PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 13–26.

KLEINE AUSSCHLÄGE BESONDERER SCHWINGERKETTEN[1]

Božidar D. Jovanović

(Vorgelegt am 5 December 1962)

1. ALLGEMEINER FALL EINER MATHEMATISCHEN SCHWINGERKETTE MIT DÄMPFUNG UND FEDERUNG

Es sei ein nichthomogenes Schwingungssystem (Abb. 1.) gegeben, das aus einer Reihe von $2n$ mathematischen Pendeln besteht. Der Faden, von der Länge l_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, von welchem vorausgesetzt wird, daß er ein unbiegsamer Stab ist, der eine vernachlässigbare Masse hat, ist in der Schwingungsebene im Abstand h_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, von dem Schwerpunkt der vorangehenden Masse, mit einem Dämpfer verbunden, der eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfung hat, sowie in der Entfernung h_i' $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, von dem Schwerpunkt der vorangehenden Masse, durch eine Feder, die die Federungskonstante c_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$ hat, mit einem festen Punkt in der Schwingungsebene befestigt ist. Die Masse des Pendels m_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, sei am unteren Ende des Fadens konzentriert. Die Schwingerkette, die am oberen Ende gefesselt sei, führt in einer festen Schwingungsebene, nach der Auslenkung des $2n$—en Massenpunktes, kleine Ausschläge um die senkrechte stabile Gleichgewichtslage.

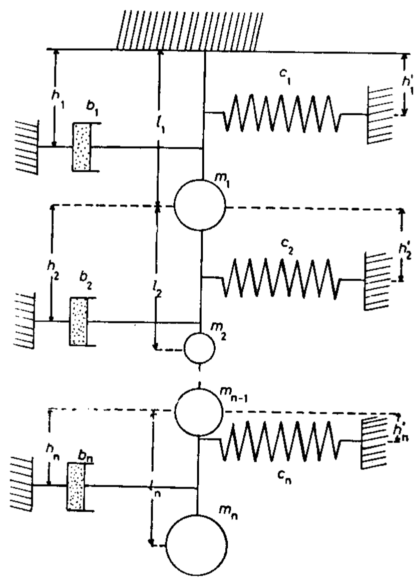

Abb. 1

Es ist wohlbekannt [7, S. 173] daß die kinetische Energie T und die potentielle Energie W des konservativen materiellen Systems, das die kleinen Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage ausführt, homogen quadratische Ausdrücke in diesen Systemkoordinaten q_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, bzw. ihren zeitlichen Ableitungen, den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$ mit konstanten Koef-

[1] Unter den Titel „Gedämpfte Schwingungen eines besonderen Schwingungssystems mit dynamischen und gemischten Kopplungen, II.", der 6. jugoslawischen Tagung für rationelle and angewandte Mechanik, Split, 4.—9. 6. 1962, mitgeteilt.

fizienten sind, und daß man sie auf folgende Weise schreiben kann [5, S. 334], [4, S. 153]

(1. 1) $$2T=(\dot{q})\,\mathfrak{A}\,\{\dot{q}\}, \quad 2W=(q)\,\mathfrak{C}\,\{q\},$$

mit

(1. 2) $$a_{jj}=l_j^2\sum_{i=1}^{2n} m_i, \quad a_{jk}=l_j\,l_k\sum_{i=k}^{2n} m_i, \quad a_{jk}=a_{kj},$$

(1. 3) $$c_{jj}=g l_j\sum_{i=j}^{2n} m_i+c_j h_j'^2+l_j^2\sum_{i=j+1}^{2n} c_i, \quad c_{jk}=c_k\,l_j\,h_k'+l_j\,l_k\sum_{i=k+1}^{2n} c_i,$$
$$c_{jk}=c_{kj}.$$

Hier sind $\mathfrak{A}=\|a_{jk}\|$ die Trägheits=, $\mathfrak{C}=\|c_{jk}\|$ die Federungsmatrix, (q), $(\dot{q})$ Zeilen=, und $\{q\}$, $\{\dot{q}\}$ Spaltenmatrizen. Beide Matrizen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, sind symmetrisch, und beide sind Matrizen positiver quadratischer Formen, $2n$—er Ordnung, wobei $2n$ die Zahl der Freiheitsgrade der Schwingerkette ist. Die kinetische Energie ist darüber hinaus noch positiv definit, während die potentielle Energie auch semidefinit sein kann. Die Matrix $\mathfrak{A}$[1] ist stets nichtsingulär, während $\mathfrak{C}$ auch singulär sein kann [8, S. 350].

Mit F,

(1. 4) $$2F=(\dot{q})\,\mathfrak{B}\,\{\dot{q}\},$$

haben wir die Rayleighsche Zerstreungsfunktion [1, S. 190] bezeichnet, bei welcher $\mathfrak{B}=\|b_{jk}\|$ die Zerstreuungs=, $(\dot{q})$ die Zeilen=, $\{\dot{q}\}$ die Spaltenmatrix, und b_{jk} die Zerstreuungskoeffizienten mit der Eigenschaft

(1. 5) $$b_{jk}=b_{kj},$$

sind. Die Matrix $\mathfrak{B}$ ist eine Matrix positiver quadratischer Forme, $2n$—er Ordnung, und überdies ist positiv oder semidefinit, wenn die Dämpfungskräfte, was wir hier annehmen wollen, so beschaffen sind, daß sie dem System immer nur Energie entziehen [8, S. 356].

