PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 139–141.

L'ÉQUATION $uv = w^2$ EN NOMBRES TRIANGULAIRES

Casimir Szymiczek

(Présenté le 20 septembre 1963)

M. W. Sierpiński a posé (*voir* [1], p. 23) le problème s'il existe outre le triple $t_1 = 1$, $t_3 = 6$, $t_8 = 36$, d'autres triples de nombres triangulaires $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ formant une progression géométrique croissante.

Le but de cette note est de démontrer que l'équation

$$uv = w^2 \tag{1}$$

a une infinité de solutions en nombres triangulaires distincts, u, v et w.

Comme l'a démontré M. Sierpiński (*voir* [2], p. 1—4), si $t_x = y^2$, où x et y sont des entiers positifs, alors le plus petit nombre triangulaire $> t_x$ qui est en même temps carré, est le nombre

$$t_{3x+4y+1} = (2x + 3y + 1)^2. \tag{2}$$

J'affirme que alors les nombres $u = t_x$, $v = t_{3x+4y+1}$ et $w = t_{x+2y}$ satisfont à l'équation (1).

En effet, on a, d'après $t_x = y^2$ et (2):

$$\begin{aligned}\sqrt{uv} - w &= \sqrt{t_x t_{3x+4y+1}} - t_{x+2y} \\ &= y(3x + 3y + 1) - \frac{(x+2y)(x+2y+1)}{2} \\ &= y^2 - \frac{x(x+1)}{2} \\ &= y^2 - t_x \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc $\sqrt{uv} = w$, ce qui prouve que les nombres u, v et w satisfont à l'équation (1).

Or, comme il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont en même temps carrés, nous avons démontré qu'il existe une infinité de solutions en nombres triangulaires distincts u, v et w de l'équation (1).

Soit

$$a_1 = 1^2,\ a_2 = 6^2,\ a_3 = 35^2,\ a_4 = 204^2,\ a_5 = 1189^2,\ a_6 = 6930^2,\ \ldots \tag{3}$$

la suite infinie formée de tous les nombres triangulaires consécutifs qui sont en même temps carrés. Nous avons donc démontré le

Théorème 1. *La moyenne géométrique de tous deux nombres consecutifs de la suite* (3) *est un nombre triangulaire.*

Il résulte du théorème 1 tout de suite ce

Corollaire. *Il existe une infinité de progressions géométriques formées de trois nombres triangulaires distincts.*

Telles sont, par exemple, les progressions:

$$t_1 = 1,\ t_3 = 6,\ t_8 = 6^2;$$

$$t_8,\ t_{20} = 210,\ t_{49} = 35^2; \tag{4}$$

$$t_{49},\ t_{119} = 7140,\ t_{288} = 204^2, \ldots$$

La raison de la première de ces progressions est un nombre naturel 6. M. Sierpiński a posé les trois problèmes suivants qui ne sont pas encore résolus:

1) Existe-t-il des progressions géométriques autres que 1, 6, 36, formées de trois nombres triangulaires, dont la raison est un entier >1?

2) Existe-t-il des progressions géométriques formées de trois nombres triangulaires distincts, autres que celles qui sont fournies par le théorème 1?

3) Existe-t-il des progressions géométriques formées de quatre nombres triangulaires distincts?

Il est à remarquer que le terme moyen des progressions (4) est toujours un double d'un nombre triangulaire.

En effet, il résulte de l'identité

$$\frac{(x+2y)(x+2y+1)}{2} - (x+y)(x+y+1) = y^2 - \frac{x(x+1)}{2}$$

et de $t_x = y^2$ qu'on a ici $t_{x+2y} = 2t_{x+y}$.

On a, par exemple $t_3 = 2t_1$, $t_{20} = 2t_{14}$, $t_{119} = 2t_{84}$, ...

Or, on peut démontrer qu'il existe une infinité d'autres triples de nombres triangulaires t_a, t_b, t_c, tels que les nombres t_a, $2t_b$ et t_c forment une progression géométrique. En effet, comme l'a remarqué M. Sierpiński (*voir* [1], p. 30), si x et y sont des nombres naturels tels que $t_x = 3y^2$, on a $t_{5x+12y+2} = 3(2x+5y+1)^2$, et il en résulte sans peine que les nombres

$$t_x = 3y^2,\ 2t_{x+3y} = 3y(2x+5y+1),\ t_{5x+12y+2} = 3(2x+5y+1)^2$$

forment une progression géométrique. On a, par exemple:

$$t_2 = 3\cdot 1^2,\quad 2t_5 = 3\cdot 10,\quad t_{24} = 3\cdot 10^2;$$

$$t_{24},\ 2t_{54} = 3\cdot 10\cdot 99,\quad t_{242} = 3\cdot 99^2;$$

$$t_{242},\ 2t_{539} = 3\cdot 99\cdot 980,\quad t_{2400} = 3\cdot 980^2.$$

Or, comme l'a démontré M. Sierpiński (*voir* [1], p. 25) toutes les solutions de l'équation $c^2 = a^2 + (a+1)^2$ en nombres naturels a et c peuvent être obtenues des solutions de l'équation $t_x = y^2$ en nombres naturels, dont on déduit que

$$(2x+2y+1)^2 = (x+2y)^2 + (x+2y+1)^2.$$

Il en résulte tout de suite le

Théorème 2. *L'aire d'un triangle pythagorien dont les côtes sont des nombres naturels consécutifs, est un nombre triangulaire qui est la moyenne géométrique de deux nombres triangulaires carrés consécutifs.*

On a, par exemple:

$$5^2 = 3^2 + 4^2, \quad \frac{3 \cdot 4}{2} = t_3 = 6 = \sqrt{1 \cdot 6^2}, \quad 29^2 = 20^2 + 21^2, \quad \frac{20 \cdot 21}{2} = t_{20} = 210 = \sqrt{6^2 \cdot 35^2},$$

$$169^2 = 119^2 + 120^2, \quad \frac{119 \cdot 120}{2} = t_{119} = 7140 = \sqrt{35^2 \cdot 204^2}.$$

Addition pendant la correction des épreuves

M. A. Makowski m'a communiqué que L. E. Dickson dans le vol. II de sa *History of the Theory of Numbers* à la p. 36 écrit que A. Gérardin dans *Sphinx — Oedipe* 9, 1914, p. 75 et p. 146 a donné la formule récurrente $z_0 = 3$, $z_1 = 20$, $z_{n+1} = 6z_n - z_{n-1} + 2$ qui donne les solutions de l'équation $t_x t_y = t_z^2$. Le travail de A. Gérardin ne m'est pas accessible. Or, M. A. Rotkiewicz a démontré que les solutions données par la formule de Gérardin sont les mêmes que celles que j'ai déduit plus haut.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Sierpiński: *Liczby trójkatne*. Biblioteczka Matematyczna 12, Warszawa, 1962.

[2] W. Sierpiński: Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Serija: Matematika i fizika, Nr. 65, 1961. p. 1—4,