PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 47—52.

ÜBER EINE MULTILINEARE FUNKTIONALGLEICHUNG MIT MEHREREN UNBEKANNTEN FUNKTIONEN

László Losonczi

(Vorgelegt am 5 April 1963)

1. In einer vorhergehenden Arbeit [1] hat J. Aczél ohne irgendwelche Voraussetzungen die Funktionalgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y) = 0 \tag{1}$$

gelöst.

Wir werden die Verallgemeinerung von (1), die Funktionalgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^1(x_1) f_i^2(x_2) \cdots f_i^k(x_k) = 0 \tag{2}$$

auflösen.

2. Die Lösung geht mit rekursivem Verfahren. Im Falle $n=1$ erhalten wir die Funktionalgleichung

$$f_1^1(x_1) f_1^2(x_2) \cdots f_1^k(x_k) = 0 \tag{3}$$

deren Lösungen die folgenden sind: von den k Funktionen ist eine identisch gleich Null, die anderen sind beliebig.

Die k Lösungssysteme sind

(4)

	1	2	$\cdots$	k
f_1^1	0	f_1^1		f_1^1
f_1^2	f_1^2	0		f_1^2
$\vdots$				
f_1^k	f_1^k	f_1^k		0

Wir zeigen, dass (2) sich in höchstens $n-1$ Schritten auf (3) zurückführen lässt.

Es genügt die Funktionalgleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i^1(x_1) f_i^2(x_2) \cdots f_i^k(x_k) = 0 \tag{5}$$

auf (2) zurückzuführen.

Wenn $f^k_{n+1}(x_k)\equiv 0$, so erhalten wir schon (2) und die Funktionen $f^j_{n+1}(x_j)$, $j=1, 2, \ldots, k-1$, sind beliebig, wenn $f^k_{n+1}(x_k)\neq 0$, so existiert ein konstanter Wert x_{k_0} so, dass $f^k_{n+1}(x_{k_0})\neq 0$.

In (2) setzen wir x_{k_0} statt x_k ein:

$$f^1_{n+1}(x_1)f^2_{n+1}(x_2)\cdots f^{k-1}_{n+1}(x_{k-1})=\sum_{i=1}^{n} b_i f^1_i(x_1)f^2_i(x_2)\cdots f^{k-1}_i(x_{k-1}),$$

wobei

$$b_i=-\frac{f^k_i(x_{k_0})}{f^k_{n+1}(x_{k_0})} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Wir setzen dies in (5) zurück, und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} f^1_i(x_1)f^2_i(x_2)\cdots f^{k-1}_i(x_{k-1})\left[f^k_i(x_k)+b_i f^k_{n+1}(x_k)\right]=0, \tag{6}$$

die schon die Gestalt (2) hat.

3. Man kann die vollständige Lösung von (2) explizit aufschreiben.

Satz: *Für $k\geqslant 2$ ist die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung* (2)

$$f^j_i(x_j)=\sum_{s=1}^{n_j} c^j_{is}F^j_s(x_j) \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, k), \tag{7}$$

wo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ganze Zahlen sind mit der Nebenbedingung

$$0\leqslant n_j\leqslant n \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{k} n_j=n(k-1) \tag{9}$$

$\left(\sum_1^0=0 \text{ per definitionem}\right)$, *die Funktionen der Funktionensysteme*

$$\begin{matrix} F^1_1(x_1), & F^1_2(x_1), & \ldots & F^1_{n_1}(x_1) \\ F^2_1(x_2), & F^2_2(x_2), & & F^2_{n_2}(x_2) \\ \vdots & & & \\ F^k_1(x_k), & F^k_2(x_k), & & F^k_{n_k}(x_k) \end{matrix} \tag{10}$$

sind beliebig derart, dass die $\{F^j_s(x_j)\}$ $s=1, 2, \ldots, n_j$ linear unabhängige Funktionensysteme bilden ($j=1, 2, \ldots, k$) und c^j_{is} beliebige Konstanten sind, wenn für ein j, $n_j=0$, sonst unterliegen sie den Einschränkungen

$$\sum_{i=1}^{n} c^1_{is_1}c^2_{is_2}\cdots c^k_{is_k}=0 \qquad (s_j=1, 2, \ldots, n_j;\ \ j=1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

(Wegen (8) *und* (9) *ist es nicht möglich dass unter den $n_1, n_2, \ldots, n_k$ zwei gleich* 0 *seien.)*

Beweis: Vollständige Induktion bezüglich n.

