PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 57–60.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DU SECOND DEGRÉ

D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, S. B. Prešić

(Communiqué le 5 mai 1963)

1. Soient g_1, g_2, g_3 des fonctions réelles données dépendant de k, l, m variables réelles respectivement, et f une fonction réelle de deux variables réelles.

L'équation fonctionnelle

$$(1) \quad F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_2) + \cdots + F(x_1, x_n, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
(2)\ & F(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n) \\
= \ & f(u_1, g_1(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \{ f(g_2(u_{k+2}, u_{k+3}, \ldots, u_{k+l+1}), g_3(u_{k+i+2}, u_{k+l+3}, \ldots, u_n)) \\
& \qquad + f(g_3(u_{k+2}, u_{k+3}, \ldots, u_{k+m+1}), g_2(u_{k+m+2}, u_{k+m+3}, \ldots, u_n)) \} \\
& + f(u_1, g_2(u_2, u_3, \ldots, u_{l+1})) \{ f(g_1(u_{l+2}, u_{l+3}, \ldots, u_{k+l+1}), g_3(u_{k+l+2}, u_{k+l+3}, \ldots, u_n)) \\
& \qquad + f(g_3(u_{l+2}, u_{l+3}, \ldots, u_{l+m+1}), g_1(u_{l+m+2}, u_{l+m+3}, \ldots, u_n)) \} \\
& + f(u_1, g_3(u_2, u_3, \ldots, u_{m+1})) \{ f(g_1(u_{m+2}, u_{m+3}, \ldots, u_{k+m+1}), g_2(u_{k+m+2}, u_{k+m+3}, \ldots, u_n)) \\
& \qquad + f(g_2(u_{m+2}, u_{m+3}, \ldots, u_{l+m+1}), g_1(u_{l+m+2}, u_{l+m+3}, \ldots, u_n)) \} \\
& \qquad\qquad (k + l + m + 1 = n)
\end{aligned}$$

sera nommée, dans ce qui suit, équation (F_1).

La fonction

$$(3) \qquad f(u, v) = G(u) H(v) - G(v) H(u),$$

où G et H sont des fonctions réelles quelconques, est une solution de l'équation (F_1), ce qu'on vérifie sans difficulté.

Cependant, dans le cas où g_1, g_2, g_3 sont des fonctions quelconques, la fonction (3) n'est pas la solution générale de l'équation (F_1). Par exemple, si l'on a

$$g_1(u_1, u_2, \ldots, u_k) = u_1 - u_2, \quad g_2(u_1, u_2, \ldots, u_l) = u_1 - u_2,$$

$$g_3(u_1, u_2, \ldots, u_m) = u_1 - u_2,$$

une solution particulière de l'équation (F_1) est

$$(4) \qquad f(u, v) = u.$$

Cette solution n'est pas contenue dans (3). Vraiment, pour toute solution (3) on a $f(u, u) \equiv 0$, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour la solution (4).

Dans ce qui suit, nous allons démontrer le résultat suivant:

Théorème. — *Dans le cas où il existe une constante réelle e telle que les conditions*

$$
\begin{aligned}
&g_1(u, e, \ldots, e) = g_1(e, u, e, \ldots, e) = \cdots = g_1(e, e, \ldots, e, u) = u, \\
(5) \qquad &g_2(u, e, \ldots, e) = g_2(e, u, e, \ldots, e) = \cdots = g_2(e, e, \ldots, e, u) = u, \\
&g_3(u, e, \ldots, e) = g_3(e, u, e, \ldots, e) = \cdots = g_3(e, e, \ldots, e, u) = u,
\end{aligned}
$$

soient remplies pour tout u, la solution générale de l'équation (F_1) *est donnée par* (3).

Démonstration. — Nous avons déjà constaté que la fonction (3) est une solution de l'équation (F_1). Inversement, nous allons prouver que toute solution de l'équation (F_1), dans le cas où les conditions (5) sont remplies, a la forme (3).

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $k \leqslant l \leqslant m$.

Si l'on pose $x_i = e$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et applique les propriétés (5), l'équation (F_1) conduit à $f(e, e) = 0$.

Nous chercherons tout d'abord toutes les solutions de l'équation (F_1) pour lesquelles la condition suivante

$$(6) \qquad f(x, e) \equiv 0$$

est remplie.

Pour toute solution non triviale, il existe au moins un couple (a, b) des nombres réels différents tels que $f(a, b) \neq 0$.

Si l'on remplace toutes les variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

sauf

$$x_1, x_{k+2}, x_{k+3}$$

par e, et si l'on fait

$$x_1 = a, \quad x_{k+2} = u, \quad x_{k+3} = b,$$

d'après (5) et (6), l'équation (F_1) donne

$$(7) \qquad f(e, u) \equiv 0.$$

En remplaçant toutes les variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

sauf

$$x_1, x_2, x_{k+2}, x_{k+3}$$

par e, et en utilisant (6) et (7), l'équation (F_1) prend la forme que voici:

$$f(x_1, x_2) f(x_{k+2}, x_{k+3}) + f(x_1, x_{k+2}) f(x_{k+3}, x_2) + f(x_1, x_{k+3}) f(x_2, x_{k+2}) = 0.$$

La solution générale de cette équation (*voir*: [1]) est donnée par (3), où G et H sont des fonctions quelconques qui, d'après (6), satisfont à la condition

$$G(u) H(e) - G(e) H(u) = 0.$$

Nous chercherons maintenant toutes les solutions de l'équation (F_1) pour lesquelles est $f(x, e) \not\equiv 0$.