Verwendung der Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Art ergibt ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\mathfrak{A}\,\{\ddot{q}\}+\mathfrak{B}\,\{\dot{q}\}+\mathfrak{C}\,\{q\}=0.$$

Zur Lösung dieses Systems macht man einen Exponentialansatz in der Form

(1. 6) $$\{q\}=\{r\}\,e^{\lambda t},$$

wo $\{r\}$ der Amplitudenvektor und λ die charakteristische Zahl ist. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\|\mathfrak{A}\,\lambda^2+\mathfrak{B}\,\lambda+\mathfrak{C}\|=0.$$

Die Bedingung für nichttriviale Lösungen $\{r\}$ ergibt die charakteristische Gleichung des Systems

(1. 7) $$\Delta(\lambda)=|\mathfrak{A}\,\lambda^2+\mathfrak{B}\,\lambda+\mathfrak{C}|=0.$$

---

[1] Aus technischen Gründen sind verschiedene Typen der Fraktur verwendet worden.

2. HOMOGENE, AUS „DOUBLETS" ZUSAMMENGESETZTE SCHWINGERKETTE MIT DÄMPFUNG UND FEDERUNG

Es sei ein „Doublet" ein gelenkig verbundenes doppeltes mathematisches Pendel, bei dem die Fäden starre Stäbe von gleicher Länge, von vernachlässigbaren Masse seien. Das erste hat, am unteren Ende konzentrierte Masse M, und das zweite m.

Die entsprechende charakteristische Gleichung folgt aus (1. 7) für $m_i = M$, $m_j = m$, $l_i = l_j = l$, $h_i = h_j = h$, $h_i' = h_j' = h'$, $b_i = b_j = b$, $c_i = c_j = c$, $(i = 1, 3, \ldots, 2n-1;$ $j = 2, 4, \ldots, 2n)$ in der Form

$$\Delta(\lambda) = |\mathfrak{N}\lambda^2 + 2\delta\mathfrak{S}\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{\mathfrak{S}} + \omega^2\mathfrak{D}| = 0. \tag{2. 1}$$

Die Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind jetzt $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ geworden, und die Matrix $\mathfrak{C}$ hat sich auf zwei Matrizen $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{D}$ gespaltet, welche die folgende Gestalt

$$\mathfrak{N} = \begin{Vmatrix} nk+n & (n-1)k+n & (n-1)k+n-1 & \cdots & k+2 & k+1 & 1 \\ (n-1)k+n & (n-1)k+n & (n-1)k+n-1 & \cdots & k+2 & k+1 & 1 \\ (n-1)k+n-1 & (n-1)k+n-1 & (n-1)k+n-1 & \cdots & k+2 & k+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ k+2 & k+2 & k+2 & \cdots & k+2 & k+1 & 1 \\ k+1 & k+1 & k+1 & \cdots & k+1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2. 2}$$

$$\mathfrak{S} = \begin{Vmatrix} s^2+2n-1 & s+2n-2 & s+2n-3 & \cdots & s+2 & s+1 & s \\ s+2n-2 & s^2+2n-2 & s+2n-3 & \cdots & s+2 & s+1 & s \\ s+2n-3 & s+2n-3 & s^2+2n-3 & \cdots & s+2 & s+1 & s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ s+2 & s+2 & s+2 & \cdots & s^2+2 & s+1 & s \\ s+1 & s+1 & s+1 & \cdots & s+1 & s^2+1 & s \\ s & s & s & \cdots & s & s & s^2 \end{Vmatrix}, \tag{2. 3}$$

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \begin{Vmatrix} \tilde{s}^2+2n-1 & \tilde{s}+2n-2 & \cdots & \tilde{s}+1 & \tilde{s} \\ \tilde{s}+2n-2 & \tilde{s}^2+2n-2 & \cdots & \tilde{s}+1 & \tilde{s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \tilde{s}+1 & \tilde{s}+1 & \cdots & \tilde{s}^2+1 & \tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{s} & \cdots & \tilde{s} & \tilde{s}^2 \end{Vmatrix}, \tag{2. 4}$$

$$\mathfrak{D} = \begin{Vmatrix} nk+n & & & & & & \\ & (n-1)k+n & & & & & \\ & & (n-1)k+n-1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & k+2 & & \\ & & & & & k+1 & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2. 5}$$

haben, wobei wir die Abkürzungen

$$2\delta = \frac{b}{m}, \quad \tilde{\omega}^2 = 2\frac{c}{m}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \tag{2.6}$$

und

$$k = \frac{M}{m}, \quad s = \frac{h}{l}, \quad \tilde{s} = \frac{h'}{l}, \tag{2.7}$$

eingeführt haben.

Die Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ sind, nach der Gestalt, offenbar gleich. Es unterscheidet sich die eine von der anderen nur in der Tilde über ihren Elementen.

Die charakteristische Gleichung (2. 1) sieht, in Form einer Determinante, folgendermaßen aus

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (nk+n)\lambda^2 + 2\delta(s^2+2n-1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}^2+2n-1) + \omega^2(nk+n) & [(n-1)k+n]\lambda^2 + 2\delta(s+2n-2)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}+2n-2) & \cdots & (k+1)\lambda^2 + 2\delta(s+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}+1) & \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} \\ [(n-1)k+n]\lambda^2 + 2\delta(s+2n-2)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}+2n-2) & [(n-1)k+n]\lambda^2 + 2\delta(s^2+2n-2)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}^2+2n-2) + \omega^2[(n-1)k+n] & \cdots & (k+1)\lambda^2 + 2\delta(s+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}+1) & \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (k+1)\lambda^2 + 2\delta(s+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}+1) & (k+1)\lambda^2 + 2\delta(s+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}+1) & \cdots & (k+1)\lambda^2 + 2\delta(s^2+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}^2+1) + \omega^2(k+1) & \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} \\ \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} & \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} & \cdots & \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} & \lambda^2 + 2\delta s^2\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s}^2 + \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (-)$$