Im Falle $n=1$ schreiben wir die Tabelle (4) in die Gestalt

(12)

	1	2	$\cdots$	k
f_1^1	0	$c_{11}^1 F_1^1$		$c_{11}^1 F_1^1$
f_1^2	$c_{11}^2 F_1^2$	0		$c_{11}^2 F_1^2$
$\vdots$				
f_1^k	$c_{11}^k F_1^k$	$c_{11}^k F_1^k$		0

Diese Umschreibung ist gerechtfertigt, denn wir schreiben 0 statt 0, und statt den beliebigen $f_1^j(x_j)$ die beliebigen Funktionen $c_{11}^j F_1^j(x_j)$.

Eine nicht identisch verschwindende Funktion ist nämlich immer linear unabhängig, und wenn $f_1^j(x_j)\equiv 0$ wäre, so wählen wir $c_{11}^j=0$ und $F_1^j(x_j)\not\equiv 0$ beliebig.

Die Nebenbedingungen (8), (9) sind erfüllt. Da im Falle $n=1$ für ein j $n_j=0$ ist, sind die c_{11}^j beliebig.

Wir setzen voraus, dass der Satz für n richtig ist. Wir müssen die Gleichung (5) untersuchen, und dabei zwei Fälle unterscheiden.

I. Es gibt unter den Funktionen $f_{n+1}^1, f_{n+1}^2, \ldots, f_{n+1}^k$ wenigstens eine identisch verschwindende Funktion. Es sei diese einfachheitshalber f_{n+1}^k, dann sind die Funktionen $f_{n+1}^1, f_{n+1}^2, \ldots, f_{n+1}^{k-1}$ beliebig, und nach der Induktionsvoraussetzung

$$(7)\qquad f_i^j(x_j)=\sum_{s=1}^{n_j} c_{is}^j F_s^j(x_j) \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, k).$$

A. Ist die beliebige Funktion f_{n+1}^t $(t=1, 2, \ldots, k-1)$ linear unabhängig von dem Funktionensystem $\{F_s^t(x_t)\}$, so sei

$$F_{n_t+1}^t(x_t)=f_{n+1}^t(x_t)$$

oder

$$(13)\qquad f_{n+1}^t(x_t)=\sum_{s=1}^{n_t+1} c_{n+1,s}^t F_s^t(x_t) \qquad \begin{pmatrix} c_{n+1,s}^t=0,\ s=1, 2, \ldots, n_t; \\ c_{n+1,n_t+1}^t=1 \end{pmatrix}$$

und

$$(14)\qquad f_i^t(x_t)=\sum_{s=1}^{n_t+1} c_{is}^t F_s^t(x_t) \qquad (c_{i,n_t+1}^t=0,\ i=1, 2, \ldots, n)$$

ist auch richtig $(t=1, 2, \ldots, k-1)$.

B. Ist $f_{n+1}^t(x_t)$ linear abhängig von dem Funktionensystem $\{F_s^t(x_t)\}$ $s=1, 2, \ldots, n_t$, so sei $F_{n_t+1}^t$ eine beliebige von $\{F_s^t(x_t)\}$ linear unabhängige Funktion, dann gelten

$$(15)\qquad f_{n+1}^t(x_t)=\sum_{s=1}^{n_t+1} c_{n+1,s}^t F_s^t(x_t) \qquad (c_{n+1,n_t+1}^t=0)$$

und

$$(16)\qquad f_i^t(x_t)=\sum_{s=1}^{n_t+1} c_{is}^t F_s^t(x_t) \qquad (c_{i,n_t+1}^t=0,\ i=1, 2, \ldots, n).$$

Schreiben wir die Funktion $f^k_{n+1}(x_k)$ in der Gestalt

$$f^k_{n+1}(x_k) = \sum_{s=1}^{n_k} c^k_{n+1,s} F^k_s(x_k) \qquad (c^k_{n+1,s} = 0,\ s = 1, 2, \ldots, n_k). \tag{17}$$

Gleichung (17) zusammen mit (13), (14) bzw. (15), (16) $(t = 1, 2, \ldots, k-1)$ geben eben die der Formel (7) entsprechende Formel für $n+1$.

(8), (9), sind erfüllt, weil wir zu jeder Reihe von (10) ausser der letzten eine neue lineare unabhängige Funktion hinzugefügt haben.