Dans ce cas, il existe au moins un nombre réel $c\,(\neq e)$, tel que $f(c, e)\neq 0$. Pour

$$x_1 = c, \quad x_2 = u, \quad x_3 = x_4 = \cdots = x_n = e,$$

d'après (5), l'équation (F_1) devient

$$f(c, e)\{f(u, e) + f(e, u)\} = 0,$$

d'où

(8) $$f(u, e) = -f(e, u).$$

En posant

$$x_1 = c, \quad x_2 = u, \quad x_3 = v, \quad x_4 = x_5 = \cdots = x_n = e,$$

et mettant à profit la propriété (8), l'équation (F_1) se réduit à

(9) $$f(c, e)f(u, v) - f(c, u)f(e, v) + f(c, v)f(e, u) = 0.$$

Si l'on y pose

$$\frac{f(c, u)}{f(c, e)} = G(u), \quad f(e, u) = H(u),$$

on obtient

$$f(u, v) = G(u)\,H(v) - G(v)\,H(u),$$

ce qui signifie que, sous l'hypothèse $f(x, e)\neq 0$, la solution générale a également la forme (3).

2. Dans le cas où la fonction (3) est la solution générale de l'équation (F_1), nous considérons, comme exemple, le cas où

$$g_1(u_1, u_2, \ldots, u_k) = u_1 + u_2 + \cdots + u_k,$$
$$g_2(u_1, u_2, \ldots, u_l) = u_1 + u_2 + \cdots + u_l,$$
$$g_3(u_1, u_2, \ldots, u_m) = u_1 + u_2 + \cdots + u_m.$$

Dans ce cas, on a $e = 0$ et la fonction F a la forme suivante

(10) $$\begin{aligned} F(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) \\ = \; & f(u_1, u_2 + \cdots + u_{k+1})\{f(u_{k+2} + \cdots + u_{k+l+1}, u_{k+l+2} + \cdots + u_n) \\ & \qquad + f(u_{k+2} + \cdots + u_{k+m+1}, u_{k+m+2} + \cdots + u_n)\} \\ & + f(u_1, u_2 + \cdots + u_{l+1})\{f(u_{l+2} + \cdots + u_{k+l+1}, u_{k+l+2} + \cdots + u_n) \\ & \qquad + f(u_{l+2} + \cdots + u_{l+m+1}, u_{l+m+2} + \cdots + u_n)\} \\ & + f(u_1, u_2 + \cdots + u_{m+1})\{f(u_{m+2} + \cdots + u_{k+m+1}, u_{k+m+2} + \cdots + u_n) \\ & \qquad + f(u_{m+2} + \cdots + u_{l+m+1}, u_{l+m+2} + \cdots + u_n)\}. \end{aligned}$$

L'équation fonctionnelle (1), suivie de la formule (10), sera dite, dans ce qui suit, équation (F_2).

D'après le théorème démontré, la solution générale de l'équation (F_2) est donnée par (3).

Déterminons maintenant le nombre des équations différentes du type (F_2) pour n fixé.

Lorsqu'on a $k \leqslant l \leqslant m$, la variable k peut prendre les valeurs suivantes

$$1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{3}\right].$$

Pour $k=\nu\left(1\leqslant\nu\leqslant\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$ la variable l peut prendre les valeurs que voici

$$\nu,\ \nu+1,\ \ldots,\ \left[\frac{n-\nu-1}{2}\right].$$

Par conséquent, pour $k=\nu$ la variable l, avec $1\leqslant k\leqslant m$, et $k+l+m+1=n$, peut parcourir en total les

$$\left[\frac{n-\nu}{2}\right]-\nu+1$$

valeurs différentes. En total, on aura les

$$N=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}\left\{1+\left[\frac{n-\nu-1}{2}\right]-\nu\right\}$$

équations différentes (F_2). On dresse ainsi le tableau suivant:

n	4	5	6	7	...	20	...	30	...
N	1	1	2	3		30		70	

3. A la fin, nous allons indiquer quelques exemples des fonctions g_1, g_2, g_3 pour lesquelles sont valables les conditions (5). Les fonctions en question sont, par exemple:

$$1^\circ\quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)=\prod_{i=1}^{k} x_i,\quad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_l)=\prod_{i=1}^{l} x_i,$$

$$g_3(x_1, x_2, \ldots, x_m)=\prod_{i=1}^{m} x_i\qquad (e=1);$$

$$2^\circ\quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)=\sqrt[k]{\sum_{i=1}^{k} x_i^k}\quad (k\ \text{impair}),\quad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_l)=\sum_{i=1}^{l} x_i,$$

$$g_3(x_1, x_2, \ldots, x_m)=\sum_{i=1}^{m} x_i+\prod_{i=1}^{m} x_i\qquad (e=0)$$

etc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović et S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur*. Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 70 (1962).

[2] D. S. Mitrinović et S. B. Prešić: *Une classe d'équations fonctionnelles homogènes du second degré*. Ibid., № 71 (1962).