Um eine bequemere Gestalt zu bekommen werden wir eine Umformung durchführen. Von der obersten Zeile ziehen wir die nächste unter ihr liegende ab, und dasselbe Verfahren führen wir bis zu der letzten Zeile durch. Jetzt hat die charakteristische Gleichung diese Gestalt

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} k\lambda^2 + 2\delta(s^2-s+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}^2-\tilde{s}+1) + \omega^2(nk+n) & 2\delta(s-s^2)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}-\tilde{s}^2) - \omega^2[(n-1)k+n] & \cdots \\ \lambda^2 + 2\delta\lambda + \tilde{\omega}^2 & \lambda^2 + 2\delta(s^2-s+1)\lambda + \tilde{\omega}^2(\tilde{s}^2-\tilde{s}+1) + \omega^2[(n-1)k+n] & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ k\lambda^2 + 2\delta\lambda + \tilde{\omega}^2 & k\lambda^2 + 2\delta\lambda + \tilde{\omega}^2 & \cdots \\ \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} & \lambda^2 + 2\delta s\lambda + \tilde{\omega}^2\tilde{s} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$
\left.\begin{array}{lcc}
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdot & \cdot \\
\cdots & k\lambda^2+2\delta(s^2-s+1)\lambda+\tilde{\omega}^2(\tilde{s}^2-\tilde{s}+1)+\omega^2(k+1) & 2\delta(s-s^2)\lambda+\tilde{\omega}^2(\tilde{s}-\tilde{s}^2)-\omega^2 \\
\cdots & \lambda^2+2\delta s\lambda+\tilde{\omega}^2\tilde{s} & \lambda^2+2\delta s^2\lambda+\tilde{\omega}^2\tilde{s}^2+\omega^2
\end{array}\right| = 0.
$$

$$\longleftarrow (-)$$

Dann ziehen wir von der ersten linken Spalte die nächste rechte ab, und dasselbe tun wir bis zu der letzten Spalte rechts. Wir erhalten damit die Determinante

$$
(2.8)\qquad \Delta(\lambda) = \left|\begin{array}{c}
k\lambda^2+2\delta(2s^2-2s+1)\delta+\tilde{\omega}^2(2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1)+\omega^2[(2n-1)k+2n] \\
-2\delta s(s-1)\lambda-\tilde{\omega}^2\tilde{s}(\tilde{s}-1)-\omega^2[(n-1)k+n] \\
\cdot \\
0 \\
0
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{cc}
-2\delta s(s-1)\lambda-\tilde{\omega}^2\tilde{s}(\tilde{s}-1)-\omega^2[(n-1)k+n] & \cdots \\
\lambda^2+2\delta(2s^2-2s+1)\lambda+\tilde{\omega}^2(2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1)+\omega^2[(2n-2)k+2n-1] & \cdots \\
\cdot & \cdots \\
0 & \cdots \\
0 & \cdots
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{lcc}
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdot & \cdot \\
\cdots & k\lambda^2+2\delta(2s^2-2s+1)\lambda+\tilde{\omega}^2(2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1)+\omega^2(k+2) & -2\delta s(s-1)\lambda-\tilde{\omega}^2\tilde{s}(\tilde{s}-1)-\omega^2 \\
\cdots & -2\delta s(s-1)\lambda-\tilde{\omega}^2\tilde{s}(\tilde{s}-1)-\omega^2 & \lambda^2+2\delta s^2\lambda+\tilde{\omega}^2\tilde{s}^2+\omega^2
\end{array}\right| = 0,
$$

die von Null verschiedene Elemente, nur in der Hauptdiagonale und in den beiden darüber und darunter liegenden Diagonalen, hat. In Matrizen-Schreibweise sieht die charakteristische Gleichung so aus

$$(2.9)\qquad \Delta(x) = |\mathfrak{K}\, x^2 + \alpha\, \mathfrak{S}^* x + S| = 0,$$

wo

$$(2.10)\qquad x = \frac{\lambda}{\omega},$$

eine neue charakteristische Zahl ist,

$$(2.11)\qquad \alpha = \frac{2\delta}{\omega}, \quad \beta = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2,$$

neue Abkürzungen, und

$$(2.12)\qquad \mathfrak{K} = \left\|\begin{array}{cccccc}
k & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & \\
 & & & & k & \\
 & & & & & 1
\end{array}\right\|,$$

$$\mathfrak{S}^* = \begin{Vmatrix} 2s^2-2s+1 & -s(s-1) & & & \\ -s(s-1) & 2s^2-2s+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2s^2-2s+1 & -s(s-1) \\ & & & -s(s-1) & s^2 \end{Vmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\tilde{\mathfrak{S}}^* = \begin{Vmatrix} 2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1 & -\tilde{s}(\tilde{s}-1) & & & \\ -\tilde{s}(\tilde{s}-1) & 2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1 & -\tilde{s}(\tilde{s}-1) \\ & & & -\tilde{s}(\tilde{s}-1) & \tilde{s}^2 \end{Vmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\mathfrak{J} = \begin{Vmatrix} (2n-1)k+2n & -[(n-1)k+n] & & & & \\ -[(n-1)k+n] & (2n-2)k+2n-1 & -[(n-1)k+n-1] & & & \\ & -[(n-1)k+n-1] & (2n-3)k+2n-2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 2k+3 & -(k+1) & \\ & & & -(k+1) & k+2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.15}$$

$$S = \beta\,\tilde{\mathfrak{S}}^* + \mathfrak{J}, \tag{2.16}$$

neue Matrizen sind.