II. Ist keine der Funktionen $f^1_{n+1}, f^2_{n+1}, \ldots, f^k_{n+1}$ identisch gleich Null, dann folgt aus (6) nach der Induktionsvoraussetzung

$$f^j_i(x_j) = \sum_{s=1}^{n_j} c^j_{is} F^j_s(x_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{18}$$

$$f^k_i(x_k) + b_i f^k_{n+1}(x_k) = \sum_{i=1}^{n_k} c^k_{is} F^k_s(x_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Um die Funktionen $f^j_{n+1}(x_j)$ $j = 1, 2, \ldots, k-1$ zu bestimmen, setzen wir in (6) statt x_r $(r = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, j+2, \ldots, k-1)$ solche Konstanten x_{r0}, dass $f^r_{n+1}(x_{r0}) \neq 0$. (Solche Werte x_{r0} existieren, weil keine der Funktionen f^r_{n+1} $r = 1, 2, \ldots, k-1$ identisch gleich Null sind.)

Dann gilt

$$f^j_{n+1}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} b^j_i f^j_i(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

wo

$$b^j_i = b_i \frac{f^1_i(x_{1,0}) \ldots f^{j-1}_i(x_{j-1,0}) f^{j+1}_i(x_{j+1,0}) \ldots f^{k-1}_i(x_{k-1,0})}{f^1_{n+1}(x_{1,0}) \ldots f^{j-1}_{n+1}(x_{j-1,0}) f^{j+1}_{n+1}(x_{j+1,0}) \ldots f^{k-1}_{n+1}(x_{k-1,0})}$$

ist, oder mit (18)

$$f^j_{n+1}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} b^j_i \sum_{s=1}^{n_j} c^j_{is} F^j_s(x_j) = \sum_{s=1}^{n_j} \left(\sum_{i=1}^{n} b^j_i c^j_{is} \right) F^j_s(x_j)$$

d. h.

$$f^j_{n+1}(x_j) = \sum_{s=1}^{n_j} c^j_{n+1,s} F^j_s(x_j) \qquad (c^j_{n+1,s} = \sum_{i=1}^{n} b^j_i c^j_{is};\ j = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{20}$$

Es seien $F^j_{n_j+1}(x_j)$ beliebige — von den Funktionensystemen $\{F^j_s(x_j)\}$ $s = 1, 2, \ldots n_j$; linear unabhängige Funktionen $(j = 1, 2, \ldots, k-2)$. In diesem Fall lässt sich (20) in der Gestalt schreiben

$$\begin{aligned} f^j_{n+1}(x_j) &= \sum_{s=1}^{n_j+1} c^j_{is} F^j_s(x_j) \qquad (c^j_{i,n_j+1} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k-2) \\ f^{k-1}_{n+1}(x_{k-1}) &= \sum_{s=1}^{n_{k}-1} c^{k-1}_{is} F^{k-1}_s(x_{k-1}). \end{aligned} \tag{21}$$

A. Ist $f^k_{n+1}(x_k)$ linear unabhängig von dem Funktionensystem $\{F^k_s(x_k)\}$ $s = 1, 2, \ldots, n_k$, so sei

$$F^k_{n_k+1}(x_k) = f^k_{n+1}(x_k)$$

oder

$$(22)\qquad f_{n+1}^{k}(x_k)=\sum_{s=1}^{n_k+1} c_{n+1,s}^{k}\,F_s^k(x_k)\qquad (c_{n+1,s}^{k}=0,\ s=1,2,\ldots,n_k;\ c_{n+1,n_k+1}^{k}=1).$$

Aus (19) folgt

$$f_i^k(x_k)=-b_i\,F_{n_k+1}^{k}(x_k)+\sum_{s=1}^{n_k} c_{is}^{k}\,F_s^k(x_k)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

oder

$$(23)\qquad f_i^k(x_k)=\sum_{s=1}^{n_k+1} c_{is}^{k}\,F_s^k(x_k)\qquad (c_{i,n_k+1}^{k}=-b_i,\ i=1,2,\ldots,n).$$

B. Wenn $f_{n+1}^k(x_k)$ linear abhängig ist von dem Funktionensystem $\{F_s^k(x_k)\}$ $s=1,2,\ldots,n_k$, dann bezeichnen wir mit $F_{n_k+1}^k(x_k)$ eine beliebige — von den $\{F_s^k(x_k)\}$ linear unabhängige Funktion

$$(24)\qquad f_{n+1}^{k}(x_k)=\sum_{s=1}^{n_k+1} c_{n+1,s}^{k}\,F_s^k(x_k)\qquad (c_{n+1,n_k+1}^{k}=0).$$

Aus (19) folgt mit (24)

$$f_i^k(x_k)=-b_i\sum_{s=1}^{n_k+1} c_{n+1,s}^{k}\,F_s^k(x_k)+\sum_{s=1}^{n_k} c_{is}^{k}\,F_s^k(x_k)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

bzw.

$$(25)\qquad f_i^k(x_k)=\sum_{s=1}^{n_k+1} c_{is}^{k'}\,F_s^k(x_k)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$(c_{is}^{k'}=c_{is}^{k}-b_i\,c_{n+1,s}^{k}\ s=1,2,\ldots,n_k;\ c_{i,n_k+1}^{k'}=-b_i\,c_{n+1,n_k+1}^{k}).$$

(18), (21) und (22), (23) bzw. (24), (25) entspricht auch (7) für $n+1$. (8), (9) sind wieder erfüllt.

