PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 7—11.

# SUR L'INVARIANCE DES EQUATIONS CANONIQUES D'UN SYSTEME NON-CONSERVATIF EN MECANIQUE

*Ilija Lukačević*

(Communiqué le 13 juin 1962)

L'invariance des systèmes d'équations différentielles canoniques en Mécanique a été l'objet de nombre d'études. Les résultats classiques qui se bornaient au cas où le système matériel est conservatif ont été étendus, notamment par Bulgakov (1944), Chazy (1948), Arzanyh (1949), à des systèmes non-conservatifs d'un type très général.

Nous étudierons l'invariance des équations différentielles du mouvement d'un système non-conservatif dans un cas qui ne découle pas des résultats obtenus par les auteurs cités. En outre nous donnerons la transformation ponctuelle réalisée par les équations différentielles d'un tel type, qui est une transformation de contact non-homogène particulière.

Les équations considérées sont un cas spécial des équations canoniques du mouvement d'un système dynamiquement variable (v: [5]).

Nous adopterons la convention qui consiste à supprimer le signe de sommation devant une expression qui contient le même indice répété deux fois.

Considérons les transformations ponctuelles infinitésimales à un paramètre définies par la formule:

$$P_i\, dX^i = (1 - \Phi\delta t)\,(p_i\, dx^i + d\varphi), \ldots \tag{1.1}$$

où $t$ est le paramètre de la transformation, $\Phi$ une fonction arbitraire des variables $(x; p)$ et du paramètre $t$, et $\varphi$ une fonction arbitraire définie par:

$$\varphi = \xi^\circ (x; p)\, \delta t\, .$$

Définissons les transformations infinitésimales des variables par:

$$\begin{aligned} X^i &= x^i + \xi^i (x; p)\, \delta t\, , \\ P_i &= p_i + \eta_i (x; p)\, \delta t\, , \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

La substitution du système (1.2) dans la formule (1.1) nous donnera, si nous négligeons les termes en $dx^i$, $dp_i$, $\delta t$ d'ordre supérieur au second, les deux systèmes d'équations différentielles:

$$\begin{aligned} & p_i \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = \frac{\partial \xi^\circ}{\partial p_k}, \ldots && (\alpha) \\ & p_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \eta_k = \frac{\partial \xi^\circ}{\partial x^k} - p_k \Phi \ \ldots && (\beta) \quad (k = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si nous introduisons maintenant la fonction caractéristique de cette transformation, définie par:

$$H=p_i\xi^i-\xi^\circ$$

le système ($\alpha$) aura la forme suivante:

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ldots \qquad (\alpha') \tag{1.3'}$$

tandis que le système ($\beta$) deviendra:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}+p_i\Phi\right)\ldots \qquad (\beta')$$

ajoutons-lui encore l'équation suivante que nous obtiendrons à l'aide de ($\alpha'$):

$$\xi^\circ=p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}-H\ldots \qquad (\gamma')$$

Les équations différentielles (1.3′) sont celles qui décrivent le mouvement d'un système non-conservatif d'un type particulier dont $H$ est le hamiltonien. Ce système pour $\Phi\equiv 0$ deviendrait conservatif.

Supposons, inversement, que nous avons un système d'équations différentielles donné:

$$\xi^\circ=p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H,\quad \xi^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \eta_i=-\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}+\theta_i\right),\qquad (i=1,\ldots,n),$$

où $H$ est une fonction arbitraire des $(x;p)$ et les $\theta_i$ des fonctions également arbitraires des $(x;p)$ et du paramètre $t$.

Si nous substituons ces équations dans les relations (1.2), le système ($\alpha$) sera automatiquement vérifié, alors que le système ($\beta$) nous donnera:

$$p_i\Phi-\theta_i=0,$$

c'est-à-dire

$$\theta_i=p_i\Phi,$$

D'où la conclusion:

*La transformation infinitésimale la plus générale* (1.1) *est obtenue par l'intégration des équations canoniques* (1.3′).

* * *

Nous aurons maintenant à considérer l'invariance des équations (1.3′) par rapport aux transformations canoniques des coordonnées.

Rappelons les définitions fondamentales: les coordonnées nouvelles $(\overline{x};\overline{p})$ exprimées en fonction des $(x;p)$

$$\overline{x}^i=\varphi^i(x^1,\ldots,x^n;p_1,\ldots,p_n),$$

$$\overline{p}_i=\psi_i(x^1,\ldots,x^n;p_1,\ldots,p_n),\quad (i=1,\ldots,n),$$

vérifient la relation:

$$\overline{p}_i d\overline{x}^i=p_i dx^i+d\varphi(x;p),$$

où $\varphi(x;p)$ désigne une fonction arbitraire.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $2n$ fonctions arbitrairement choisies $\varphi^i(x;p)$, $\psi_i(x;p)$ puissent satisfaire identiquement à la relation (2.1) sont:

$$(\varphi_i,\varphi^j)=(\psi_i,\psi_j)=0,\ (\psi_i,\varphi^j)=\delta_i^j,$$

$$(\varphi,\varphi^j)=p_k\frac{\partial\varphi^j}{\partial p_k},\quad(\varphi,\psi_i)=-\psi_i+p_k\frac{\partial\psi_i}{\partial p_k},$$

où les ( ) désignent les parenthèses de Poisson:

$$(\varphi,\psi)\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i}-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},$$

le $\delta$ étant le symbole de Kronecker.

Nous mentionnons sans démonstration les conditions (2.2) (v. [1] § 64).

