f_{1,1}}{2} + \gamma_{1/2} \gamma_1 \frac{g_{1,1}}{2} + \beta_{1/2} \gamma_1 \frac{h_{1,1}}{2} + \beta_1 \gamma_{1/2} \frac{h_{1,1}}{2} +$$

$$+ \beta_1^3 \frac{f_{1,1,1}}{2} + \gamma_1^3 \frac{g_{1,1,1}}{2} + \beta_1^2 \frac{\gamma_1}{2} \frac{h_{1,1,1}}{2} + \beta_1 \frac{\gamma_1^2}{2} \frac{h_{1,1,1}}{2}$$

5. Die zur Bestimmung entsprechender universeller Funktionen dienenden Differentialgleichungen:

$$L_0[F_0] = 0$$

$$L_{1/2}[f_{1/2}] = F_0'^2 - 1$$

$$L_{1/2}[g_{1/2}] = 0$$

$$L_1[f_1] = F_0'^2 - 1$$

$$L_1[g_1] = 0$$

$$L_1[f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' f_{\frac{1}{2}}' + (1 + \beta_0) f_{\frac{1}{2}}'^2 - 2 f_{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}}''$$

$$L_1[g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = (1 + \beta_0) g_{\frac{1}{2}}'^2 - 2 g_{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}''$$

$$L_1[h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' g_{\frac{1}{2}}' + 2(1 + \beta_0) f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}' - 2(f_{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}'' + f_{\frac{1}{2}}'' g_{\frac{1}{2}})$$

$$L_{3/2}[f_{3/2}] = F_0'^2 - 1$$

$$L_{3/2}[g_{3/2}] = 0$$

$$L_{3/2}[f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' (f_{\frac{1}{2}}' + f_1') + (3 + 2\beta_0) f_{\frac{1}{2}}' f_1' - 2 f_{\frac{1}{2}} f_1'' - 3 f_{\frac{1}{2}}' f_1$$

$$L_{3/2}[g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = (3 + 2\beta_0) g_{\frac{1}{2}}' g_1 - g_{\frac{1}{2}} g_1'' - 3 g_{\frac{1}{2}}' g_1$$

$$L_{3/2}[h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' g_1' + (3 + 2\beta_0) f_{\frac{1}{2}}' g_1' - 2 f_{\frac{1}{2}} g_1'' - 3 f_{\frac{1}{2}}' g_1$$

$$L_{3/2}[h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' g_{\frac{1}{2}}' + (3 + 2\beta_0) f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}' - 2 f_{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}'' - 3 f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}''$$

$$L_{3/2}[f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' f_{\frac{1}{2}}' + f_{\frac{1}{2}}'^2 + (3 + 2\beta_0) f_{\frac{1}{2}}' f_{\frac{1}{2}}' - 2 f_{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}}'' - 3 f_{\frac{1}{2}}' f_{\frac{1}{2}}'$$

$$L_{3/2}[g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = (3 + 2\beta_0) g_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}' - 2 g_{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}'' - 3 g_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}''$$

$$L_{3/2}[h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}' + 2 f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}' + (3 + 2\beta_0) (f_{\frac{1}{2}}' h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}' + f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}') - \\ - 2 (f_{\frac{1}{2}} h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}'' + g_{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}}'') - 3 (f_{\frac{1}{2}}'' h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}'')$$

$$L_{3/2}[h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 2 F_0' g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}' + g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}'^2 + (3 + 2\beta_0) (f_{\frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}' + h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}' g_{\frac{1}{2}}') - \\ - 2 (f_{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}'' + g_{\frac{1}{2}} h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}'') - 3 (f_{\frac{1}{2}}'' g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + g_{\frac{1}{2}}'' h_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})$$

mit den Randbedingungen

$$f \dots (0) = 0 \quad f' \dots (0) = 0 \quad f' \dots (\infty) = 0$$

$$g_{k/2} \dots (0) = 1 \quad g_{k/2}' \dots (0) = 0 \quad g_{k/2}' \dots (\infty) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$h \dots (0) = 0 \quad h' \dots (0) = 0 \quad h' \dots (\infty) = 0$$