PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 43–46.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS ENTRE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET LA MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

L. Tchakaloff

(Présenté le 4 avril 1963)

1. En désignant par $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres positifs et par A_n et G_n la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des n premiers de ces nombres, il existe l'inégalité bien connue

$$G_n \leqq A_n, \tag{1}$$

le signe $=$ n'ayant lieu que lorsque les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont égaux entre eux. Il existe plusieurs démonstrations de cette proposition dont une des plus ingénieuses est celle donnée par Cauchy dans son Analyse algébrique (Oeuvres complètes II, t. 3-ème, p. 375—377; Paris, 1897). Nous allons établir dans ce qui suit quelques inégalités entre les moyennes A_n et G_n dont la relation (1) n'est qu'une conséquence immédiate. Dans ce but nous nous servirons du lemme suivant.

Lemme. *Le nombre entier k étant supérieur à* 1, *on a toujours l'inégalité*

$$x^k - kxy^{k-1} + (k-1)\, y^k \geqq 0 \tag{2}$$

quels que soient les nombres positifs x et y; le signe $=$ dans la relation (2) *n'est possible que lorsque $x = y$.*

En effet, le premier membre de (2), considéré comme un polynome de x, possède le zéro double $x = y$ et, d'après la règle de Descartes, si y est positif, ce polynome ne peut pas avoir d'autres zéros positifs. On a d'ailleurs l'identité

$$x^k - kxy^{k-1} + (k-1)\, y^k = (x-y)^2 \sum_{r=0}^{k-2} (r+1)\, x^{k-r-2}\, y^r$$

qui met en évidence l'exactitude de notre lemme.

Envisageons les moyennes arithmétique et géométrique A_k et G_k des k premiers des nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (on pose $A_1 = G_1 = a_1$). On a évidemment pour $k = 2, 3, \ldots$.

$$\begin{aligned} k(A_k - G_k) &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k - k \sqrt[k]{a_1\, a_2 \ldots a_k} \\ &= (k-1)\, A_{k-1} + a_k - k \sqrt[k]{a_k\, G_{k-1}^{k-1}} \\ &= (k-1)\, G_{k-1} + a_k - k \sqrt[k]{a_k\, G_{k-1}^{k-1}} + (k-1)(A_{k-1} - G_{k-1}). \end{aligned}$$

Or le trinôme $(k-1)\,G_{k-1}+a_k-k\sqrt[k]{a_k\,G_{k-1}^{k-1}}$ n'est autre chose que le premier membre de (2) où l'on a posé $x=\sqrt[k]{a_k}$, $y=\sqrt[k]{G_{k-1}}$. Nous avons ainsi établi la relation de récurrence

$$k\,(A_k-G_k)\geqq(k-1)\,(A_{k-1}-G_{k-1}), \tag{3}$$

où le signe d'égalité n'est possible que lorsque $a_k=G_{k-1}$. On en conclut d'abord que $A_2-G_2\geqq 0$, le signe $=$ ayant lieu seulement pour $a_2=G_1=a_1$, ce qui est d'ailleurs évident.

Supposons d'une façon générale qu'on ait déjà démontré la relation (1) entre les moyennes arithmétique et géométrique pour $n=k-1$. D'après la relation (3), on a $A_k-G_k\geqq 0$, le signe $=$ n'étant possible que lorsque $a_k=G_{k-1}$ et $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}$, c'est-à-dire lorsque $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=a_k$. Donc la même proposition est aussi vraie pour k nombres positifs, q. e. d. L'application répétée de la relation (3) pour $k=n, n-1, \ldots, p+1$ conduit à l'inégalité

$$n\,(A_n-G_n)\geqq p\,(A_p-G_p), \qquad n>p\geqq 1, \tag{4}$$

et l'on voit sans peine que le signe $=$ n'est possible que lorsque

$$a_n=G_{n-1},\quad a_{n-1}=G_{n-2},\ \ldots,\ a_{p+1}=G_p,$$

c'est-à-dire lorsque

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{p+1}=\sqrt[p]{a_1\,a_2\ldots a_p}.$$

Si les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ne sont pas égaux, on en déduit en particulier, en posant $p=2$, l'inégalité

$$A_n-G_n>\frac{1}{n}\,d^2, \qquad n>2,$$

où d désigne la plus grande des différences $\sqrt{a_r}-\sqrt{a_s}$.

2. On peut obtenir des résultats un peu plus précis en supposant que les quantités $a_1, a_2, \ldots$ sont rangées par ordre de grandeur croissante:

$$0<a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots. \tag{5}$$

Soit n un nombre naturel fixe supérieur à 2. Nous nous proposons de déterminer *le plus grand nombre* positif α_n, tel que l'inégalité

$$A_n-G_n\geqq\alpha_n\,(A_{n-1}-G_{n-1}) \tag{6}$$

soit toujours remplie quels que soient les nombres positifs $a_1, a_2, \ldots a_n$ *formant une suite croissante* avec les indices. En posant

$$a_1=1-\varepsilon,\quad a_2=a_3=\cdots=a_n=1,$$

ε désignant un nombre positif arbitrairement petit, l'inégalité (6) devient

$$\alpha_n\leqq\frac{A_n-G_n}{A_{n-1}-G_{n-1}}=\frac{1-\dfrac{\varepsilon}{n}-\sqrt[n]{1-\varepsilon}}{1-\dfrac{\varepsilon}{n-1}\sqrt[n-1]{1-\varepsilon}}$$

ou, en passant à la limite $\varepsilon \to 0$,

$$\alpha_n \leqq \frac{(n-1)^3}{n^2(n-2)}.$$

Nous allons démontrer que pour $\alpha_n = \frac{(n-1)^3}{n^2(n-2)}$ l'inégalité (6) est toujours satisfaite, c'est-à-dire que cette dernière valeur de α_n est la meilleure possible, pourvu que les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ soient rangés par ordre de grandeur croissante.