Le cas que nous considérerons sera celui où la fonction $\varphi$ est en involution avec les fonctions $\varphi^i$ et $\psi_i$, résultat qui nous donnera, partant de (2.2):

$$(2.2')\quad\begin{aligned}&(\varphi^i,\varphi^j)=(\psi_i,\psi_j)=0,\ (\psi_i,\varphi^j)=\delta_i^j\ \ldots &&(\alpha)\\&p_k\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_k}=0,\ \psi_i=p_k\frac{\partial\psi_i}{\partial p_k},\ \ldots &&(\beta)\end{aligned}$$

Nous pourrons faire la conclusion suivante: la condition suffisante pour que les équations ($2.2'-\beta$) soient satisfaites est que les transformations (2.1) soient homogènes, c'est-à-dire que la fonction $\varphi$ soit identiquement constante. Au contraire, la condition nécessaire pour que les transformations (2.1) soient homogènes est que les équations ($2.2'-\beta$) soient satisfaites; la condition suffisante étant:

$$\frac{\partial(\varphi^1,\ldots,\varphi^n;\ \psi_i,\ldots,\psi_n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n;\ p_1,\ldots,p_n)}\neq0.$$

Pour démontrer cette affirmation nous renvoyons au résultat ([1], § 69, théorème 69.2).

Il nous reste à remarquer que la conséquence d'un premier groupe d'équations ($2.2'-\beta$) est que le rang du déterminant $\left\|\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_k}\right\|$ doit être inférieur à $n$.

Retournons maintenant au système d'équations (1.3'):

$$(1.3')\quad\begin{aligned}&\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\\&\frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}+p_i\,\Phi\right),\qquad(i=1,\ldots,n).\end{aligned}$$

Nous pourrons rechercher immédiatement les équations qui correspondent aux équations (1.3') dans le système des variables $\overline{x}^i$, $\overline{p}_i$.

$$(2.3)\quad\begin{aligned}&\frac{d\overline{x}^i}{dt}=\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}+\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt},\\&\frac{d\overline{p}_i}{dt}=\frac{\partial\psi_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}+\frac{\partial\psi_i}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt},\end{aligned}$$

Si nous désignons par $\overline{H}$ et $\overline{\Phi}$ respectivement, les fonctions $H$ et $\Phi$ dans lesquelles nous avons opéré la substitution des variables $x^i$; $p_i$ par les variables nouvelles $\overline{x}^i$; $\overline{p}_i$, nous aurons:

$$\frac{d\overline{x}^i}{dt}=\frac{\partial\overline{H}}{\partial\overline{p}_i}-p_k\,\overline{\Phi}\,\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_k},$$

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt}=-\frac{\partial\overline{H}}{\partial\overline{x}^i}-\overline{\Phi}\,p_k\,\frac{\partial\psi_i}{\partial p_k},$$

A la suite des équations $(2.2'-\beta)$ nous aurons:

$$\frac{d\overline{x}^i}{dt}=\frac{\partial\overline{H}}{\partial\overline{p}},$$

(2.3′)

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt}=-\left(\frac{\partial\overline{H}}{\partial\overline{x}^i}+\overline{p}_i\,\overline{\Phi}\right),$$

Supposons maintenant, au contraire, d'avoir réussi, au moyen de transformations quelconques, à obtenir le système d'équations (2.3′) à partir du système (1.3′).

Si nous écrivons par définition le système (2.3), en tenant compte de ce que nous avons désigné par $\overline{H}$ et $\overline{\Phi}$, nous obtiendrons en conséquence les équations (2.2′).

Ainsi:

*La condition nécessaire et suffisante pour que les équations canoniques de la forme:*

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}+p_i\,\Phi\right),$$

*soient, après transformation, de la forme équivalente:*

$$\frac{d\overline{x}^i}{dt}=\frac{\partial\overline{H}}{\partial\overline{p}_i},$$

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt}=-\left(\frac{\partial\overline{H}}{\partial\overline{x}^i}+\overline{p}_i\,\overline{\Phi}\right),\qquad (i=1,\ldots,n)$$

*est que les variables $\overline{x}^i$, $\overline{p}_i$ en fonction des $x^i$, $p_i$, soient les solutions du système d'équations aux dérivées partielles:*

$$(\varphi^i,\varphi^j)=(\psi_i,\psi_j)=0,\quad (\psi_i,\varphi^j)=\delta_i{}^j,$$

$$p_k\,\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_k}=0,\quad \psi_i=p_k\,\frac{\partial\psi_i}{\partial p_k},\qquad (i,j,k=1,\ldots,n).$$

* * *

Rappelons, enfin, que les équations (1.3′) ne sont qu'un cas spécial des équations canoniques du mouvement d'un système dynamiquement variable (v. [5] eq. 3.30):

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}+P_i,$$

celui où les forces $P_i$ définies dans le cas général par

$$P_i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}k_{(\alpha)\,kj}\frac{\partial y_k^j}{\partial x^i},$$

se réduisent à:

$$P_i=-p_i\,\Phi(x;\,p).$$

## RÉFÉRENCES

[1] Л. П. Эйзенхарт: *Непрерывные группы преобразований*, Москва, 1947.

[2] И. Л. Булгаков: *Колебания*, Москва, 1952.

[3] Аржаных: *Доклады Акад. Наук СССР*, том 66, 1949.

[4] J. Chazy: *Sur une généralisation des équations canoniques*, Ctes. rdus. Acad. d. Sc. Paris, tome 226, 1948.

[5] V. Vujičić: *Kretanje dinamički promenljivih objekata i njegova stabilnost*, Beograd, 1962.