Es ist leicht beweisbar daß die Determinanten der Matrizen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}^*$ den Wert

$$\det \mathfrak{K} = k^n,$$

bzw.

$$\det \mathfrak{S}^* = s^{2n},$$

haben.

Schrittweise Entwicklung der Determinante (2. 8) ergibt eine Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \Delta_{2n}(x) = \{kx^2 + \alpha(2s^2-2s+1)\,x + \beta(2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1) + \\ + (2n-1)k+2n\}\,\Delta_{2n-1}(x) - \{\alpha\, s(s-1)\,x + \beta\,\tilde{s}(\tilde{s}-1) + \\ + (n-1)k+n\}^2\,\Delta_{2n-2}(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_{2n-1}(x) = \{x^2 + \alpha(2s^2-2s+1)\,x + \beta(2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1) + \\ + (2n-1)k+2n\}\,\Delta_{2n-2}(x) - \{\alpha\, s(s-1)\,x + \beta\,\tilde{s}(\tilde{s}-1) + \\ + (n-1)k+n-1\}^2\,\Delta_{2n-3}(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

ist.

Man kann mittels dem Begriffe „die größte ganze Zahl", die durch eckige Klammern bezeichnet ist, die beide Ausdrücke (2. 17) und (2. 18) in der zuzammengefassten Form

$$\Delta_\nu(x)=\left\{\left\{(k-1)\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}x^2+\alpha(2s^2-2s+1)x+\beta(2\tilde{s}^2-2\tilde{s}+1)+\right.$$

$$\left.+(\nu-1)k+\nu\right\}\Delta_{\nu-1}(x)-\left\{\alpha s(s-1)x+\beta\tilde{s}(\tilde{s}-1)+\right. \tag{2. 19}$$

$$\left.+\left(\left[\frac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\frac{\nu}{2}\right]\right)\right\}^2\Delta_{\nu-2}(x)=0,\quad(\nu=1,2,\ldots,2n),$$

schreiben.

Ausdrücke (2. 17), (2. 18), bzw. (2. 19) geben die Möglichkeit alle charakteristische Gleichungen, ohne Determinantenentwicklung zu erhalten.

2. 1. Sonderfall $h=h'=l, \quad s=\tilde{s}=1$

Wenn man voraussetzt daß die Dämpfer, sowie die Feder, dicht an die Massenpunkte befestigt sind d. h. daß alle Abstände zwischen Massenpunkten und Verbindungspunkten der Dämpfer, bzw. der Feder den Pendellängen gleich sind, bekommt die charakteristische Gleichung (2. 9), wegen

$$h=h'=l,\quad s=\tilde{s}=1, \tag{2. 1. 1}$$

die folgende Form

$$^1\Delta_{2n}(x)=|\mathfrak{K}\,x^2+(\alpha\,x+\beta)\,\mathfrak{E}+\mathfrak{J}|=0. \tag{2. 1. 2}$$

Wie früher, ergibt uns die schrittweise Entwicklung die entsprechende Rekursionsformel

$$^1\Delta_{2n}(x)=\{kx^2+\alpha x+\beta+(2n-1)k+2n\}\;^1\Delta_{2n-1}(x)-$$
$$-\{(n-1)k+n\}^2\;^1\Delta_{2n-2}(x)=0,$$

mit

$$^1\Delta_{2n-1}(x)=\{x^2+\alpha x+\beta+(2n-2)k+2n-1\}\;^1\Delta_{2n-2}(x)-$$
$$-\{(n-1)k+n-1\}^2\;^1\Delta_{2n-3}(x)=0,$$

oder kürzer

$$^1_kP_\nu(x)=\left\{\left\{(k-1)\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}x^2+\right.$$

$$\left.+\alpha x+\beta+(\nu-1)k+\nu\right\}\;^1_kP_{\nu-1}(x)- \tag{2. 1. 3}$$

$$-\left\{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\frac{\nu}{2}\right]\right\}^2\;^1_kP_{\nu-2}(x)=0,\quad(\nu=1,2,\ldots,2n),$$

mit

$$^1_kP_\nu(x)=\Delta_\nu(x). \tag{2. 1. 4}$$

2. 1. 1. Homogene mathematische Schwingerkette mit Dämpfung und Federung

In diesem Fall ist

$$k = 1, \qquad (2.1.1.1)$$

bzw.

$$m = M. \qquad (2.1.1.2)$$

Bei diesem System sind alle Massen, alle Pendellängen, alle Entfernungen der Anknupfspunkte der Dämpfer, bzw. Feder von den voranstehenden Massen, gleich.

Deshalb folgt aus (2. 1. 3)

$${}^{1}_{1}P_\nu(x) = L_\nu(-y), \qquad (2.1.1.3)$$

wo

$$y = \frac{\lambda^2 + 2\delta\lambda + \tilde{\omega}^2}{\omega^2}, \qquad (2.1.1.4)$$

eine neue charakteristische Zahl ist. $L_\nu(-y)$ ist das Laguerresche Polynom [2, S. 45], worin $-y$ statt y die neue Veränderliche ist. Damit haben wir das Problem zu dem, welches in [3, S. 969, 970] besprochen war, zurückgeführt.

3. ALLGEMEINER FALL EINER MATHEMATISCHEN SCHWINGERKETTE MIT DÄMPFUNG

Es sei ein Schwingungssystem gegeben das dem in 1. behandelten System ohne Federung gleich ist (Abb. 2.).