Damit haben wir die Formel (7) bewiesen.

Ziehen wir in Betracht, dass das mit Hilfe des Funktionensystems (10) gebildete Funktionensystem

$$(26)\qquad \{F_{s_1}^1(x_1)\,F_{s_2}^1(x_2)\,\ldots\,F_{s_k}^k(x_k)\}\qquad (s_j=1,2,\ldots,n_j;\ j=1,2,\ldots,k)$$

linear unabhängig ist, also

$$(27)\qquad \sum_{s_1=1}^{n_1}\sum_{s_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{s_k=1}^{n_k} d_{s_1 s_2\ldots s_k}\,F_{s_1}^1(x_1)\,F_{s_2}^2(x_2)\cdots F_{s_k}^k(x_k)=0$$

dann, und nur dann besteht, wenn

$$d_{s_1 s_2\ldots s_k}=0\qquad (s_j=1,2,\ldots,n_j;\ j=1,2,\ldots,k).$$

Halten wir nämlich $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ fest, dann folgt — wegen der Unabhängigkeit der Funktionen $\{F_s^k(x_k)\}$ $s=1,2,\ldots,n_k$ — aus (27)

$$(28)\ \sum_{s_1=1}^{n_1}\sum_{s_2=2}^{n_2}\cdots\sum_{sk=k}^{nk} d_{s_1 s_2\ldots s_k}\,F_{s_1}^1(x_1)\,F_{s_2}^2(x_2)\cdots F_{s_k}^k(x_k)=0\ (s_k=1,2,\ldots,n_k).$$

Da (28) bei beliebigen konstanten Werten $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ gültig ist, so folgt die Gültigkeit (28) für alle $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Wiederholen wir diesen Gedankengang $k-1$-mal, dann erhalten wir

$$d_{s_1 s_2 \ldots s_k} = 0 \qquad (s_j = 1, 2, \ldots, n_j;\ j = 1, 2, \ldots, k)$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe dieser Bemerkung sieht man leicht, dass das Funktionensystem (7) dann, und nur dann (2) erfüllt, wenn die c^j_{is} den Bedingungen (11) genügen.

Setzen wir nämlich (7) in (2) zurück

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\sum_{s_1=1}^{n_1} c^1_{is_1} F^1_{s_1}(x_1) \right] \left[\sum_{s_2=1}^{n_2} c^2_{is_2} F^2_{s_2}(x_2) \right] \ldots \left[\sum_{s_k=1}^{n_k} c^k_{is_k} F^k_{s_k}(x_k) \right] \right\} = 0. \tag{29}$$

Wenn für irgendein j $n_j = 0$ ist, dann ist (29) erfüllt, weil wegen $\sum\limits_{1}^{0} = 0$ jedes Glied der Summe einen Nullfaktor enthält. Wenn $n_j \neq 0$ $j = 1, 2, \ldots, k$ dann folgt aus (29)

$$\sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=2}^{n_2} \ldots \sum_{s_k=1}^{n_k} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} c^1_{is_1} c^2_{is_2} \ldots c^k_{is_k} \right] F^1_{s_1}(x_1) F^2_{s_2}(x_2) \cdots F^k_{s_k}(x_k) \right\} = 0$$

aber wir haben schon bewiesen dass dies dann, und nur dann bestehen kann, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} c^1_{is_1} c^2_{is_2} \ldots c^k_{is_k} = 0 \qquad (s_j = 1, 2, \ldots, n_j;\ j = 1, 2, \ldots, k).$$

Dies bedeutet dass (11) erfüllt ist, was zu beweisen war.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. Aczél: *Sur une classe d'équations fonctionelles bilinéaires à plusieurs fonctions inconnues.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathematiques et physique, No. 62 (1961), 12—20.

Sehen ebenso:

D. S. Mitrinović: *Sur une équation fonctionnelle.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 237, 1953, p. 550—551.

D. S. Mitrinović: *Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathematiques et physique, No. 5 (1956).

[2] G. Bandyopadhvay: *On certain lemma in connection with separable solutions of partial differential equations.* Proc. II. Congr. Theor. Appl. Mech. New Delhi October 15—16, 1956, 269—270.