Soit en effet q un entier positif, $1 \leqq q \leqq n-1$, et considérons l'expression

$$(7)\qquad \begin{cases} n(n-2)\left[a_1 + \cdots + a_q + (n-q)\, x - n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_q\, x^{n-q}}\right] \\ -(n-1)^2 \left[a_1 + \cdots + a_q + (n-q-1)\, x - (n-1) \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_q\, x^{n-q-1}}\right]. \end{cases}$$

Observons que les deux expressions entre crochets représentent respectivement $n(A_n - G_n)$ et $(n-1)(A_{n-1} - G_{n-1})$ où l'on a posé $a_{q+1} = \cdots = a_n = x$. En désignant pour abréger par $D_q(x)$ la formule (7), on peut démontrer facilement que $D_q(x)$ est une fonction croissante de x pour $x \geqq a_q$. On a en effet

$$\frac{d}{dx} D_q(x) = n(n-2)\,(n-q)\left[1 - \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_q}{x^q}}\right]$$

$$-(n-1)^2 (n-q-1)\left[1 - \sqrt[n-1]{\frac{a_1 \cdots a_q}{x^q}}\right]$$

$$= n(n-2)\,(n-q)\,(1-t^{n-1}) - (n-1)^2(n-q-1)\,(1-t^n) = \varphi(t),$$

où l'on a posé $t^{n(n-1)} = \frac{a_1 \cdots a_q}{x^q}$. D'autre part la dérivée

$$\varphi'(t) = n(n-1)\, t^{n-2}\left[(n-1)\,(n-q-1)\, t - (n-2)\,(n-q)\right]$$

est négative dans l'intervalle $0 < t < 1$, puisque l'inégalité $(n-1)(n-q-1) \leqq \leqq (n-2)(n-q)$ est équivalente avec $1 \leqq q$. On en conclut que la fonction décroissante $\varphi(t)$ est toujours positive dans l'intervalle $0 < t < 1$ puisque $\varphi(1) = 0$. On a donc $\frac{d}{dx} D_q(x) > 0$ pour $x > a_q$, ce qui prouve que $D_q(x)$ est une fonction croissante pour $x \geqq a_q$. En tenant compte des relations (5), il s'ensuit que

$$D_q(a_{q+1}) \geqq D_q(a_q) = D_{q-1}(a_q),$$

$$D_q(a_{q+1}) \geqq D_{q-1}(a_q), \quad q = 2, 3, \dots, n,$$

$$D_{n-1}(a_n) \geqq D_1(a_2) \geqq D_1(a_1) = 0,$$

$$(8)\qquad D_{n-1}(a_n) \geqq 0.$$

De plus, il est facile de voir que le signe $=$ dans la dernière relation n'est possible que lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Observons que la relation (8) est équivalente à l'inégalité (6), où $\alpha_n = \frac{(n-1)^3}{n^2(n-2)}$. Les expressions A_n, A_{n-1}, G_n, G_{n-1} étant symétriques par rapport à $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, nous pouvons donc énoncer le résultat obtenu comme suit:

En désignant par A_k et G_k les moyennes arithmétique et géométrique des q premiers des nombres positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$, si a_n est le plus grand de ces nombres, on a la relation

$$A_n - G_n \geqq \frac{(n-1)^3}{n^2(n-2)}(A_{n-1} - G_{n-1}), \quad n > 2, \tag{9}$$

le signe = n'étant possible que lorsque $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. De plus, si α_n est plus grand que $\frac{(n-1)^3}{n^2(n-2)}$, a_n désignant toujours le plus grand des nombres positifs a_k, l'inégalité

$$A_n - G_n \geqq \alpha_n (A_{n-1} - G_{n-1})$$

n'est pas toujours satisfaite.

Remarque. L'application répétée de la relation (9) conduit à l'inégalité

$$A_n - G_n \geqq \frac{(n-1)p^2}{n^2(p-1)}(A_p - G_p), \quad n > p > 1, \tag{10}$$

le coéfficient du second membre étant le meilleur possible, puisque pour

$$a_1 = 1 - \varepsilon, \quad a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \to 0$$

on a

$$\frac{A_n - G_n}{A_p - G_p} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{n} - \sqrt[n]{1-\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{p} - \sqrt[p]{1-\varepsilon}} \to \frac{(n-1)p^2}{n^2(p-1)}.$$

La relation (10) est établie en supposant que les nombres positifs $a_1, \dots, a_n$ forment une suite croissante ou, ce qui revient au même, qu'on ait toujours $a_k \leqq a_l$ pour $k \leqq p$, $l > p$.