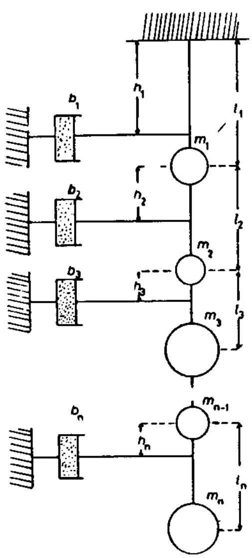

Abb. 2

Die kinetische Energie ist mit (1. 1) gegeben, und die potentielle Energie hat dieselbe Form wie in (1. 1) d. h.

$$2W = (q)\,\mathfrak{C}^*\,\{q\}, \qquad (3.1)$$

obwohl die Federungsmatrix $\mathfrak{C}^*$, mit den Elementen [4, S. 154]

$$c^*_{jj} = g l_j \sum_{i=j}^{2n} m_i, \quad c^*_{jk} = c^*_{kj} = 0, \qquad (3.2)$$

jetzt eine Diagonalmatrix geworden ist. Die Rayleighsche Zerstreuungsfunktion ist mit (1. 4) gegeben. Verwendung der Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Art ergibt das System

$$\mathfrak{A}\,\{\ddot{q}\} + \mathfrak{B}\,\{\dot{q}\} + \mathfrak{C}^*\,\{q\} = 0,$$

und die entsprechende charakteristische Gleichung

$$\Delta(\lambda) = |\mathfrak{A}\,\lambda^2 + \mathfrak{B}\,\lambda + \mathfrak{C}^*| = 0. \qquad (3.3)$$

4. HOMOGENE, AUS „DOUBLETS" ZUSAMMENGESETZTE SCHWINGERKETTE MIT DÄMPFUNG

Gemäß der Definition des „Doublets" in 2. und den Bemerkungen über der Matrix $\mathfrak{C}^*$ in 3. folgt aus (2. 1), bzw. aus (3. 3) die charakteristische Gleichung für diesen Fall

$$\Delta(\lambda) = |\mathfrak{N}\lambda^2 + 2\delta\mathfrak{S}\lambda + \omega^2\mathfrak{D}| = 0, \tag{4. 1}$$

mit den Matrizen (2. 2), (2. 3) und (2. 5), und den Abkürzungen (2. 6), bzw. (2. 7).

Nach der Umformung wie in 2. erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$\Delta(x) = |\mathfrak{K}x^2 + \alpha\mathfrak{S}^* x + \mathfrak{J}| = 0, \tag{4. 2}$$

wobei die Matrizen (2. 12), (2. 13), (2. 15) sowie die charakteristische Zahl (2. 10), und die Abkürzung (2. 11) benutzt sind.

Durch die Schrittweise Entwicklung der Determinante (4. 2) bekommt man eine Rekursionsformel

$$\begin{aligned}\Delta_{2n}(x) = \{kx^2 + \alpha(2s^2 - 2s + 1)x + (2n-1)k + 2n\}\ \Delta_{2n-1}(x) - \\ - \{\alpha s(s-1)x + (n-1)k + n\}^2\ \Delta_{2n-2}(x) = 0,\end{aligned} \tag{4. 3}$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta_{2n-1}(x) = \{x^2 + \alpha(2s^2 - 2s + 1)x + (2n-2)k + 2n - 1\}\ \Delta_{2n-2}(x) - \\ - \{\alpha s(s-1)x + (n-1)k + n - 1\}^2\ \Delta_{2n-3}(x) = 0,\end{aligned} \tag{4. 4}$$

oder zusammengefasst

$$\begin{aligned}\Delta_\nu(x) = \Bigg\{\bigg\{(k-1)\left(\left[\frac{\nu}{2}\right] - \left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right) + 1\bigg\}x^2 + \alpha(2s^2 - 2s + 1)x + \\ + (\nu-1)k + \nu\Bigg\}\ \Delta_{\nu-1}(x) - \left\{\alpha s(s-1)x + \left(\left[\frac{\nu-1}{2}\right]k + \left[\frac{\nu}{2}\right]\right)\right\}^2\ \Delta_{\nu-2}(x) = 0.\end{aligned} \tag{4. 5}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

4. 1 Sonderfall $h = l$, $s = 1$

Man kann die charakteristische Gleichung (4. 2) in noch einfacherer Form bekommen, wenn man voraussetzt, daß die Dämpfer dicht an die Massenpunkte angeknüpft sind. Wegen (2. 1. 1) folgt

$$^2\Delta_{2n}(x) = |\mathfrak{K}x^2 + \alpha\mathfrak{E}x + \mathfrak{J}| = 0. \tag{4. 1. 1}$$

Die Rekursionsformeln (4. 3), (4. 4), (4. 5) werden jetzt

$$\begin{aligned}{}^2\Delta_{2n}(x) = \{kx^2 + \alpha x + (2n-1)k + 2n\}\ {}^2\Delta_{2n-1}(x) - \\ - \{(n-1)k + n\}^2\ {}^2\Delta_{2n-2}(x) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}^2\Delta_{2n-1}(x) = \{x^2 + \alpha x + (2n-2)k + 2n - 1\}\ {}^2\Delta_{2n-2}(x) - \\ - \{(n-1)k + n - 1\}^2\ {}^2\Delta_{2n-3}(x) = 0,\end{aligned}$$

$$
(4.1.2)\qquad \begin{aligned}
{}_{k}^{2}P_{\nu}(x) = &\left\{\left\{(k-1)\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}x^2+\alpha x+(\nu-1)k+\nu\right\}{}_{k}^{2}P_{\nu-1}(x)-\\
&-\left\{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\frac{\nu}{2}\right]\right\}^2 {}_{k}^{2}P_{\nu-2}(x)=0,\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,2n),
\end{aligned}
$$

mit der Bezeichnung ähnlich derselben in (2. 1. 4).

4. 1. 1. Homogene mathematische Schwingerkette mit Dämpfung

Wegen (2. 1. 1. 1) und (2. 1. 1. 2) folgt

$$
(4.1.1.1)\qquad {}_{1}^{2}P_{\nu}(x)=L_{\nu}(-z),
$$

wo

$$
(4.1.1.2)\qquad z=\frac{\lambda(\lambda+2\delta)}{\omega^2},
$$

die charakteristische Zahl, und L_ν das Laguerresche Polynom ist, wobei man $-z$ statt z als Veränderliche nehmen soll [3, S. 968].

5. ALLGEMEINER FALL EINER MATHEMATISCHEN SCHWINGERKETTE MIT FEDERUNG

Es sei ein Schwingungssystem gegeben das dem in 1. besprochenen System ohne Dämpfung gleich ist (Abb. 3.).

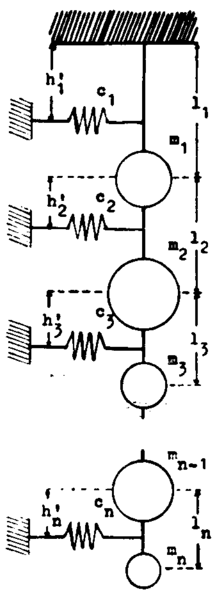

Abb. 3

Die kinetische Energie und die potentielle Energie seien mit (1. 1) gegeben. Die Lagrangesche Differentialgleichungen zweiter Art ergeben ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$
\mathfrak{A}\{\ddot{q}\}+\mathfrak{C}\{q\}=0.
$$

Zur Lösung dieses Systems macht man, wie in früheren Fällen, ein Exponentialansatz (1. 6). Dieser liefert ein Gleichungssystem dessen charakteristische Gleichung sieht so aus

$$
(5.1)\qquad \Delta(\lambda)=|\mathfrak{A}\lambda^2+\mathfrak{C}|=0.
$$

6. HOMOGENE, AUS „DOUBLETS" ZUSAMMENGESETZTE SCHWINGERKETTE MIT FEDERUNG

Aus (2. 1) und den Bemerkungen im 5. folgt die charakteristische Gleichung für dieses System

$$
(6.1)\qquad \Delta(\lambda)=|\mathfrak{N}\lambda^2+\tilde{\omega}^2\tilde{\mathfrak{S}}+\omega^2\mathfrak{D}|=0,
$$

mit den Matrizen (2. 2), (2. 4), (2. 5) und Abkürzungen (2. 6), (2. 7).

Nach der Umformung wie im 2., Einführung einer neuen charakteristischen Zahl

$$
(6.2)\qquad \tilde{x}=\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2,
$$

bekannten Matrizen (2. 12), (2. 16) und Abkürzungen (2. 11), sieht die charakteristische Gleichung (6. 1) folgendermaßen aus

$$\Delta(\tilde{x}) = |\mathfrak{K}\,\tilde{x} + \mathfrak{S}| = 0. \tag{6. 3}$$

Falls wir die schrittweise Entwicklung dieser Determinante benützen, ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}\Delta_{2n}(\tilde{x}) = \{k\tilde{x} + \beta(2\tilde{s}^2 - 2\tilde{s} + 1) + (2n-1)\,k + 2n\}\ \Delta_{2n-1}(\tilde{x}) - \\ -\{\beta\,\tilde{s}(\tilde{s}-1) + (n-1)\,k + n\}^2\ \Delta_{2n-2}(\tilde{x}) = 0,\end{aligned} \tag{6. 4}$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta_{2n-1}(\tilde{x}) = \{\tilde{x} + \beta(2\tilde{s}^2 - 2\tilde{s} + 1) + (2n-2)\,k + 2n-1\}\ \Delta_{2n-2}(\tilde{x}) - \\ -\{\beta\,\tilde{s}(\tilde{s}-1) + (n-1)\,k + n-1\}^2\ \Delta_{2n-3}(\tilde{x}) = 0,\end{aligned} \tag{6. 5}$$

oder

$$\begin{aligned}\Delta_\nu(\tilde{x}) = \Big\{\Big\{(k-1)\Big(\Big[\frac{\nu}{2}\Big] - \Big[\frac{\nu-1}{2}\Big]\Big) + 1\Big\}\,\tilde{x} + \\ + \beta(2\tilde{s}^2 - 2\tilde{s} + 1) + (\nu-1)\,k + \nu\Big\}\ \Delta_{\nu-1}(\tilde{x}) - \\ -\Big\{\beta\,\tilde{s}(\tilde{s}-1) + \Big[\frac{\nu-1}{2}\Big]k + \Big[\frac{\nu}{2}\Big]\Big\}^2\ \Delta_{\nu-2}(\tilde{x}) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n).\end{aligned} \tag{6. 6}$$

6. 1. Sonderfall $h' = l$, $\tilde{s} = 1$

Eine einfachere Form für die charakteristische Gleichung (6. 3) erhaltet man, wenn man voraussetzt, daß die Feder dicht an die Massenpunkte befestigt sind. Wegen (2. 1. 1) folgt

$${}^3\Delta_{2n}(\tilde{x}) = |\mathfrak{K}\,\tilde{x} + \tilde{\boldsymbol{S}}| = 0, \tag{6. 1. 1}$$

mit einer neuen Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \beta\,\mathfrak{E} + \mathfrak{J}, \tag{6. 1. 2}$$

weil jetzt die Matrix $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ eine Einheitsmatrix geworden ist.

Die schrittweise Entwicklung ergibt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}{}^3\Delta_{2n}(\tilde{x}) = \{k\tilde{x} + \beta + (2n-1)\,k + 2n\}\ {}^3\Delta_{2n-1}(\tilde{x}) - \\ -\{(n-1)\,k + n\}^2\ {}^3\Delta_{2n-2}(\tilde{x}) = 0,\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}{}^3\Delta_{2n-1}(\tilde{x}) = \{\tilde{x} + \beta + (2n-2)\,k + 2n-1\}\ {}^3\Delta_{2n-2}(\tilde{x}) - \\ -\{(n-1)\,k + n-1\}^2\ {}^3\Delta_{2n-3}(\tilde{x}) = 0,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}{}^3_kP_\nu(\tilde{x}) = \Big\{\Big\{(k-1)\Big(\Big[\frac{\nu}{2}\Big] - \Big[\frac{\nu-1}{2}\Big]\Big) + 1\Big\}\,\tilde{x} + \beta + (\nu-1)\,k + \nu\Big\}\ {}^3_kP_{\nu-1}(\tilde{x}) - \\ -\Big\{\Big[\frac{\nu-1}{2}\Big]k + \Big[\frac{\nu}{2}\Big]\Big\}^2\ {}^3_kP_{\nu-2}(\tilde{x}) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n).\end{aligned} \tag{6. 1. 3}$$

6.1.1. Homogene mathematische Schwingerkette mit Federung

Dieses System hat alle Massen, alle Pendellängen, alle Abstände der Befestigungspunkte der Feder gleich. Deshalb wird (6.1.3)

$$ {}_1^3P_\nu(\tilde{x}) = L_\nu(-\tilde{y}). \tag{6.1.1.1} $$

Man sieht daß wir wieder ein Laguerresches Polynom, mit der Veränderlichen

$$ \tilde{y} = \frac{\lambda^2 + \tilde{\omega}^2}{\omega^2} \tag{6.1.1.2} $$

erhalten haben, welches schon geprüft ist [4, S. 179].

7. ALLGEMEINER FALL EINER MATHEMATISCHEN SCHWINGERKETTE

Es sei ein Schwingungssystem gegeben das dem in 1. behandelten System ohne Dämpfung und Federung gleich ist (Abb. 4.).

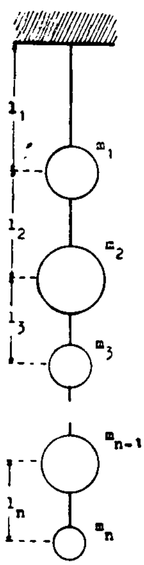

Abb. 4

Die kinetische Energie ist mit (1.1), und die potentielle Energie mit (3.1) gegeben. Die Elemente der Federungsmatrix $\mathfrak{C}^*$ sind, wie in 3., durch die Ausdrücke (3.2) gegeben.

Lagrangesche Differentialgleichungen zweiter Art liefern ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ \mathfrak{A}\{\ddot{q}\} + \mathfrak{C}^*\{q\} = 0. $$

Daraus folgt die entsprechende charakteristische Gleichung

$$ \Delta(\lambda) = |\mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{C}^*| = 0. \tag{7.1} $$

8. HOMOGENE, AUS „DOUBLETS“ ZUSAMMENGESETZTE SCHWINGERKETTE

Aus (7.1) folgt die charakteristische Gleichung für

$$ m_i = M,\ m_j = m,\ l_i = l_j = l, \qquad (i = 1, 3, \ldots, 2n-1;\ j = 2, 4, \ldots, 2n) $$

$$ \Delta(\lambda) = |\mathfrak{N}\lambda^2 + \omega^2\mathfrak{D}| = 0, $$

Spalten= und Zeilenumformung ergibt eine neue Form

$$ \tilde{\Delta}(\tilde{x}) = |\mathfrak{K}\tilde{x} + \mathfrak{J}| = 0 \tag{8.1} $$

mit den bekannten Matrizen (2.12), (2.15) und der charakteristischen Zahl (6.2). Schrittweise Entwicklung liefert

$$ \tilde{\Delta}_{2n}(\tilde{x}) = \{k\tilde{x} + (2n-1)k + 2n\}\ \tilde{\Delta}_{2n-1}(\tilde{x}) - \{(n-1)k + n\}^2\ \tilde{\Delta}_{2n-2}(\tilde{x}) = 0, \tag{8.2} $$

wobei

$$ \begin{aligned} \tilde{\Delta}_{2n-1}(\tilde{x}) = \{\tilde{x} + (2n-2)k + 2n-1\}\ \tilde{\Delta}_{2n-2}(\tilde{x}) - \\ - \{(n-1)k + n-1\}^2\ \tilde{\Delta}_{2n-3}(\tilde{x}) = 0 \end{aligned} \tag{8.3} $$

ist, oder zusammengefasst

$$(8.4)\quad \begin{aligned} {}_k\tilde{P}_\nu(\tilde{x}) = &\left\{\left\{(k+1)\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}\tilde{x}+(\nu-1)\,k+\nu\right\}\,{}_k\tilde{P}_{\nu-1}(\tilde{x})-\\ &-\left\{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\frac{\nu}{2}\right]\right\}^2\,{}_k\tilde{P}_{\nu-2}(\tilde{x})=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,2n). \end{aligned}$$

Dabei haben wir folgende Bezeichungen benutzt

$$(8.5)\quad \begin{aligned} \tilde{\Delta}_{2n}(\tilde{x}) &= {}_k\tilde{P}_{2n}(\tilde{x}) = \sum_{r=0}^{2n} B_{2n,\,2n-r}\,\tilde{x}^{2n-r}=0,\\ \tilde{\Delta}_{2n-1}(\tilde{x}) &= {}_k\tilde{P}_{2n-1}(\tilde{x}) = \sum_{r=0}^{2n-1} B_{2n-1,\,2n-r-1}\,\tilde{x}^{2n-r-1}=0. \end{aligned}$$

$B_{\nu,\mu}$ sind die Koeffizienten des Polynomes ${}_k\tilde{P}_\nu$, für welche folgende Rekursionsformeln bestehen

$$(8.6)\quad \begin{aligned} B_{2n,\,2n-r} &= [(2n-1)\,k+2n]\;B_{2n-1,\,2n-r}+k\,B_{2n-2,\,2n-r-1}-\\ &\quad-[(n-1)\,k+n]^2\;B_{2n-2,\,2n-r}, \qquad (r=0,1,2,\ldots,2n),\\ B_{2n-1,\,2n-s} &= [(2n-2)\,k+2n-1]\;B_{2n-2,\,2n-s}+B_{2n-2,\,2n-s-1}-\\ &\quad-[(n-1)\,k+n-1]^2\;B_{2n-3,\,2n-s}, \qquad (s=1,2,\ldots,2n), \end{aligned}$$

oder

$$(8.7)\quad \begin{aligned} B_{\nu,\,\nu-r} = &[(\nu-1)\,k+\nu]\;B_{\nu-1,\,\nu-r}+\left\{(k-1)\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}\;B_{\nu-1,\,\nu-r-1}-\\ &-\left\{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\frac{\nu}{2}\right]\right\}^2\;B_{\nu-2,\,\nu-r}, \qquad (\nu=1,2,\ldots,2n;\; r=0,1,\ldots,2n). \end{aligned}$$

Nach der Definition ist

$$(8.8)\qquad {}_kP_0=1,$$

und

$$(8.9)\qquad B_{\nu,\,-\mu}=0.$$

8. 1. Homogene mathematische Schwingerkette

Die Bedingungen (2. 1. 1. 1) und (2. 1. 1. 2) ergeben die charakteristische Gleichung für die homogene Schwingerkette

$${}_1\tilde{P}_\nu(\tilde{x})=(\tilde{x}+2\nu-1)\;{}_1\tilde{P}_{\nu-1}(\tilde{x})-(\nu-1)^2\;{}_1\tilde{P}_{\nu-2}(\tilde{x})=0,$$

weil immer

$$\left[\frac{\nu-1}{2}\right]+\left[\frac{\nu}{2}\right]=\nu-1$$

ist. Diesen Ausdruck haben wir schon in [3, S. 967] erhalten, d. h.

$$(8.1.1)\qquad {}_1\tilde{P}_\nu(\tilde{x})=L_\nu(-\tilde{x}),$$

wobei L_ν das Laguerresche Polynom [2, S. 45], worin $-\tilde{x}$ statt $\tilde{x}$ die neue Veränderliche ist [6, S. 97].

8.2. Der Fall $k=2$

Die Koeffizienten $B_{\nu,\mu}$ sind für diesen Fall in der Tafel 1. angegeben.

TAFEL 1.

B_{10}	B_9	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
									1	1
								2	6	3
							2	20	36	12
						4	60	240	288	72
					4	112	948	2688	2520	504
				8	288	3492	17604	36288	27216	4536
			8	440	8640	74880	293976	498960	317520	45360
		16	1056	26160	311040	1886112	5704992	7983360	4354560	544320
	16	1456	51408	901680	8417952	42075072	108275616	132088320	63685440	7076160
32	3360	140880	3064320	37661904	267287040	1075900320	2331750240	2476656000	1061424000	106142400

9. „VERALLGEMEINERTE" LAGUERRESCHE POLYNOME

Man kann die Polynome (4.1.2), (6.1.2), (2.1.3), bzw. (8.4), (4.5), (6.6) und (2.19), besonders das letzte als das allgemeinste, als eine Verallgemeinerung des Laguerreschen Polynome betrachten.

SCHRIFTTUMVERZEICHNIS

[1] A. Bilimović: *Racionalna Mehanika* II. Naučna knjiga, Beograd, 1951.

[2] O. Bottema: *Die Schwingungen eines zusammengesetzten Pendels.* Jahresber. d. Dtsch. mathem. Vereinigung, 42, 1-4, 1932.

[3] B. D. Jovanović, D. P. Rašković: *Amortizovane oscilacije jednog specijalnog oscilatornog sistema sa dinamičkim i mešovitim vezama.* Tehnika, Opšti deo, Godina XVI, Jun 1961.

[4] D. P. Rašković: *Neke karakteristike frekventnih jednačina malih oscilacija specijalnih sistema sa dinamičkim i mešovitim vezama.* Zbornik rad. Maš. inst. Srp. akad. nauka, Tom LX, Knj. 8, 1959.

[5] D. P. Rašković: *On Some Characteristics of the Frequency Equations of Small Vibrations of Some Particular Holonomic Conservative Systems.* Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. IX, Pt. 3, 1956.

[6] G. Szegő: *Orthogonal Polynomials.* Am. Math. Soc., New York, 1939.

[7] E. T. Whittaker: *Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge Univ. Press, 1959.

[8] R. Zurmühl: *Matrizen.* Springer, Berlin 1950.